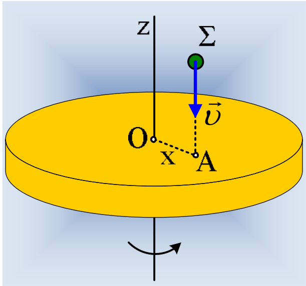
Η στροφορμή και μια κρούση



Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας M=2kg και ακτίνας R=2m στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, με γωνιακή ταχύτητα ω=0,5rad/s. Ένα σώμα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m=1kg, αφήνεται να πέσει από ύψος h=0,8m, πάνω από το δίσκο και προσκολλάται σε αυτόν, στο σημείο A, σε απόσταση x=1m από το κέντρο O του δίσκου.

i) Να βρεθεί ελάχιστα πριν την κρούση του σώματος Σ με το δίσκο:

α) Η ταχύτητα του σώματος Σ καθώς και η στροφορμή του κατά (ως προς) τον άξονα z.

β) Η στροφορμή του σώματος Σ ως προς το κέντρο O του δίσκου, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της.

ii) Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, μετά την προσκόλληση του Σ πάνω στο δίσκο.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της στροφορμής:

α) του σώματος Σ   και   β) του δίσκου

που οφείλεται στην κρούση, ως προς το κέντρο O του δίσκου.

iv) Να υπολογιστεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του z, $I= ½\, MR^2$.

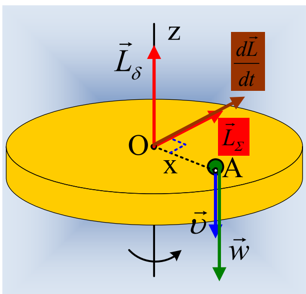
Απάντηση:

i) Κατά την πτώση του σώματος Σ η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

α) Εφαρμόζοντας τη ΑΔΜΕ από τη θέση που αφήνεται να κινηθεί, μέχρι ελάχιστα πριν την κρούση παίρνουμε:

$$mgh= ½\, mυ^2 \rightarrow υ=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}8}m/s=4m/s$$

Με κατακόρυφη διεύθυνση, παράλληλη δηλαδή με τον άξονα z. Οπότε η στροφορμή του σώματος κατά τον άξονα z είναι μηδενική (ταχύτητα παράλληλη στον άξονα).



β) Ως προς το κέντρο O του δίσκου, αντίθετα από πριν, το σώμα Σ έχει στροφορμή με μέτρο:

$$L_Σ=mυx=1\cdot 4\cdot 1kg\cdot m^2/s=4\ kg\cdot m^2/s.$$

Και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η ταχύτητα και το σημείο O, όπως στο σχήμα, σε οριζόντια διεύθυνση, κάθετη στην OA.

Αλλά και για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_O$$

Όπου ροπή ως προς το κέντρο Ο έχει το βάρος, με διεύθυνση κάθετη επίσης στο επίπεδό που ορίζει το βάρος και το σημείο Ο, άρα οριζόντιο διάνυσμα, κάθετο στην ΟΑ (ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα της στροφορμής) και μέτρου:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_O = wx = mgx = 1 \cdot 10 \cdot 1kg \cdot m^2/s^2 = 10kg \cdot m^2/s^2$$

ii) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δίσκος-σώμα Σ, στη διάρκεια της κρούσης είναι τα βάρη και η δύναμη από τον άξονα. Οι ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς τον άξονα z είναι μηδενικές, οπότε η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του δίσκου z, παραμένει σταθερή:

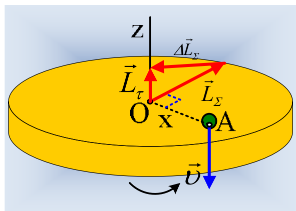
$$L_{z,\pi\rho\iota\nu} = L_{z,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow I_\delta \cdot \omega + 0 = I_{\delta,\Sigma} \cdot \omega_1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mx^2\right)\omega_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{MR^2}{MR^2 + 2mx^2}\omega$$

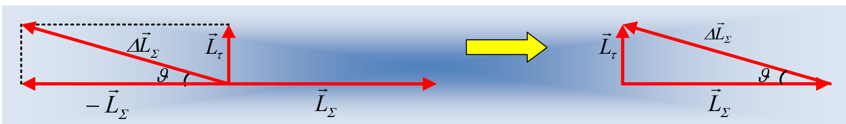
$$\omega_1 = \frac{2 \cdot 2^2}{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1} 0{,}5rad/s = 0{,}4rad/s.$$

Με διεύθυνση του άξονα z και φορά προς τα πάνω, ίδια με την κατεύθυνση της αρχικής στροφορμής του δίσκου.

iii) α) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί η στροφορμή του σώματος Σ, πριν και μετά την κρούση, καθώς και η μεταβολή της στροφορμής του, ως προς το κέντρο Ο του δίσκου. Το επίπεδο των στροφορμών αυτών είναι κατακόρυφο που περιλαμβάνει τον άξονα z και την αρχική στροφορμή L_Σ. Ας σημειωθεί ότι:



$$\Delta\vec{L}_\Sigma = \vec{L}_\tau - \vec{L}_\Sigma = \vec{L}_\tau + (-\vec{L}_\Sigma)$$



Για το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του Σ έχουμε:

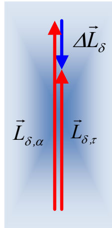
$$\Delta L_\Sigma = \sqrt{L_\Sigma^2 + L_\tau^2} = \sqrt{L_\Sigma^2 + (m\upsilon x)^2} = \sqrt{L_\Sigma^2 + (mx^2\omega_1)^2} \rightarrow$$

$$\Delta L_\Sigma = \sqrt{4^2 + (1 \cdot 1^2 \cdot 0{,}4)^2} kg \cdot m^2/s = 4{,}02kg \cdot m^2/s.$$

$$\text{Ενώ } \varepsilon\phi\theta = \frac{L_\tau}{L_\Sigma} = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1$$

β) Η μεταβολή της στροφορμής του δίσκου είναι:

$$\Delta\vec{L}_\delta = \vec{L}_{\delta,\tau} - \vec{L}_{\delta,\alpha\rho\chi}$$



Όπου και οι δύο αυτές στροφορμές, έχουν την διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω, οπότε:

$$\Delta L_\delta = I\cdot\omega_1 - I\omega = \tfrac{1}{2}\, MR^2(\omega_1-\omega)\rightarrow$$

$$\Delta L_\delta = \tfrac{1}{2}\, 2\cdot 2^2\ (0{,}4-0{,}5) kg\cdot m^2/s = -0{,}4\ kg\cdot m^2/s.$$

iv) Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής ενέργειας το επίπεδο του δίσκου, έχουμε για την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, που οφείλεται στην κρούση:

$$\Delta E_\mu = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda} = \left(\frac{1}{2} I_\delta \omega^2 + mgh\right) - \left(\frac{1}{2} I_{\delta,\Sigma}\omega_1^2\right)$$

Όπου $I_{\delta,\Sigma}$ η ροπή αδράνειας δίσκου-σώματος Σ $I_{\delta,\Sigma} = \frac{1}{2}MR^2 + mx^2$ και με αντικατάσταση:

$$\Delta E_\mu = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 + mgh\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mx^2\right)\omega_1^2 \rightarrow$$

$$\Delta E_\mu = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}2\cdot 2^2\cdot 0{,}5^2 J + 1\cdot 10\cdot 0{,}8 J\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2\cdot 2^2 + 1\cdot 1^2\right)\cdot 0{,}4^2 J = 8{,}1 J.$$

Σχόλια:

- Θα μπορούσαμε να μην ορίσουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρώντας ότι ο δίσκος έχει δυναμική ενέργεια E_o=MgH, αλλά τότε το Σ θα είχε αρχικά δυναμική ενέργεια $E_{0\Sigma}$=mg(H+h) και τελικά $E_{\tau,\Sigma}$=mgH. Αν κάνετε τις πράξεις εύκολα θα διαπιστώσετε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο…
- Για τον υπολογισμό της απώλειας της μηχανικής ενέργειας, πήραμε την αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος Σ. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την κινητική του ενέργεια ελάχιστα πριν την κρούση.
- Αξίζει να τονισθεί το τι γίνεται με την στροφορμή του σώματος Σ. Συνήθως σε ανάλογες ασκήσεις παίρνουμε μηδενική στροφορμή, αφού εφαρμόζουμε την ΑΔΣ ως προς τον άξονα z. Και αυτό είναι σωστό. Σωστό όμως επίσης είναι ότι ως προς το κέντρο Ο, το σώμα έχει στροφορμή, όπως υπολογίστηκε στο υποερώτημα i,α).

dmargaris@gmail.com