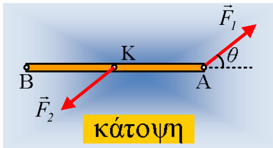
Ένα ζεύγος δυνάμεων και το έργο του.



Μια λεπτή οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους l=2m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή (t_0=0) στη ράβδο ασκούνται δύο αντιπαράλληλες δυνάμεις, με σταθερά μέτρα F_1=F_2=5N, οι οποίες σχηματίζουν διαρκώς με τον άξονα της ράβδου γωνία θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8. Η F_1 ασκείται στο άκρο Α και η F_2 στο μέσον της Κ της ράβδου.

i) Πόση κινητική ενέργεια έχει η ράβδος τη στιγμή t_1 που έχει περιστραφεί κατά γωνία φ=12rad;

ii) Πόσο είναι το έργο κάθε δύναμης μέχρι τη στιγμή t_1;

iii) Αν η ράβδος έχει μήκος l=2m και μάζα 6kg, να υπολογιστούν:

α) Οι αρχικές επιταχύνσεις των σημείων εφαρμογής Α και Κ των δύο δυνάμεων.

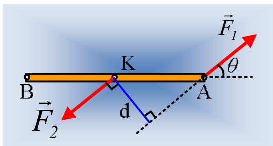
β) Η χρονική στιγμή t_1.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη στιγμή t_1.

δ) Το μέτρο της ταχύτητας του άκρου Α, καθώς και η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F_1, την παραπάνω στιγμή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I=(1/12)ml^2.

Απάντηση:



i) Οι δυο ασκούμενες δυνάμεις αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή:

$$\tau = F \cdot d$$

Όπου d η απόσταση των φορέων των δυνάμεων και με βάση το σχήμα:

$$d = \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{2m}{2} 0{,}6 = 0{,}6m \rightarrow$$

Η κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή t_1 ισούται με την ενέργεια που μεταφέρθηκε σε αυτήν μέσω του έργου της ροπής του ζεύγους:

$$K = W_\tau = \tau \cdot \varphi = (F \cdot d) \cdot \varphi$$

$$K = (F \cdot d) \cdot \varphi = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 12J = 36J.$$

ii) Κατά την επίδραση του ζεύγους των παραπάνω δυνάμεων το στερεό θα περιστραφεί γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Κ της ράβδου. Αλλά τότε το κέντρο μάζας της ράβδου Κ, σημείο εφαρμογής της δύναμης F_2, δεν μετατοπίζεται και W_{F2}=0. Κατά συνέπεια έργο παράγει μόνο η δύναμη F_1, οπότε:

$$W_{F1} = W_\tau = 36J.$$

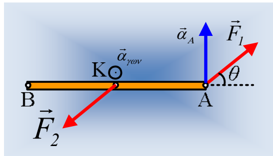
iii) Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση της ράβδου, μια μεταφορική και μια περιστροφική έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F_1 - F_2 = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = 0$

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot d = \frac{1}{12} m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{12 \cdot F \cdot d}{m\ell^2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 0{,}6}{6 \cdot 2^2} rad/s^2 = 1{,}5 rad/s^2.$$

Με διεύθυνση κατακόρυφη στο κέντρο Κ και φορά προς τα έξω, στο σχήμα.



α) Το άκρο Α της ράβδου, έχει επιτρόχια επιτάχυνση όπως στο σχήμα με μέτρο:

$$\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} = 1{,}5 \cdot \frac{2}{2} m/s^2 = 1{,}5 m/s^2.$$

Αντίθετα το σημείο Κ (σημείο εφαρμογής της δύναμης F_2) δεν αποκτά επιτάχυνση και παραμένει ακίνητο. (στο ερώτημα ii) αυτό το θεωρήσαμε γνωστό με βάση το σχολικό βιβλίο. Η απόδειξη βέβαια δίνεται υπολογίζοντας παραπάνω την $\alpha_{cm}=0$).

β) Παραπάνω υπολογίσαμε γωνιακή επιτάχυνση η οποία παραμένει σταθερή, αφού σταθερή παραμένει και η ροπή του ζεύγους. Αλλά τότε η ράβδος εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για την οποία, κατ΄ αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ισχύουν:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \quad (1)$$

$$\varphi = ½\, \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \quad (2)$$

Λύνοντας την (2) ως προς t βρίσκουμε για τη στιγμή t_1:

$$t = t_1 = \sqrt{\frac{2\varphi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{1{,}5}} s = 4s$$

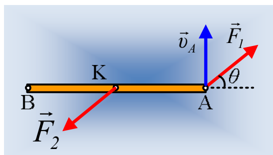
γ) Με αντικατάσταση στην (1) υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή t_1:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 1{,}5 \cdot 4 rad/s = 6 rad/s.$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι ίσος:

$$\frac{dK}{dt} = P_\tau = \tau \cdot \omega = F \cdot d \cdot \omega = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 6 J/s = 18 J/s$$

δ) Το άκρο Α τη στιγμή t_1, έχει ταχύτητα κάθετη στη ράβδο μέτρου:



$$\upsilon_A = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{\ell}{2} = 6 \cdot 1 m/s = 6 m/s$$

Ενώ η ισχύς της δύναμης F_1 είναι ίση:

$$P_{F1} = F_1 \cdot \upsilon_A \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - \theta) = F_1 \cdot \upsilon_A \cdot \eta\mu\theta = 5 \cdot 6 \cdot 0{,}6 W = 18 W.$$

Σχόλια:

1) Αξίζει να τονισθεί ότι η ισχύς της δύναμης F_1, είναι ίση με την ισχύ της ροπής του ζεύγους, αφού η F_2

δεν συνεισφέρει στην παραγωγή έργου, μιας και ασκείται στο κέντρο μάζας της ράβδου.

2) Στα σχήματα που σχεδιάστηκαν παραπάνω, η σανίδα εμφανίζεται στην ίδια θέση και για τη στιγμή t_0=0 και τη στιγμή t_1. Αυτό δεν είναι «αλήθεια» αφού η γωνία περιστροφής 12rad δεν είναι πολλαπλάσια του 2π… Απλά δεν μας ενδιέφερε ο προσανατολισμός και η ακριβής θέση, η οποία για να είναι 4π, θα έπρεπε να δοθεί χρόνος 4,093s και απλά θα δυσκόλευε τις πράξεις…

dmargaris@gmail.com