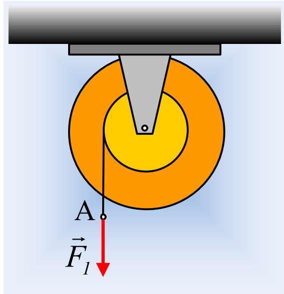
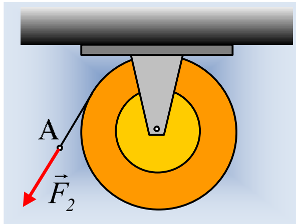
Έργα και ροπές σε μια τροχαλία

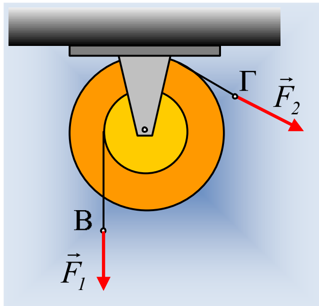
Η τροχαλία του σχήματος, αποτελείται από δύο κολλημένους ομοαξονικούς δίσκους με ακτίνες R και r=0,2m αντίστοιχα. Στον δίσκο ακτίνας r έχουμε τυλίξει αρκετές φορές ένα αβαρές μη εκτατό νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη μέτρου F_1=4N, όπως στο σχήμα. Τη στιγμή που το σημείο Α έχει κατέβει κατά h_1=2,5m, έχει ταχύτητα υ=1m/s.



i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στην τροχαλία μέσω της δύναμης F_1, καθώς και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας.



ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα τυλίγουμε το νήμα στο μεγάλο δίσκο και τραβάμε το άκρο Α πλάγια, ασκώντας σταθερή δύναμη F_2, η ροπή της οποίας ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας είναι τ_2=1,6N·m, μέχρι τη στιγμή t_2 που η τροχαλία ολοκληρώνει (8/π) περιστροφές. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη στιγμή t_2.



iii) Τυλίγουμε τώρα δύο παρόμοια νήματα, ένα στον μεγάλο και ένα στο μικρό δίσκο, ασκώντας τις ίδιες δυνάμεις F_1 και F_2 στα άκρα τους Β και Γ, όπως στο τρίτο σχήμα. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας τη στιγμή που το άκρο Β θα έχει μετακινηθεί κατά h_2=0,4m.

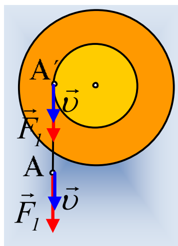
Απάντηση:

i) Η ενέργεια που μεταφέρεται στην τροχαλία, είναι ίση με το έργο της δύναμης F_1, το οποίο μεταφέρεται σε αυτήν μέσω του νήματος:

$$W_1=F_1\cdot h_1=4N\cdot 2{,}5m=10J.$$

Η παραπάνω ενέργεια θα ισούται και με την κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή αυτή, δηλαδή:

$$W_1=K_1=\frac{1}{2}I\omega_1^2$$



Όμως η ταχύτητα υ του σημείου Α, είναι ίση και με την ταχύτητα του σημείου Α΄ που το νήμα τυλίγεται στο μικρό δίσκο, συνεπώς με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων του δίσκου αυτού. Αλλά τότε η τροχαλία στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1, όπου $\upsilon=\omega_1\cdot r$, οπότε από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$W_1=\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}I\frac{\upsilon^2}{r^2}\rightarrow \quad I=\frac{2W_1\cdot r^2}{\upsilon^2}=\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}2^2}{1^2}kg\cdot m^2=0{,}8kg\cdot m^2.$$

ii) Με την ίδια λογική, η δύναμη F_2 μεταφέρεται μέσω του νήματος στην τροχαλία και το έργο της (ισοδύναμα το έργο της ροπής της που ασκείται στην τροχαλία) είναι ίση με την κινητική ενέργεια της τροχαλίας. Ισοδύναμα εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου ενέργειας για την τροχαλία παίρνουμε:

$$K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}=W_τ \rightarrow \frac{1}{2}I\omega_2^2 = W_2 \rightarrow \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \tau_2 \cdot \varphi \quad (2)$$

Όπου φ η γωνία κατά την οποία περιεστράφη η τροχαλία, ίση με:

$$\varphi = N \cdot 2\pi = \frac{8}{\pi}2\pi\ rad = 16rad$$

Έτσι από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\tau_2 \cdot \varphi}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 16}{0{,}8}}rad/s = 8rad/s$$

iii) Και στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις μεταφέρονται στην τροχαλία, μέσω των νημάτων, οπότε έχουμε δύο ροπές οι οποίες τείνουν να περιστρέψουν την τροχαλία. Η ροπή της F_1, μέτρου $τ_1=F_1r$ ή $τ_1=4·0,2Nm=0,8N·m$ αριστερόστροφη και η ροπή της F_2, μέτρου $τ_2=1,6N·m$ δεξιόστροφη. Αλλά τότε η τροχαλία θα περιστραφεί δεξιόστροφα κατά γωνία $\varphi_2 = \frac{h_2}{r} = \frac{0{,}4m}{0{,}2m} = 2rad$.

Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα έργου-ενέργειας για την τροχαλία παίρνουμε:

$$K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}=W_{τ1}+W_{τ2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I\omega_3^2 = -F_1h_1 + \tau_2 \cdot \varphi_2 \rightarrow$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2(\tau_2 \cdot \varphi_2 - F_1h_1)}{I}} = \sqrt{\frac{2(1{,}6 \cdot 2 - 4 \cdot 0{,}4)}{0{,}8}}rad/s = 2rad/s$$

Κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, στο κέντρο της τροχαλίας, με φορά προς τα μέσα.

Σχόλιο:

Μια δύναμη παράγει έργο, όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Έτσι στο i) ερώτημα η F_1 μετακίνησε προς τα κάτω το σημείο εφαρμογής της παράγοντας έργο $W_1=F_1h_1$. Όμως η μετατόπιση αυτή συνοδεύτηκε από περιστροφή της τροχαλίας κατά $Δφ=h_1/r$, οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε $W_1=F_1·r·Δφ=τ_1·Δφ$ και να αναφερθούμε στο έργο της ροπής της δύναμης F_1. Αυτό το κάναμε στο ii) ερώτημα, όπου θα μπορούσαμε να γράψουμε: $W_2=τ_2·φ_2=(F_2·R)·φ_2=F_2·(R·φ_2) = F_2·Δx$, όπου Δx η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

Να το πούμε αλλιώς. Ένα είναι το έργο και παράγεται από κάποια δύναμη. Στο στερεό πολλές φορές μας διευκολύνει η αντιμετώπιση με τη χρήση του όρου «έργο ροπής» χωρίς αυτό να σημαίνει ότι έχουμε διαφορετικό μέγεθος.

dmargaris@gmail.com