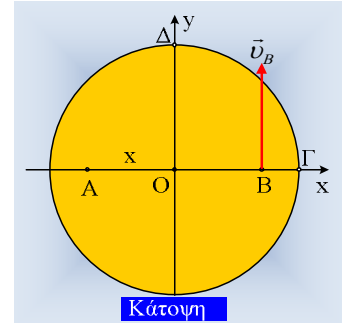


## Ένας δίσκος σε οριζόντιο επίπεδο

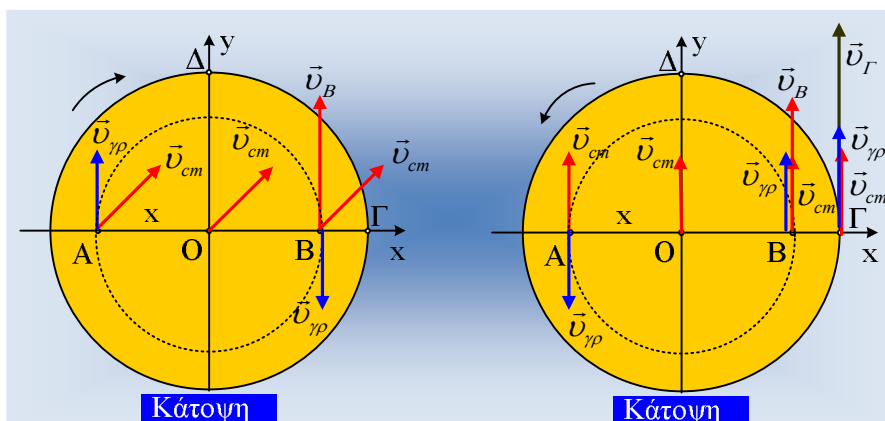
Ένας οριζόντιος δίσκος ακτίνας  $R=0,8\text{m}$  κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή  $t_0=0$ , βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τη στιγμή αυτή, το σημείο A του δίσκου, το οποίο απέχει κατά  $x=0,5\text{m}$  από το κέντρο O του δίσκου, έχει μηδενική ταχύτητα, ενώ το συμμετρικό του, ως προς το O σημείο B, έχει ταχύτητα μέτρου  $v_B=4\text{m/s}$ , στη διεύθυνση του άξονα y.



- i) Να βρεθούν η ταχύτητα του κέντρου O του δίσκου, καθώς και του σημείου Γ, στο άκρο της ακτίνας στη διεύθυνση x, τη στιγμή  $t_0$ .
- ii) Αν το σημείο Δ του σχήματος, στο άκρο της ακτίνας στη διεύθυνση y, τη στιγμή αυτή έχει επιτάχυνση μέτρου  $13\text{ m/s}^2$ , με κατεύθυνση προς το κέντρο O του δίσκου, ενώ την ίδια διεύθυνση έχει και η επιτάχυνση του κέντρου O του δίσκου, να υπολογιστούν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας O, καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- iii) Αν ο δίσκος διατηρεί σταθερές τις επιταχύνσεις του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων των σημείων A και Γ τη χρονική στιγμή  $t_1=10\text{s}$ , καθώς και ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου, μέχρι τη στιγμή αυτή.

### Απάντηση:

- i) Η κίνηση του δίσκου μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα  $v_{cm}$  του κέντρου μάζας O και μια περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος στρέφεται δεξιόστροφα, ενώ η ταχύτητα του O, είναι αυτή του πρώτου σχήματος.



Τότε η ταχύτητα του σημείο A θα είναι το διανυσματικό άθροισμα της  $\vec{v}_{cm}$  και της  $\vec{v}_{\gamma\rho}$ , οι οποίες έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα. Αλλά για να είναι μηδενική η ταχύτητα του A, αφού η γραμμική ταχύτητα, λόγω της κυκλικής κίνησης που πραγματοποιεί γύρω από το κέντρο O έχει τη διεύθυνση του άξονα y, την ίδια διεύθυνση (και αντίθετη φορά) πρέπει να έχει και η  $v_{cm}$ . Αλλά αν υποθέσουμε ότι η  $v_{cm}$  κατευθύνεται

προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $y$ , τότε το σημείο B, θα είχε ταχύτητα αντίθετη από την δοθείσα.

Για να έχουμε ταχύτητα του B όπως στο σχήμα θα πρέπει να στρέφεται ο δίσκος αριστερόστροφα και ταυτόχρονα η ταχύτητα  $v_{cm}$  να έχει φορά, όπως στο δεύτερο σχήμα. Αλλά τότε:

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} \rightarrow 0 = v_{cm} - \omega x \quad (1)$$

$$v_B = v_{cm} + v_{\gamma\rho} \rightarrow v_{cm} + \omega x = 4 \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2v_{cm} = 4 \text{ ή } v_{cm} = 2\text{m/s, οπότε } \omega = 4\text{rad/s.}$$

Ενώ το άκρο Γ της ακτίνας έχει ταχύτητα, όπως στο σχήμα, μέτρου:

$$v_\Gamma = v_{cm} + v_{\gamma\rho/A} = v_{cm} + \omega R = 2\text{m/s} + 4 \cdot 0,8\text{m/s} = 5,2\text{m/s.}$$

- ii) Αν το κέντρο μάζας O έχει επιτάχυνση στη διεύθυνση  $y$  και το σημείο Δ εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης θα έχει την ίδια επιτάχυνση  $a_{cm}$ . Επιπλέον το σημείο Δ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης παρουσιάζει κεντρομόλο επιτάχυνση με φορά προς το O, μέτρου:

$$a_\kappa = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0,8\text{m/s}^2 = 12,8 \text{ m/s}^2.$$

Το σημείο Δ, θα μπορούσε να έχει και επιτροχία επιτάχυνση μέτρου  $a_\epsilon = a_{\gamma\omega\kappa} R$ , στην περίπτωση που ο δίσκος είχε γωνιακή επιτάχυνση. Αλλά τότε η επιτάχυνση του Δ δεν θα είχε τη διεύθυνση του άξονα  $y$ , αλλά άλλη διεύθυνση. Συνεπώς ο δίσκος δεν επιταχύνεται στροφικά και στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Αλλά αφού  $a_\Delta = 1,28\text{m/s}^2 > a_\kappa$  και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας  $a_{cm}$  έχει την ίδια κατεύθυνση με την κεντρομόλο, όπως στο σχήμα. Οπότε:

$$a_\Delta = a_{cm} + a_\kappa \rightarrow a_{cm} = a_\Delta - a_\kappa = 13\text{m/s}^2 - 12,8\text{m/s}^2 = 0,2\text{m/s}^2.$$

- iii) Από τη στιγμή που ο δίσκος δεν επιταχύνεται στροφικά διατηρεί σταθερή την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του, οπότε σε χρονικό διάστημα  $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$  έχει διαγράψει γωνία:

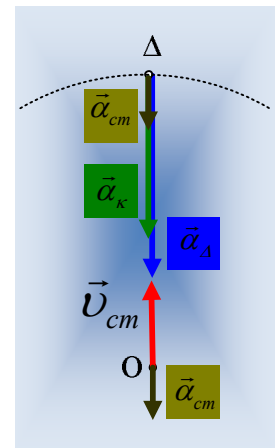
$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t = 4 \cdot 10\text{rad} = 40 \text{ rad}$$

Αλλά τότε έχει πραγματοποιήσει:

$$N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} \approx 6,4 \text{ περιστροφές.}$$

Όσον αφορά όμως τη μεταφορική του κίνηση, πρόκειται για μια ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (επιβραδυνόμενη) για την οποία έχουμε:

$$v_{cm} = v_{cm,0} - a_{cm} t_1 = 2\text{m/s} - 0,2 \cdot 10\text{m/s} = 0$$



Αλλά τότε τη στιγμή αυτή, τα σημεία Α και Γ έχουν ταχύτητες μόνο εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του δίσκου με μέτρα:

$$v_{A,I} = \omega \cdot x = 4 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_{\Gamma,I} = \omega \cdot R = 4 \cdot 0,8 \text{ m/s} = 3,2 \text{ m/s}$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)