ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΓΕΝΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΥΤΙΛΗΝΗ 24/5/11
ΕΞΕΤΑΣΤΕΣ :

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(μονάδες 10)

Β) Γράψτε τον τύπο , που υπολογίζει τον συντελεστή διεύθυνσης λ , μιας ευθείας , που διέρχεται από τα σημεία Α(x_1,y_1) και Β(x_2,y_2) με $x_1 \neq x_2$.

(μονάδες 5)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.

β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$.

γ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του Α(x_1,y_1) , έχει εξίσωση $x.\ y + x_1.y_1=\rho^2$

δ. Η παραβολή $y^2=2px$ έχει εστία το σημείο Ε(p,0)

ε. Η εξίσωση $x^2-y^2=\alpha^2$ με $\alpha \neq 0$, είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

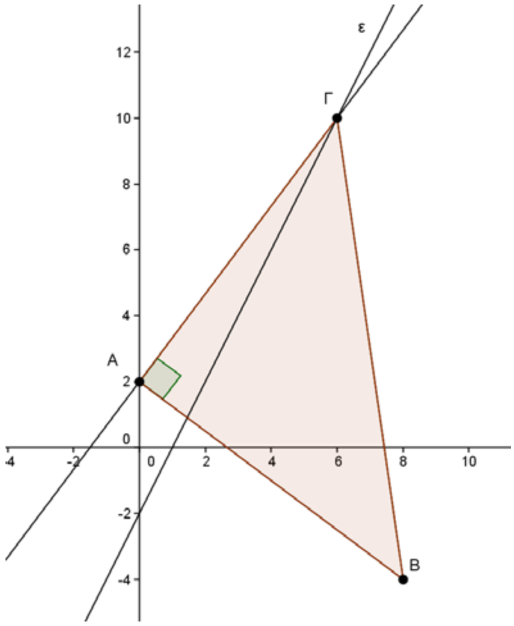
$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1,-2) \quad \text{και} \quad 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7,6)$$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (1,3)$ (μονάδες 8)

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k , ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι παράλληλα. (μονάδες 9)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\left|\vec{\alpha} + x.\vec{\beta}\right| = 5$ (μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^o



Θεωρούμε τα σημεία Α(0,2) και Β(8,-4).
Η κάθετη στην ΑΒ στο Α τέμνει την ευθεία (ε): $y=2x-2$ στο σημείο Γ.
α) Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΒ (μονάδες 5)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ (μονάδες 5)
γ) Να δείξετε ότι το Γ έχει συντεταγμένες Γ(6,10) (μονάδες 5)
δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (μονάδες 5)
ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-6\alpha x-8\alpha y=0$ (1) με α πραγματικός διάφορος του 0.
α) Δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α , διάφορο του 0, η (1) παριστάνει κύκλο, ο οποίος περνά από την αρχή των αξόνων Ο. (μονάδες 6)
β) Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων, (μονάδες 8)
γ) Δείξτε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων , βρίσκονται σε ευθεία , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (μονάδες 6)
δ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R^*$, έτσι ώστε, αν Α , Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία (ε): $y=x+1$, να ισχύει $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$
(μονάδες 5)

Απαντήστε σε όλα τα θέματα.
Κάθε επιτυχία!

Η ΔΝΤΡΙΑ ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α . σελ 34-35 σχολικού

Β. σελ 59 σχολικού

Γ. α-Σ , β-Λ , γ-Λ , δ-Λ , ε-Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. λύνω το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,-2)\\ 3\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,6)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(2,1)\ ,\ \vec{\beta}=\vec{\alpha}-(1,-2)=(1,3)$$

$$4\vec{\alpha}=(8,4)$$

ή

θέτω $\vec{\alpha}=(x_{\alpha},y_{\alpha})$, $\vec{\beta}=(x_{\beta},y_{\beta})$ και έχω:

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,-2)\Leftrightarrow(x_{\alpha}-x_{\beta},y_{\alpha}-y_{\beta})=(1,-2)\Leftrightarrow x_{\alpha}-x_{\beta}=1$ και $y_{\alpha}-y_{\beta}=-2$

$3\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(7,6)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 3x_{\alpha}+x_{\beta}=7$ και $3y_{\alpha}+y_{\beta}=6$

από όπου εύκολα προκύπτει $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(1,3)$

β) $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(2\kappa+1,\kappa+3)$ $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,-2)$ οπότε

$$(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})//(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow \det((\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}),(\vec{\alpha}-\vec{\beta}))=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2\kappa+1 & \kappa+3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\kappa-2-\kappa-3=0\Leftrightarrow 5\kappa=-5\Leftrightarrow\kappa=-1$$

ή

$$\lambda_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}=\frac{-2}{1}=-2$$

αν κ=-$\frac{1}{2}$ τότε $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(0,\frac{5}{2})$ οπότε $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\not\parallel(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

αν $\kappa\neq-\frac{1}{2}$ τότε $\lambda_{\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}}=\frac{\kappa+3}{2\kappa+1}$

θέλω $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})//(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow\lambda_{\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}}=\lambda_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\Leftrightarrow\frac{\kappa+3}{2\kappa+1}=-2\Leftrightarrow\kappa+3=-4\kappa-2\Leftrightarrow\kappa=-1$

$\vec{\alpha}+x\vec{\beta}=(2+x,1+3x)$

γ) $\left|\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right|=5\Leftrightarrow\sqrt{(2+x)^2+(1+3x)^2}=5\Leftrightarrow(2+x)^2+(1+3x)^2=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+9x^2+6x+1=25\Leftrightarrow 10x^2+10x-20=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1, x=-2$

ή

$\left|\vec{a}+x\vec{\beta}\right|=5\Leftrightarrow\left|\vec{a}+x\vec{\beta}\right|^2=25\Leftrightarrow(\vec{a}+x\vec{\beta})^2=25\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}x\vec{\beta}+x^2\vec{\beta}^2=25\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}x+x^2|\vec{\beta}|^2-25=0$, όμως $|\vec{\alpha}|=\sqrt{5}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{10}$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}=(2,1)(1,3)=5$

οπότε καταλήγω πάλι στην εξίσωση $10x^2+10x-20=0$........

ΘΕΜΑ 3^o

α) $AB=\sqrt{(8-0)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

β)

$\lambda_{AB}=\dfrac{-4-2}{8-0}=\dfrac{-3}{4}$

$A\Gamma\perp AB$ άρα $\lambda_{A\Gamma}\lambda_{AB}=-1$ άρα $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{4}{3}$

Η ΑΓ περνά από το Α(0,2) και έχει συντελεστή $\dfrac{4}{3}$, άρα θα έχει εξίσωση

$y-2=\dfrac{4}{3}(x-0)\Leftrightarrow 3y-4x=6$

γ) Το Γ ανήκει συγχρόνως στην ΑΓ και στην (ε) άρα οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων τους.

$$\left.\begin{array}{l}y=2x-2\\3y-4x=6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=2x-2\\3(2x-2)-4x=6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=2x-2\\2x=12\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=10\\x=6\end{array}\right\}$$

Άρα πράγματι Γ(6,10)

δ) $A\Gamma=\sqrt{(10-2)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=10=AB$ άρα ΑΒΓ ισοσκελές.

ε) (ΑΒΓ)=$\dfrac{1}{2}.AB.A\Gamma=\dfrac{1}{2}.10.10=50$τμ (ή φυσικά με τον τύπο $\dfrac{1}{2}\,|\,\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\,|$)

ΘΕΜΑ 4^o

α) Η (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με Α=-6α , Β=-8α και Γ=0. επειδή $A^2+B^2-4\Gamma=100\alpha^2>0$ αφού $\alpha\neq0$ η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha\neq0$. Το (0,0) επαληθεύει την (1) για κάθε $\alpha\neq0$ άρα οι παραπάνω κύκλοι περνάνε από την αρχή των αξόνων.

β) Οι κύκλοι αυτοί έχουν κέντρο $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$=(3α,4α) και ακτίνα

ρ=$\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{100\alpha^2}}{2}=\frac{10|\alpha|}{2}=5|\alpha|$

γ) Έστω Κ(x,y) οπότε $\left.\begin{array}{l} x=3\alpha \\ y=4\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=\frac{x}{3} \\ y=\frac{4}{3}x \end{array}\right\}$ άρα τα κέντρα των κύκλων

βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση y=$\frac{4}{3}$x , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Τα Α,Β,Ο ανήκουν στον κύκλο. Επειδή $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow \widehat{AOB}=90^\circ$, άρα η ΑΒ θα είναι διάμετρος του κύκλου και επομένως το κέντρο του Κ θα ανήκει στην ΑΒ δηλ στην y=x+1. Άρα οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Δηλαδή 4α=3α+1 $\Leftrightarrow$ α=1.

ή διαφορετικά

Οι συντεταγμένες των Α,Β θα βρεθούν από την λύση του συστήματος της ευθείας και του κύκλου.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6ax-8ay=0 \\ y=x+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+(x+1)^2-6ax-8a(x+1)=0 \\ y=x+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^2+(2-14a)x-8a+1=0 \\ y=x+1 \end{array}\right\}$$

Το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσον του ΑΒ με συντεταγμένες

$K(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$ από όπου προκύπτει ότι $\frac{x_A+x_B}{2}=3\alpha \Leftrightarrow x_A+x_B=6\alpha$.

Από τύπους Vieta όμως έχω $x_A+x_B=-\frac{(2-14\alpha)}{2}=7\alpha-1$ οπότε 7α-1=6α $\Leftrightarrow$ α=1