

4<sup>ο</sup> ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ

Γραπτές απολυτήριες εξετάσεις περιόδου Μαΐου-Ιουνίου 2011

Μάθημα : Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Τάξη : Γ'

Ημερομηνία : 19-5-2011

Εξεταστής :

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A.1 Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 9

A.2 Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 6

A.3 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει :  $|z|^2 = z^2$

β) Αν  $0 < a < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

γ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

δ) Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

ε) Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .  
Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύει  $10z = (6-8i)w$ .

α) Να αποδείξετε ότι :  $|z| = |w|$

Μονάδες 5

β) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,2)$  και ακτίνα  $\rho=1$  να βρείτε :

i) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $w$

Μονάδες 10

ii) τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του  $|z|$ .

Μονάδες 10

**Θέμα 3°**

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 4}$  . Να βρείτε:

α) την  $f'(x)$

Μονάδες 6

β) τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

Μονάδες 4

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης στο A

Μονάδες 6

δ) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τους άξονες.

Μονάδες 9

**Θέμα 4°**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει:  $f(0)=1$  και  $f'(x)+f(x) = \frac{2x+2}{e^x}$ .

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

Μονάδες 10

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \leq x+1$  για κάθε  $x \geq -1$ .

Μονάδες 6

Ο Διευθυντής

Ο καθηγητής