ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ
Γ ΤΑΞΗ ΤΜΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤ….: ……………………………………………
ΜΥΤΙΛΗΝΗ 19/10/09
Εξεταστής:

ΘΕΜΑ 1^{O}

i) Να αποδείξετε ότι $i^{\nu}=i^{\upsilon}$, όπου υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του φυσικού ν με το 4.

(μονάδες 5)

ii) Τι ονομάζουμε φανταστικό μέρος του z , αν $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$;

(μονάδες 5)

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λάθος:

iii) Το μέτρο του αθροίσματος δύο μιγαδικών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους.

iv) $|z|^2=z^2$ για κάθε μιγαδικό z.

v) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς.

vi) Η εξίσωση $|z-z_1|-|z-z_2|=0$ παριστάνει κλάδο υπερβολής με εστίες τις εικόνες των z_1,z_2.

vii) $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$

(5x3=15 μονάδες)

ΘΕΜΑ $2^{Ο}$

Δίνεται η εξίσωση x^2-αx+β=0 με α,β $\in \mathbb{R}$ και $α^2$<4β.

i) Να εξετάσετε αν η εξίσωση έχει λύσεις στο C.

(μονάδες 5)

ii) Αν z_1,z_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης τότε $2Re(z_1)=α$ και $|z_2|^2=β$

(μονάδες 5)

iii) Αν ο $z_1=1+i$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης να βρεθεί ο α και ο β.

(μονάδες 5)

iv) Αν z_2 είναι η άλλη λύση της εξίσωσης , να υπολογισθεί η παράσταση

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}$$

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ $3^{Ο}$

Δίνονται οι μιγαδικοί α,β,z με $α \neq β$ και |α|=|β|=1.

i) Να δείξετε ότι $\overline{α}=\frac{1}{α}$

(μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι ένας αριθμός z είναι φανταστικός , αν και μόνον αν $\overline{z}=-z$

(μονάδες 8)

iii) Να δείξετε ότι ο $w=\frac{z+αβ\overline{z}-α-β}{α-β}$ είναι φανταστικός.

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^{O}

Δίνεται η συνάρτηση f με f(z)=$\dfrac{z+2i}{\bar{z}-2i}$ με $z\in C$ και $z\neq -2i$.

A. i) Να δείξετε ότι $|f(z)|=1$

(μονάδες 5)

ii) Αν $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ τότε δείξετε ότι ο z είναι φανταστικός.

(μονάδες 5)

B. i) Να αποδείξετε ότι ο $z_o=2i^{2007}-2f(i)$ έχει εικόνα το σημείο A(2,-2)

(μονάδες 5)

ii) Να δείξετε ότι οι εικόνες των w για τους οποίους ισχύει

$$|w+z_o|=\left|\frac{i.f(z_o).z_o}{1+i\sqrt{3}}\right|$$

βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(μονάδες 5)

iii) Να βρεθεί το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο του w.

(μονάδες 5)

Απαντήστε σε όλα τα θέματα

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑ 1^{O}

i) $i^{\nu}=i^{4\pi+\upsilon}=i^{4\pi}i^{\upsilon}=(i^{4})^{\pi}i^{\upsilon}=1^{\pi}i^{\upsilon}=i^{\upsilon}$

ii) φανταστικό μέρος του z ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός β (και όχι το βi).

iii) Λ (το μέτρο της διαφοράς …..)

iv) Λ $|z|^2=z.\bar{z}$ (θα ήταν Σ μόνον αν ο z ήταν πραγματικός)

v) Λ (μόνον αν Δ<0)

vi) Λ (είναι μεσοκάθετος)

vii) Σ

ΘΕΜΑ 2^{O}

i) $\Delta=\alpha^2-4\beta<0$ άρα η εξίσωση έχει 2 λύσεις μιγαδικές συζυγείς

ii) $S=\alpha=z_1+z_2=2Re(z_1)$ και $P=\beta=z_1.z_2=z_2.\overline{z_2}=|z_2|^2$.

iii) $|z_1|^2=2$ άρα β=2

$2Re(z_1)=\alpha$ άρα α=2

iv) η άλλη λύση είναι η συζυγής της 1+Ι δηλ η 1-i άρα

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=[(1+i)^2]^{1005}+[(1-i)^2]^{1005}=$$
$$=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

ΘΕΜΑ 3^{O}

i) $|\alpha|^2=1\Leftrightarrow|a|^2=1\Leftrightarrow a\bar{a}=1\overset{\substack{\alpha\neq 0\\ \alpha\phi o\upsilon\\ |\alpha|=1}}{\Leftrightarrow}\bar{a}=\frac{1}{a}$

ii) $\bar{z}=-z\Leftrightarrow\bar{z}+z=0\Leftrightarrow 2Re(z)=0\Leftrightarrow z\in I$

iii) αρκεί $\overline{w} = -w$

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z + a\beta\overline{z} - a - \beta}{a - \beta}\right)} = \frac{\overline{\left(z + a\beta\overline{z} - a - \beta\right)}}{\overline{(a - \beta)}} = \frac{\overline{z} + \overline{a\beta\overline{z}} - \overline{a} - \overline{\beta}}{\overline{a} - \overline{\beta}} =$$

$$= \frac{\overline{z} + \overline{\alpha}\overline{\beta}z - \overline{a} - \overline{\beta}}{\overline{a} - \overline{\beta}} = \frac{\overline{z} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}z - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha\beta\overline{z} + z - a - \beta}{\beta - \alpha} = -w$$

ΘΕΜΑ 4^{O}

A

i) $\left|\frac{z + 2i}{\overline{\overline{z}} - 2i}\right| = \frac{|z + 2i|}{|\overline{z} - 2i|} = \frac{|z + 2i|}{|\overline{z + 2i}|} = \frac{|z + 2i|}{|z + 2i|} = 1$

ii)

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z}) \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z + 2i}{\overline{\overline{z}} - 2i}\right)} = \frac{\overline{z} + 2i}{z - 2i} \Leftrightarrow \frac{\overline{z + 2i}}{\overline{\overline{\overline{z}} - 2i}} = \frac{\overline{z} + 2i}{z - 2i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{z} - 2i}{z + 2i} = \frac{\overline{z} + 2i}{z - 2i} \Leftrightarrow \cancel{z\overline{z}} - 2iz - 2i\overline{z} - \cancel{4} = \cancel{z\overline{z}} + 2iz + 2i\overline{z} - \cancel{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4iz + 4i\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in I$$

B

i) έχω $f(i) = \frac{i + 2i}{\overline{i} - 2i} = \frac{3i}{-i - 2i} = \frac{3i}{-3i} = -1$ και $i^{2007} = i^{4.501+3} = i^3 = -i$ άρα $z_o = 2-$

2i άρα η εικόνα του είναι το Α.

$$f(z_o) = f(2-2i) = \frac{2-2i+2i}{\overline{2-2i}-2i} = \frac{2}{2+2i-2i} = 1$$

ii) $\quad i.f(z_o)z_o = i.1.(2-2i) = 2+2i$

$$\left|\frac{i.f(z_o)z_o}{1+i\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{2+2i}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

οπότε έχουμε $|w+2-2i|=\sqrt{2}$ δηλ $|w-(-2+2i)|=\sqrt{2}$ άρα η εικόνα του w κινείται σε κύκλο κέντρου Β(-2,2) , που είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων, και ακτίνας $\sqrt{2}$.

iii) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η ελάχιστη τιμή του μέτρου w είναι η ΟΚ=ΟΒ-R=$\sqrt{8}-\sqrt{2}$ ενώ η μέγιστη τιμή είναι η ΟΛ=ΟΒ+R=$\sqrt{8}+\sqrt{2}$