ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΥΤΙΛΗΝΗ 26/5/08
ΕΞΕΤΑΣΤΕΣ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α) Έστω Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Να δειχθεί ότι ο κύκλος με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$.

(9 μονάδες)

Β) Γράψτε την εξίσωση της παραβολής C

ι) με εστία $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα την δ: $x=-\frac{p}{2}$ $(p\neq 0)$

ιι) με εστία $E(0,\frac{p}{2})$ και διευθετούσα την δ: $y=-\frac{p}{2}$ $(p\neq 0)$

(2x3=6 μονάδες)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$

β) η εξίσωση $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$ παριστάνει υπερβολή

γ) Κάθε ευθεία που περνά από το $A(x_o,y_o)$ έχει εξίσωση της μορφής
$y-y_o=\lambda(x-x_o)$.

δ) αν $\vec{\alpha},\vec{\beta} \nparallel yy'$ τότε ισχύει $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$

ε) Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$ με α>β έχει εστίες στον άξονα xx'.

(5x2=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{O}

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=2$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$

ι) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=3$

(9 μονάδες)

ιι) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$

(8 μονάδες)

ιιι) Να δείξετε ότι $\vec{a}=3\cdot\vec{\beta}$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^{O}

Έστω (ε) η ευθεία που τέμνει τους άξονες στα Α(α,0) με $\alpha\neq 0$ και Β(0,2).

ι) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $\frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1$

(9 μονάδες)

ιι) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ(-2,1) να βρεθεί το Εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες .

(7 μονάδες)

ιιι) Να βρεθεί η απόσταση της αρχής των αξόνων Ο(0,0) από την ευθεία (ε) του ιι) ερωτήματος .

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^{O}

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda x-8\lambda y=0$ $^{(1)}$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(6 μονάδες)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

(7 μονάδες)

γ) Να δειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

(4 μονάδες)

δ) Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους τέμνεται από την ευθεία (η) : y=x+6 στα σημεία Α , Β ώστε $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

(8 μονάδες)

Απαντήστε σε όλα τα θέματα .

Καλή επιτυχία!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Σχολικό σελ 81,82

Β ι) , ιι). σχολικό σελ 91

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Σ	Λ

ΘΕΜΑ 2^O

$\iota)\ \vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-2\vec{\gamma}\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(-2\vec{\gamma}\right)^2$

$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}.\vec{\beta}=4\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}.\vec{\beta}=4|\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^2+1^2+2\vec{\alpha}.\vec{\beta}=4.2^2 \Leftrightarrow 9+1+2\vec{\alpha}.\vec{\beta}=16 \Leftrightarrow \vec{\alpha}.\vec{\beta}=3$

ιι) $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=3=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

ιιι) αφού $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ υπάρχει θετικός πραγματικός λ , ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ οπότε

$|\vec{\alpha}|=|\lambda||\vec{\beta}| \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} 3=\lambda.1 \Leftrightarrow \lambda=3\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \vec{\alpha}=3\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 3^o

ι) Αφού η (ε) διέρχεται από τα σημεία Α(α,0) με α$\neq$0 και Β(0,2) έχει εξίσωση της μορφής

$$y-0=\frac{2-0}{0-a}(x-a) \Leftrightarrow y=\frac{2}{a}x-2 \Leftrightarrow \frac{y}{2}=\frac{x}{a}-1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{2}=1^{(1)}$$

ιι) Αφού το Μ(-2,1) ανήκει στην (ε) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν, άρα $\frac{-2}{a}+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{-2}{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=-4$. Άρα η (ε) τέμνει τους άξονες στα Α(-4,0) και Β(0,2). Το ζητούμενο εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από τον τύπο: Ε= $\frac{OA.OB}{2}=\frac{|-4|.|2|}{2}=4$τ.μ.

ιιι) η (1) γράφεται ισοδύναμα 2x-4y+8=0$^{(2)}$. άρα από τον τύπο της απόστασης του O(0,0) από την (2) έχω:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2.0-4.0+8|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|8|}{\sqrt{20}}=\frac{8\sqrt{20}}{20}=\frac{2\sqrt{20}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

ΘΕΜΑ 4^o

α) η (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με A=-4λ , B=-8λ και Γ=0 που παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow (-4\lambda)^2+(-8\lambda)^2-4.0=80\lambda^2\geq 0$ άρα η (1) παριστάνει κύκλο όταν το $\lambda\neq 0$

β) το κέντρο των παραπάνω κύκλων είναι το $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ δηλ το K(2λ,4λ) . Έστω K(x,y) οπότε x=2λ με $x\neq 0$ και y=4λ με $y\neq 0$ αφού $\lambda\neq 0$ άρα $\lambda=\frac{x}{2}$ $y=4\frac{x}{2}=2x$ δηλαδή τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=2x , χωρίς όμως το σημείο O(0,0).

γ) Οι συντεταγμένες του O(0,0) επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda\neq 0$ αφού $0^2+0^2-4\lambda.0-8\lambda.0=0 \Leftrightarrow 0.\lambda=0$ όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το O(0,0)

δ) τα A, B καθώς και το O ανήκουν στον κύκλο. Επειδή όμως $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ (και A ,B δεν ταυτίζονται με το O αφού τα A,B ανήκουν στην y=x+6 όχι όμως και το O) άρα $\widehat{AOB}=90^\circ$ δηλαδή AB διάμετρος άρα το κέντρο του κύκλου θα ανήκει στην ευθεία (η) δηλαδή 4λ=2λ+6 ⇔ λ=3 . Άρα με την y=x+6 τέμνεται ο κύκλος $x^2+y^2-12x-24y=0$ ώστε $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$.

Θα μπορούσαμε βέβαια να λύσουμε το σύστημα ευθείας κύκλου , να βρούμε τις συντεταγμένες των A , B με παράμετρο λ και από την σχέση $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ να υπολογίσω το λ.