

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> : Α.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με Σωστό ή Λάθος

- 1) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  στο οποίο η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 2) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$ , τότε υπάρχει

$$\xi \in (a, \beta) \text{ ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

(μονάδες 16)

**Β.** Διατυπώστε το θεώρημα Μέσης Τιμής δώστε την γεωμετρική του ερμηνεία

(μονάδες 14)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> :** Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή δεύτερη παράγωγο και  $f(2)f(4) \neq 0$ . Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon): f'(4)x - \frac{f(2)}{f(4)}y + 2011 = 0$ .

Να αποδείξετε ότι :

- 1)  $f(2)f'(2) = f(4)f'(4)$

2) υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (2, 4)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi)f''(\xi) + (f'(\xi))^2 = 0$

3) η εξίσωση  $xf'(x)f''(x) + 1 - x = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα  $(0, 4)$ .

(μονάδες  $10+15+10=35$ )

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** : Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$ . Επίσης ισχύει  $f'(1) = 1$  και η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$  έχει εξίσωση  $\psi = 2x + 1$ .

**A)** Να βρείτε τις τιμές  $f(0), f'(0)$

**B)** Να αποδείξετε ότι  $2 < f(1) < 3$

**Γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, 1)$  ώστε  
$$(2 - 3\xi)f(\xi) = f(1 - \xi) - 4\xi$$

(μονάδες  $8+14+13=35$ )