

ΘΕΜΑ 1

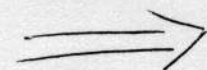
- Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$ (Μον 10)
- Β. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (Μον 5)
- Γ. Προτάσεις Σωστό - Λάθος :

1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ Σ Λ
2. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα Σ Λ
3. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$ Σ Λ
4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο (α, β) , τότε η f παίρνει στο (α, β) για τευχόν τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m Σ Λ
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 Σ Λ
(Μον 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{x^2 - 1}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (Μον 5)
- β) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{4}$ (Μον 10)
- γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Μον 10)



ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 2\ln x}{x}, & x > 0 \\ \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{και } g(x) = \frac{\sqrt{3 + f^2(x)} - 2}{f(x) - 1}$$

α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (Μον 8)

β) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$ (Μον 8)

γ) Έστω h μια συνάρτηση για την οποία ισχύει για κάθε x κοντά στο μηδέν:

$$x^3 + \ln^2 x \leq x^2 \cdot h(x) \leq 2x^2 \cdot g(x)$$

Να υπολογίσει το $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ (Μον 9)

ΘΕΜΑ 4°

Έστω h συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$2 \ln(x-1) \leq (x-1) \cdot f(x) \leq x^2 - 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x} = 3 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1)$$

α) Δείξτε ότι $f(0) = -2$ (Μον 5)

β) Δείξτε ότι $f(1) = 2$ (Μον 5)

γ) Αν $g(x) = -f(x) - \ln x - 3$, $x \in (0, 1)$
Δείξτε ότι g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της g (Μον 8)

δ) Να δείχθει ότι η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-f(x)-3}$ τέφνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο ξ τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ (Μον 7)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ