ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Αν $z \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ β. $|z^2| = z^2$ γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$ ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Γ. Να βρεθούν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{22} =$$

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{18} =$$

$$i^3 - i^4 + i^5 - \ldots + i^{2\nu-1} =$$

Μονάδες 6

Δ. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = (\alpha + 1) + (2\alpha - 3)i$ να ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2°

Έστω η συνάρτηση f με $f(z) = \dfrac{(z - i)\cdot(\bar{z} + i)}{z + \bar{z}}$, $z \in \mathbb{C}$ και $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.

Α. Να δείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$.

Μονάδες 8

Β. Να δείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{-iz}\right) \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

$$\operatorname{Re} f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(f\left(\frac{i}{z}\right)\right) + 2\operatorname{Re}(z)$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3°

Α.

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει: $|2z-5| = |4-z|$

Μονάδες 4

ii). Αν οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ έχουν τις εικόνες τους στον προηγούμενο γ.τ να αποδείξετε ότι: $|z_1 - z_2| \leq 2$

Μονάδες 7

Β. Αν στο $\mathbb{C}^*$ ισχύει η ισότητα $|z-u| = |z| + |u|$ να δειχτεί ότι $\mathrm{Re}(\frac{z}{u}) < 0$

Μονάδες 7

Γ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $|z|^5 = |iz^5 + 4|$. Να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z^5) = 2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Θεεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = |i - z|$, όπου $z \in \mathbb{C}$, και τους μιγαδικούς που ικανοποιούν τη σχέση $f(z) = 2f(-z)$ (1).

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ αυτών των μιγαδικών.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $\left|z + \frac{5}{3}i\right| = \frac{4}{3}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την (1).

Μονάδες 5

γ) Ποιος από τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει η (1) έχει το μικρότερο και ποιος το μεγαλύτερο μέτρο.

Μονάδες 4

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = z + 5$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί την (1). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Ν του μιγαδικών $g(z)$

Μονάδες 5

ε) Αν $w_1 = z_1 + \frac{5}{3}i, w_2 = z_2 + \frac{5}{3}i, w_3 = z_3 + \frac{5}{3}i$, όπου z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1) με $z_1 + z_2 + z_3 = 1 - 5i$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} = \frac{9}{16}$

Μονάδες 6