ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Θέμα 1

1. Ποιο σημείο ενός καρτεσιανού επιπέδου λέγεται εικόνα του μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$;

Μονάδες 0,5

2. Έστω ότι $z=\alpha+\beta i$ και $z_1=\gamma+\delta i$.

Να συμπληρώσετε την ισοδυναμία: $z=z_1 \Leftrightarrow$

Μονάδες 0,5

3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μιγαδικών αριθμών. Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Μονάδες 2

4. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\in\Re$, τότε να γράψετε τον μιγαδικό $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ με τη μορφή $x+yi$, $x,y\in\Re$.

Μονάδες 1

5. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του i^{ν}, ν θετικός ακέραιος. Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Μονάδες 3

6. Να αποδείξετε ότι : $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Μονάδες 3

7. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \ldots\ldots\ldots$

2) $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu} = \ldots$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \ldots\ldots\ldots$

4) $\overline{\nu \cdot z} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \nu\in N$

5) $\left(\overline{z}\right)^{\nu} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \nu\in N$

6) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \ldots\ldots\ldots$

7) $\overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \ldots\ldots\ldots$

Μονάδες 3,5

Ο αριθμός $z=(1+3i)^4-(-1+3i)^4$ είναι:

Α. Φανταστικός Β. Μηδέν

Γ. Πραγματικός Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

Μονάδες 4

Β. Για κάθε μιγαδικό z=α-βi, $\alpha,\beta\in\Re$ ισχύει:

1.	$\|z\|=\alpha^2+\beta^2$	Σ	Λ
2.	$\|z^2\|=\|z\|^2$	Σ	Λ
3.	$z\cdot\bar{z}=z^2$	Σ	Λ
4.	$\|z+2i\|^2=z^2+4$	Σ	Λ
5.	$\|z\|=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$	Σ	Λ
6.	$z\cdot\bar{z}=\|z\|$	Σ	Λ
7.	$\|z^2\|=z^2$	Σ	Λ
8.	$z\cdot\bar{z}=\|z\|^2$	Σ	Λ
9.	Αν η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με ακτίνα 2, τότε $\|z\|=2$	Σ	Λ
10.	Αν $\|z\|=3$, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με ακτίνα 3.	Σ	Λ

Μονάδες 5

Γ. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z που αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

Συνθήκη		**Ευθεία**	
Α.	$\|z-i\|=\|z+3i\|$	α.	$y=x$
Β.	$\|z-1\|=\|z+3\|$	β.	x=-1
Γ.	$\|z-2\|=\|z-2i\|$	γ.	y=-1
		δ.	$y=-x$
		ε.	$x'x$

Μονάδες 3

Δ. 1) Να λύσετε την εξίσωση $(z^2+1)(z^2-z+1)=0$ **Μονάδες 4**

2) Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2-z+1=0$, τότε:

α) να βρείτε την εικόνα του μιγαδικού $z_1^2-z_1+1$ **Μονάδες 1**

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$ **Μονάδες 3**

8. Δίνεται η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$ και $\alpha\neq0$.

Α. Από ποιους τύπους δίνονται οι λύσεις της;

Μονάδες 0,5

Β. Αν z_1, z_2 είναι οι λύσεις της, τότε να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1) $z_1+z_2=$…….

2) $z_1 \cdot z_2=$……..

Μονάδες 1

9. Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z;

Μονάδες 0,5

10. Έστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Ποιος τύπος δίνει το μέτρο του z συναρτήσει των α και β;

Μονάδες 0,5

11. Αν $z\in C$, τοτε να αποδείξετε ότι $|z|=|\bar{z}|=|-z|$

Μονάδες 1

12. Αν $z\in C$, τοτε να αποδείξετε ότι $|z|^2=z\,\bar{z}$

Μονάδες 1

13. Αν z,z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Μονάδες 3

14. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1) $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\ldots.$

2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\ldots\ldots$

Μονάδες 1

15. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $|z_1+z_2|$ και $|z_1|+|z_2|$

Μονάδες 1

16. Αν M_1,M_2 οι εικόνες των z_1,z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε με τι ισούται το μέτρο της διαφοράς z_1-z_2; Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Μονάδες 1

17. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_1 και ακτίνα α. Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Μονάδες 1

Θέμα 2

Α. Να επελέξετε τη σωστή απάντηση: (Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας) γ) Να βρείτε τις κοινές ρίζες των εξισώσεων $(z^2+1)(z^2-z+1)=0$ και $z^2-z^7+1=0$

Μονάδες 5

Θέμα 3

Α. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z|=2$ και $w=(-\sqrt{3}+i)z$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο στον οποίο ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w.

Μονάδες 6

Γ. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ και η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$

i) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\dfrac{1}{z}\right) = f(z)$ **Μονάδες 8**

ii) Έστω $z = ax + \beta yi$, με $a, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ και $0 < a < \beta$. Αν ο $f(z)$ είναι φανταστικός, τότε:

α) να γράψετε τον $f(z)$ στη μορφή κ+λi , με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

β) να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε έλλειψη. **Μονάδες 5**

Θέμα 4

Α. 1) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $u = \bar{u}$

Μονάδες 2

2) Αν $|z|=|w|=1$, τοτε να αποδείξετε ο αριθμός $\dfrac{z+w}{1+z\cdot w}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 7

Β Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|\leq 1$, να βρείτε:

1) ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

2) για ποιον από όλους η παράσταση $|z+2-2i|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Μονάδες 8