

ΤΑΞΗ: Γ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΛΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

Καθηγητές:**ΘΕΜΑ 1^ο**

- A.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$ τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ ώστε $f(x_0) = \eta$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)**
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**:
- α.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- β.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(α) \cdot f(β) < 0$
- γ.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[α, β]$ και συνεχής στο $(α, β]$, τότε η f παίρνει στο $[α, β]$ μια μέγιστη τιμή.
- δ.** Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- ε.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -2010$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $zw \neq 0$ για τους οποίους ισχύει: $|z + w| = |z - w|$ (1) και η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[α,β]$ με $α < 0 < β$. Να αποδείξετε ότι:

- A.** $\operatorname{Re}(z \bar{w}) = 0$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 9)**
- B.** Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**
- Γ.** Αν $z = \alpha + i f(\alpha)$ με $f(\alpha) \neq 0$ και $w = f(\beta) - \beta i$ μιγαδικοί που επαληθεύουν την παραπάνω ισότητα (1) τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(α,β)$. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- A. i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**
- ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**
- iii.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2010$ έχει μια ακριβώς λύση. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**
- B.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$ τότε να αποδείξετε ότι:
- i.** Η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} **(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)**
- ii.** $g(0) = 0$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**
- iii.** Να λύσετε την ανίσωση: $(g \circ f)(x) > 0$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**
- iv.** Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = 1$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)**

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

- A.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**
- B.** Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)**
- Γ.** Να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ