ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΜΦΙΛΩΝ *ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:*
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 16-10-09

ΤΑΞΗ: Γ **ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

<u>ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν α+βi και γ+δi είναι μιγαδικοί αριθμοί όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} i$$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 13)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Αν $z \in \mathbb{C}$ τότε $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$

2. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = |\bar{z}|$

3. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z^2$

4. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

5. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει πάντα $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$

6. Αν $z, w \in C$ και $z^2 + w^2 = 0$ τότε $z = w = 0$. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 12)**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $f(z) = \dfrac{z+1}{z}, z \in \mathbb{C}^*$

Α. Να αποδείξετε ότι: $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

Β. Αν ισχύει $f(z)f(\bar{z}) = 2$ τότε:

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z **(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)**

ii. Να δείξετε ότι: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**

iii. Να αποδείξετε ότι: $|f(z) - 1| \geq \sqrt{2} - 1$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ ώστε $|z-i|=2$ (1) και $w=-3+5i$

Α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και τους μιγαδικούς z_1, z_2 που επαληθεύουν την (1) και έχουν το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αντιστοίχως.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=|zi+3|^2+|\bar{z}-i|^2$ και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)**

Γ. Να αποδείξετε ότι : $3 \le |z-w| \le 7$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_3|=5$ και $z_1+z_2+z_3=0$. Αν Ο η αρχή των αξόνων

και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 αντιστοίχως

Να αποδείξετε ότι:

Α. $16z_1^2+9z_2^2=0$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**

Β. $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 7)**

Γ. $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)**

Δ. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)**

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ