Για τη διδασκαλία του κανόνα του De L’ Hospital στην Γ΄ Λυκείου σας στέλνω το παρακάτω κείμενο καθώς και ένα αρχείο Geogebra.

Από τις οδηγίες διδασκαλίας της Γ΄ Λυκείου.

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:</u>

i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των *f* και *g* στο κοινό τους σημείο *Α(1,0)* είναι οι ευθείες $\varepsilon: y=x-1$ και $\zeta: y=-2x+2$ αντιστοίχως και να τις χαράξετε.

iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ *<u>προσεγγίζονται</u>* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο $x_0=1$ η τιμή του πηλίκου $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\dfrac{x-1}{-2x+2}$, δηλαδή ότι «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1-x^2}\simeq\frac{x-1}{-2x+2}=\frac{x-1}{-2(x-1)}=\frac{1}{-2},$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

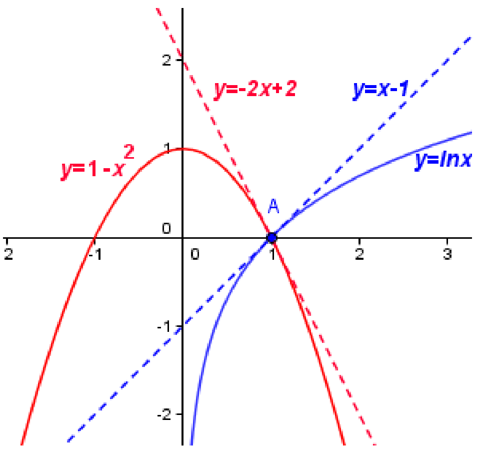
Επομένως, «κοντά» στο $x_0=1$ ισχύει $\dfrac{f(x)}{g(x)}\simeq\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$, το οποίο υπό μορφή ορίου γράφεται:

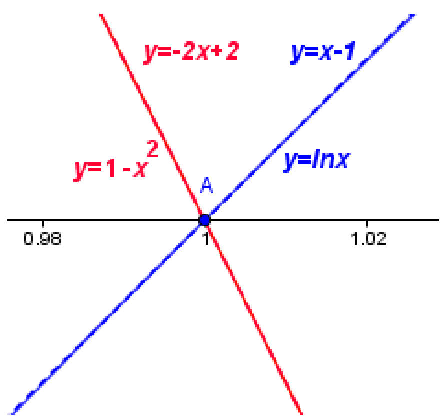
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο $x_0=1$ οι τιμές των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=1-x^2$ *<u>προσεγγίζονται</u>* από τις τιμές των εφαπτομένων τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (πχ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=\ln x$ και $y=1-x^2$ και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους $y=x-1$ και $y=-2x+2$ αντιστοίχως (σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο $A(1,0)$. Θα παρατηρήσουμε ότι η $y=\ln x$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=x-1$, ενώ η $y=1-x^2$ θα συμπέσει με την ευθεία $y=-2x+2$. (σχήμα 8).





Στα παραπάνω έχω να προσθέσω τα εξής:

Γενικεύοντας το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο x_0 και στο όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ (όπως οι συναρτήσεις του παραπάνω παραδείγματος) θα έχουμε ως συνέπεια $f(x_0)=g(x_0)=0$.
Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων f, g στο κοινό τους σημείο $(x_0,f(\alpha))$ θα είναι αντίστοιχα:

ε_1: $y=f'(x_0)(x- x_0)+f(\alpha)$ ε_2: $y=g'(x_0)(x- x_0)+g(x_0)$

για τιμές του x κοντά στο x_0 η τιμή του πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή του πηλίκου $\frac{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)}=\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Επομένως κοντά στο x_0 ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ με συνέπεια να έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Προσοχή
Οι προϋποθέσεις του ανωτέρω παραδείγματος και της γενίκευσης δεν είναι απαραίτητες για να εφαρμοστεί ο κανόνας του De L' Hospital.

Ζαχαριάδης Δημήτρης