

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΟΝΟΜΑ: .....

**ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ**

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών**. (Μονάδες 17)
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη. (Μονάδες 8)
  - i. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .
  - ii. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
  - iii. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ .
  - iv. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[\alpha, \beta]$  και συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή.

**ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ**

Δίνεται η  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & 0 < x < 1 \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

1. Να υπολογίσετε τα  $\alpha$  και  $\beta$ , έτσι ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 18)
2. Να δείξετε ότι η  $f$  παίρνει την τιμή  $\frac{3}{2}$ , όταν  $x \in (1, e)$  (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ**

Δίνεται η  $f$  με  $f(x) = \ln x + e^x$  και πεδίο ορισμού το  $(0, 1]$ .

1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της (Μονάδες 15)
2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $\ln x + e^x = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ . (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ**

1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f(x) = x^3 + 3x^2$  και η ευθεία  $y = \lambda$ , όπου  $0 < \lambda < 4$ , έχουν ακριβώς 3 κοινά σημεία στο διάστημα  $(-3, 3)$ . (Μονάδες 20)
2. Αν τα σημεία αυτά έχουν τετμημένη  $x_1 < x_2 < x_3$  να εξηγήσετε γιατί  $f(x) < \lambda$  για  $x \in (x_2, x_3)$  (Μονάδες 5)