

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»

ΘΕΜΑ Α

A₁. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 10

A₂. Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε σαν μέτρο του z ;

Μονάδες 5

A₃. Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ) αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ) αν αυτή είναι λάθος.

i) Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών εκφράζει στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

ii) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

iii) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει: $z_1 = -\overline{z_2}$.

iv) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και \overline{z} ο συζυγής του,

$$\text{τότε ισχύει } |z|^2 = |\overline{z}| |z|.$$

v) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $||z_1| - |z_2|| \geq |z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός $a=3+4i$ και ο μιγαδικός z με $\bar{a}z + a\bar{z} = 50$.

B₁. Να δειχθεί ότι η εικόνα M του z κινείται στην ευθεία
 $3x+4y-25=0$. **Μονάδες 10**

B₂. Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο.
Πόσο είναι το $|z_0|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και έστω $w = \frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$.

Γ₁. Να δειχθεί ότι $\frac{w-2}{w+i} = \bar{z}$. **Μονάδες 6**

Γ₂. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 και M είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να δειχθεί ότι το M κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση. **Μονάδες 10**

Γ₃. Για $z=2$ να δειχθεί ότι w^{2010} είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δίδονται οι μιγαδικοί

z_1, z_2, w με $z_1^v = 3+i$, $z_2^v = 1+3i$ και $w = \frac{z_1}{z_2}$.

Δ₁. Να δειχθεί ότι ο w δεν είναι πραγματικός. **Μονάδες 5**

Δ₂. Να δειχθεί ότι το $|w| = 1$. **Μονάδες 6**

Δ₃. Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $z = \frac{w-1}{w+1}$ είναι φανταστικός. **Μονάδες 7**

Δ₄. Να δειχθεί ότι $|a+w| + |a-w| \geq 2$, όπου $a \in \mathbb{C}$.

Μονάδες 7