

2.2 - Ισοδύναμα κλάσματα

Ερώτηση 1

Ποια κλάσματα λέγονται ίσα ή ισοδύναμα;

Απάντηση

- **Ίσα η ισοδύναμα** λέγονται τα κλάσματα που εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα “χιαστί γινόμενα” $a \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

Δηλαδή: αν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Ερώτηση 2

Πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα κλάσμα και να παραμείνει ισοδύναμο με το αρχικό;

Απάντηση

- Αν σ'ένα κλάσμα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο φυσικό αριθμό (διαφορετικό του μηδενός) τότε το κλάσμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.
- Αν σ'ένα κλάσμα διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο φυσικό αριθμό (διάφορο του μηδενός) το κλάσμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.



Παρατήρηση

• Προσοχή!

$$\frac{\kappa \cdot \nu}{\eta \cdot \nu} = \frac{\kappa}{\eta} \quad \text{Σωστό} \quad \frac{\kappa : \nu}{\eta : \nu} = \frac{\kappa}{\eta} \quad \text{Σωστό}$$

- Κάθε φυσικό αριθμό μπορούμε να τον γράψουμε ως κλάσμα με παρονομαστή

οποιοδήποτε φυσικό αριθμό (διαφορετικό του μηδενός)

$$\kappa = \frac{\kappa}{1} = \frac{\kappa \cdot \eta}{1 \cdot \eta} = \frac{\kappa \cdot \eta}{\eta}$$

- Έστω δύο ισοδύναμα κλάσματα $\frac{\kappa}{\eta} = \frac{\mu}{\nu}$ τότε ισχύει $\kappa \cdot \nu = \eta \cdot \mu$ (λήψε τότε ότι πολλαπλασιάζουμε χιαστί).

- **Απλοποίηση** ενός κλάσματος ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε άλλο ισοδύναμο του με μικρότερους όρους. Γι'αυτό διαιρούμε και τους δύο όρους με έναν κοινό τους διαιρέτη.

π.χ.
$$\frac{14}{21} = \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{2}{3}$$

Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ που δεν απλοποιείται ονομάζεται **ανάγωγο κλάσμα**. Αυτό συμβαίνει όταν $M \cdot K \cdot \Delta(\alpha, \beta) = 1$

Απλοποίηση μπορούμε να κάνουμε όταν υπάρχει πολλαπλασιασμός ή διαίρεση και στους δύο όρους του κλάσματος.

Ερώτηση 3

Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα;

Απάντηση

- **Ομώνυμα** λέγονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Ερώτηση 4

Ποια κλάσματα λέγονται ετερόνυμα;

Απάντηση

- **Ετερόνυμα** λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{10}{15}$ είναι ισοδύναμα.

Λύση

Υπολογίζουμε τα “χιαστί γινόμενα”, δηλαδή $2 \cdot 15 = 30$ και $5 \cdot 10 = 50$.
Τα γινόμενα δεν είναι ίσα, άρα και τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

2

Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{20}{55}$

Λύση

Ο Μ.Κ.Δ. των όρων του κλάσματος 20 και 55 είναι:

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(20, 55) = 5.$$

Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 5 και έχουμε:

$$\frac{20}{55} = \frac{20 : 5}{55 : 5} = \frac{4}{11}$$

3

Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{24}$

Λύση

• Ελέγχουμε πρώτα αν κάποιο από τα κλάσματα μπορεί να απλοποιηθεί. Έχουμε $\text{Μ.Κ.Δ.}(4, 24) = 4$.

$$\text{Οπότε, } \frac{4}{24} = \frac{4 : 4}{24 : 4} = \frac{1}{6}.$$

• Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών των ανάγωγων

ετερώνυμων κλασμάτων. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{6}$.

$$\text{Ε.Κ.Π.}(5, 4, 6) = 60$$

- Διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με καθένα από τους παρονομαστές και έχουμε: $60 : 5 = 12$
 $60 : 4 = 15$
 $60 : 6 = 10$
- Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκαμε.

$$\frac{2}{5} = \frac{24}{60}, \quad \frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \quad \frac{1}{6} = \frac{10}{60}$$

Επομένως, τα κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα κλάσματα $\frac{24}{60}$, $\frac{45}{60}$ και $\frac{10}{60}$.

4

Να μετατρέψετε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό 50.

$$\text{α. } \frac{3}{5} \quad \text{β. } \frac{5}{2} \quad \text{γ. } \frac{8}{10}$$

Λύση

α. Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το 10

$$\text{και έχουμε } \frac{3}{5} = \frac{30}{50}$$

β. Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το 25

$$\text{και έχουμε } \frac{\overline{25}}{5} = \frac{125}{50}$$

γ. Πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το 5

$$\text{και έχουμε } \frac{\overline{5}}{8} = \frac{40}{50}$$

5

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 4.

α. $\frac{12}{8}$ β. $\frac{60}{20}$ γ. $\frac{36}{16}$

Λύση

α. Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον αριθμό 2 και

$$\text{έχουμε } \frac{12:2}{8:2} = \frac{6}{4}$$

β. Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον αριθμό 5 και

$$\text{έχουμε } \frac{60:5}{20:5} = \frac{12}{4}$$

γ. Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον αριθμό 4 και

$$\text{έχουμε } \frac{36:4}{16:4} = \frac{9}{4}$$

6

Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα

α. $\frac{4}{3} = \frac{20}{\dots}$ β. $\frac{\dots}{6} = \frac{9}{2}$ γ. $\frac{18}{4} = \frac{\dots}{2}$

Λύση

α. Για να είναι ισοδύναμα τα κλάσματα πρέπει τα “χιαστί” γινόμενα να είναι ίσα.

Έχουμε $20 \cdot 3 = 60$. Οπότε $60 : 4 = 15$

$$\text{Άρα } \frac{4}{3} = \frac{20}{15}$$

β. Έχουμε $6 \cdot 9 = 54$. Οπότε $54 : 2 = 27$.

$$\text{Άρα } \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

γ. Έχουμε $18 \cdot 2 = 36$. Οπότε $36 : 4 = 9$.

$$\text{Άρα } \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

7

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

α. $\frac{30}{35}$ β. $\frac{15}{9}$ γ. $\frac{28}{64}$

Λύση

α. Ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 30 και 35 είναι ο 5. Οπότε, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 5 και έχουμε:

$$\frac{30}{35} = \frac{30:5}{35:5} = \frac{6}{7}$$

β. Ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 15 και 9 είναι ο 3. Οπότε, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 3 και έχουμε:

$$\frac{15}{9} = \frac{15:3}{9:3} = \frac{5}{3}$$

γ. Ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 28 και 64 είναι ο 4. Οπότε, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με το 4 και έχουμε:

$$\frac{28}{64} = \frac{28:4}{64:4} = \frac{7}{16}$$

8

Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό στα παρακάτω κλάσματα, ώστε να προκύψουν ομώνυμα κλάσματα.

$$\frac{4}{12+4'} \quad \frac{36}{20-\dots'} \quad \frac{5}{13+\dots'} \quad \frac{8}{25-\dots'}$$

Λύση

Έχουμε $\frac{4}{12+4} = \frac{4}{16}$. Οπότε $\frac{36}{20-4} = \frac{36}{16}$, $\frac{5}{13+3} = \frac{5}{16}$ και $\frac{8}{25-9} = \frac{8}{16}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α. Δύο κλάσματα $\frac{a}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

β. Αν $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $a \cdot \delta = \dots\dots\dots$

γ. Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, διάφορο του μηδενός, προκύπτει κλάσμα

δ. κλάσμα καλείται το κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί.

2 Να συμπληρώσετε ένα Χ στο αντίστοιχο τετράγωνο.

α. Τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή
καλούνται ομώνυμα

Σωστό Λάθος

β. Τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{10}{15}$ είναι ισοδύναμα

γ. Το κλάσμα $\frac{2}{3}$ είναι ανάγωγο κλάσμα

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να μετατρέψετε σε ισοδύναμα κλάσματα:

α. Το 7 με παρονομαστή το 1

β. Το 5 με παρονομαστή το 3

γ. Το $\frac{1}{3}$ με παρονομαστή το 15

δ. Το $\frac{3}{5}$ με παρονομαστή το 30

2

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{10}{20}$

β. $\frac{8}{16}$

γ. $\frac{84}{12}$

δ. $\frac{25}{5}$

ε. $\frac{100}{25}$

στ. $\frac{25}{100}$

3

Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ζεύγη κλασμάτων είναι ίσα.

α. $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$

β. $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}$

γ. $\frac{2}{7}, \frac{4}{14}$

δ. $\frac{6}{10}, \frac{8}{15}$

ε. $\frac{1}{22}, \frac{3}{66}$

στ. $\frac{4}{2}, \frac{2}{8}$

4

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{25}{75}$

β. $\frac{3\alpha+3\beta}{8\alpha+8\beta}$

γ. $\frac{3 \cdot x}{6 \cdot x}$

5

Να γράψετε τον αριθμό 5 με παρονομαστή τον αριθμό:

α. 1

β. 3

γ. 5

δ. 6

ε. 10

6

Να γράψετε το $\frac{1}{3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή:

α. 9

β. 15

γ. 30

δ. 90

ε. 300

στ. 900

7 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{4}{12}$ β. $\frac{9}{12}$ γ. $\frac{25}{45}$ δ. $\frac{18}{90}$ ε. $\frac{25}{95}$ στ. $\frac{100}{110}$ ζ. $\frac{32}{48}$

8 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{126}{54}$ β. $\frac{81}{243}$ γ. $\frac{256}{512}$ δ. $\frac{300}{900}$ ε. $\frac{111}{333}$

9 Κυκλώστε την ένδειξη Σωστό (Σ), Λάθος (Λ) στις παρακάτω ισότητες:

α. $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4}$	Σ	Λ	β. $\frac{7+9}{6+9} = \frac{7}{6}$	Σ	Λ
γ. $\frac{3+5}{3+6} = \frac{5}{6}$	Σ	Λ	δ. $\frac{2:3}{4:3} = \frac{2}{4}$	Σ	Λ
ε. $\frac{10-5}{10-3} = \frac{5}{3}$	Σ	Λ			

10 Βρείτε ποια από τα παρακάτω ζεύγη κλάσμάτων είναι ισοδύναμα (ή ίσα):

α. $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$ β. $\frac{2}{9}, \frac{6}{27}$ γ. $\frac{6}{7}, \frac{12}{11}$ δ. $\frac{36}{13}, \frac{72}{26}$ ε. $\frac{100}{7}, \frac{300}{21}$ στ. $\frac{40}{50}, \frac{80}{90}$

11 Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α. $\frac{5x+5y}{7x+7y}$ β. $\frac{8+2a}{4+a}$ γ. $\frac{5a+10\beta}{6a+12\beta}$ δ. $\frac{2\alpha}{8}$ ε. $\frac{\alpha^2}{\alpha}$ ζ. $\frac{\beta^3}{\beta^2}$

12 Να εξετάσετε αν είναι ισοδύναμα τα κλάσματα:

α. $\frac{44}{99}, \frac{4}{9}$ β. $\frac{1212}{9999}, \frac{12}{99}$ γ. $\frac{421}{991}, \frac{42}{99}$

13

Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα:

α. $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$

β. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

γ. $\frac{4}{6}, \frac{3}{8}$

14

Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

α. $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

β. $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

γ. $\frac{7}{6}, \frac{1}{12}$

δ. $\frac{4}{9}, \frac{1}{6}$

ε. $1, \frac{5}{3}$

15

Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα:

α. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

β. $\frac{2}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

γ. $\frac{7}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{15}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

1. Ποια κλάσματα λέγονται ίσα ή ισοδύναμα;
2. Πως μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα κλάσμα και να παραμείνει ισοδύναμο με το αρχικό;
3. Τι καλούμε απλοποίηση ενός κλάσματος;
4. Τι καλούμε ανάγωγο κλάσμα;
5. Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα;
6. Ποια κλάσματα λέγονται ετερόνυμα;

ΘΕΜΑ 2

1. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{9}{15}$ είναι ισοδύναμα.
2. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{30}{35}$

3. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{20}$.

ΘΕΜΑ 3

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 60

α. $\frac{4}{5}$

β. $\frac{5}{12}$

γ. $\frac{8}{20}$

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή τον αριθμό 5

α. $\frac{20}{25}$

β. $\frac{60}{15}$

γ. $\frac{120}{75}$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα

α. $\frac{2}{5} = \frac{20}{\dots}$

β. $\frac{\dots}{8} = \frac{2}{4}$

4. Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό ώστε να προκύψουν ομώνυμα κλάσματα

$$\frac{2}{16+2} \quad \frac{6}{30-\dots} \quad \frac{8}{15+\dots}$$

ΘΕΜΑ 4

1. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

α. $\frac{5x+5y}{3x+3y}$

β. $\frac{4x-4y}{8x-8y}$

γ. $\frac{5x}{10x}$

2. Να γράψετε το $\frac{1}{4}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό

α. 12

β. 16

γ. 20

δ. 24

ε. 40

στ. 100

ζ. 400

η. 1000