

## 1.5 Χαρακτήρες Διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάπτυση αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

### Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

### Απάντηση

**Πολλαπλάσια** ενός φυσικού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή οι αριθμοί: 0, α, 2α, 3α, 4α,...

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός που διαιρέται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του, εκτός από τον φυσικό αριθμό 0.
- Άν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

### Ερώτηση 2

Τι είναι τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών; Βρείτε τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8.

### Απάντηση

Αν βρούμε τα πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών, πιθανόν να υπάρχουν πολλαπλάσια του ενός, τα οποία είναι πολλαπλάσια και των υπολογίων φυσικών, τους οποίους εξετάζουμε. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **κοινά πολλαπλάσια** των αριθμών αυτών.

Τα πολλαπλάσια του 6 είναι:

0, 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, ...

Τα πολλαπλάσια του 8 είναι:

0, 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, ...

Τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8 είναι:

0, 24, 48, ...

### Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών;

### Απάντηση

Από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο ονομάζεται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των αριθμών αυτών και συμβολίζεται: E.Κ.Π.

### Ερώτηση 4

Τι καλούμε διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α;

### Απάντηση

- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται πρώτος αριθμός, διαφορετικά λέγεται σύνθετος. Κάθε σύνθετος αριθμός αναπτύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

### Ερώτηση 5

Τι καλούμε Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών;

### Απάντηση

- Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (Μ.Κ.Δ.) των α και β και συμβολίζεται Μ.Κ.Δ.(α,β).
- Δύο αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν είναι  $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = 1$ .

### Ερώτηση 6

Ποια είναι τα κριτήρια της διαιρετότητας;

### Απάντηση

- **Κριτήρια διαιρετότητας** πλέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαιρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **2, 3, 4, 5, 9, 10, ή 25**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000 ...**, αν πήγει σε **ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **2**, αν το τελευταίο

ψηφίο είναι **0, 2, 4, 6, 8**.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3 ή το 9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3 ή το 9** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4 ή το 25** αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το **4 ή το 25** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5** αν πήγει στο **0 ή 5**.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το **9**.

a.  $2 \square 5$ b.  $96 \square 4$ γ.  $503 \square$ 

### Λύση

Ένας φυσικός αριθμός είναι διαιρετέος με το **9** αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **9**. Οπότε:

- Ο αριθμός είναι ο  $225$  διότι  $2 + 2 + 5 = 9$ .
- Ο αριθμός είναι ο  $9684$  διότι  $9 + 6 + 8 + 4 = 27$ .
- Ο αριθμός είναι ο  $5031$  διότι  $5 + 0 + 3 + 1 = 9$ .

2

Να τοποθετήσετε ένα "X" στην αντίστοιχη θέση.

a. Ε.Κ.Π.  $(2, 5) =$ 8     9     10     12 β. Ε.Κ.Π.  $(4, 9) =$ 16     18     27     36 γ. Ε.Κ.Π.  $(3, 2, 5) =$ 20     15     30     60 

### Λύση

a. Τα πολλαπλάσια του **2** είναι **0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...**  
Τα πολλαπλάσια του **5** είναι **0, 5, 10, 15, 20, 25, ...**  
Το Ε.Κ.Π.  $(2, 5) = 10$ .

β. Τα πολλαπλάσια του **4** είναι **0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...**  
Τα πολλαπλάσια του **9** είναι **0, 9, 18, 27, 36, 45, ...**  
Το Ε.Κ.Π.  $(4, 9) = 36$ .

γ. Τα πολλαπλάσια του **2** είναι **0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ...**  
Τα πολλαπλάσια του **3** είναι **0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...**  
Τα πολλαπλάσια του **5** είναι **0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...**  
Το Ε.Κ.Π.  $(3, 2, 5) = 30$ .

3

Συμπλήρωσε με τις κατάλληλες πλέξεις τα κενά στην πρόταση που ακολουθεί:

Για τον αριθμό **66** έχουμε  $66:6 = 11$ .

Ο αριθμός **66** είναι **ένα** (α) .....  
του αριθμού **6** και ο αριθμός **11** είναι (β) ..... του **66**.

**Λύση**

- (a) πολλαπλάσιο                          (β) διαιρέτης.

- Τοποθετήστε ένα "X" στην αντίστοιχη θέση**
- a. Μ.Κ.Δ. (3, 8) =  
 1     3     8     24
- 4 β. Μ.Κ.Δ. (16, 24) =  
 8     4     24     16
- γ. Μ.Κ.Δ. (10, 40, 50) =  
 4     10     40     50

**Λύση**

a. Οι διαιρέτες του 3 είναι οι αριθμοί 1, 3

Οι διαιρέτες του 8 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 8

Άρα  $\text{Μ.Κ.Δ.}(3, 8) = 1$ .

β. Οι διαιρέτες του 16 είναι οι 1, 2, 4, 8, 16.

Οι διαιρέτες του 24 είναι οι 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 16 και 24 είναι οι 1, 2, 4, 8.

Άρα  $\text{Μ.Κ.Δ.}(16, 24) = 8$ .

γ. Οι διαιρέτες του 10 είναι οι 1, 2, 5, 10.

Οι διαιρέτες του 40 είναι οι 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Οι διαιρέτες του 50 είναι οι 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών, 10, 40, 50 είναι οι 1, 2, 5, 10.

Άρα  $\text{Μ.Κ.Δ.}(10, 40, 50) = 10$ .

**5**

Na βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών 10, 11, 12, 13, 14, 15. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

**Λύση**

Διαιρέτες του 10: 1, 2, 5, 10.

Διαιρέτες του 11: 1, 11.

Διαιρέτες του 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Διαιρέτες του 13: 1, 13.

Διαιρέτες του 14: 1, 2, 7, 14.

Διαιρέτες του 15: 1, 3, 5, 15.

Οι αριθμοί 11, 13 είναι πρώτοι αριθμοί αφού έχουν διαιρέτες τον εαυτό τους και το 1.

Οι αριθμοί 10, 12, 14, 15 είναι σύνθετοι.

**6**

Na αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς.

α. 106                                  β. 440                                  γ. 325

**Λύση**

α.  $106 \Big| 2 \quad \text{Άρα } 106 = 2 \cdot 53$   
 53 | 53  
 1 |

β.  $440 \Big| 2 \quad \text{Άρα } 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$   
 220 | 2  
 110 | 2  
 55 | 5  
 11 | 11  
 1 |

γ.  $325 \Big| 5 \quad \text{Άρα } 325 = 5^2 \cdot 13$   
 65 | 5  
 13 | 13  
 1 |

7

Η ανάλυση κάποιων αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έδωσε τα παρακάτω γινόμενα.

α.  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$       β.  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$       γ.  $3 \cdot 13$

Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Λύση

α.  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$       β.  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$       γ.  $3 \cdot 13 = 39$

8

Να υπολογίσετε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36 και 70.

Λύση

$$\begin{array}{r} 36 \\ | \\ 18 \\ | \\ 9 \\ | \\ 3 \\ | \\ 3 \\ | \\ 1 \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ | \\ 35 \\ | \\ 7 \\ | \\ 7 \\ | \\ 1 \end{array}$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Εκτελούμε διαδοχικές διαιρέσεις ώστε να αναλύσουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Άρα  $\text{Ε.Κ.Π.}(36, 70) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $\text{Μ.Κ.Δ.}(36, 70) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

- α. Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα ..... του.
- β. Αν ένας φυσικός ..... έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.
- γ. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το ..... μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών.
- δ. ..... αριθμός λέγεται ένας αριθμός που διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και το 1.
- ε. Μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β είναι ο ..... κοινός διαιρέτης των α και β.
- στ. Δύο αριθμοί α και β λέγονται ..... αν  $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = 1$ .

2

Να σημειώσετε ένα X στο κατάλληλο τετραγωνάκι.

- α. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών

2, 3, και 6 είναι ο αριθμός 12.

**Σωστό**    **Λάθος**

 

- β. Ο μέγιστος κοινό διαιρέτης των αριθμών

2 και 12 είναι ο αριθμός 2.

 

- γ. Ο αριθμός 13 είναι σύνθετος.

   
 

- δ. Ισχύει  $246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$ .

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** α. Να γράψετε κατά αύξουσα τάξη τα ποιληαπλάσια του 4.  
 β. Υπάρχει κοινό ποιληαπλάσιο των αριθμών 4 και 6 που να είναι μικρότερο ή ίσο του 12;  
 γ. Υπάρχουν κοινά ποιληαπλάσια των αριθμών 4 και 6 που να είναι μεγαλύτερα του 12; Πόσα είναι αυτά;
- 2** α. Ποιων φυσικών αριθμών είναι ποιληαπλάσιο ο αριθμός μηδέν;  
 β. Ο αριθμός μηδέν έχει ποιληαπλάσια; Αν ναι, ποια;  
 γ. Να απαντήσετε στις δύο παραπάνω ερωτήσεις, αν αντί του αριθμού 0 θεωρήσετε τον αριθμό 1.
- 3** ΕΚΠ (8, 12) = ;  
 Να γράψετε τα κοινά ποιληαπλάσια των αριθμών 8 και 12 και μετά τα ποιληαπλάσια του ΕΚΠ (8, 12). Τι παρατηρείτε;
- 4** Να γράψετε τα κοινά ποιληαπλάσια των 5, 6, 10 και τα ποιληαπλάσια του ΕΚΠ (5, 6, 10). Τι παρατηρείτε για τα κοινά ποιληαπλάσια των 5, 6, 10 και για τα ποιληαπλάσια του ΕΚΠ (5,6,10);  
 α. Είναι ο 135 ένα από τα ποιληαπλάσια του 11;  
 β. Αν διαπιστώσετε πως όχι, τότε να ελέγχετε αν υπάρχουν δύο διαδοχικά ποιληαπλάσια του 11, που το ένα να είναι μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο από τον 135.
- 5** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:
- | Φυσικοί αριθμοί  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | ... |
|--|---|---|---|---|---|-----|-----|
| Πολ/σια του 11,<br>μεγαλύτερα<br>του 30 και μικρό-<br>τερα του 120 |   |   |   |   |   |     |     |
- 6** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:
- | Φυσικοί αριθμοί | 0 | 1 | 2 | ... | ... |
|-----------------|---|---|---|-----|-----|
| Πολ/σια του 6   |   |   |   |     |     |
| Πολ/σια του 8   |   |   |   |     |     |
- 7** Ποιο είναι το ΕΚΠ(6, 8);
- 8** Να βρείτε το ΕΚΠ (4, 6, 18).

**9**

Ένα ορεινό χωριό το επισκέπτεται ο γιατρός κάθε 8 ημέρες, ο κτηνίατρος κάθε 10 ημέρες κι ένας έμπορος κάθε 15 ημέρες. Αν σήμερα επισκέφθηκαν και οι τρεις το χωριό, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.

**10**

Να γράψετε τους κοινούς διαιρέτους των αριθμών 8, 24 και 56 και να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών. Δύο αριθμοί έχουν Μ.Κ.Δ. το 36. Να δικαιολογήσετε ότι έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες.

**11**

Δύο αριθμοί έχουν Μ.Κ.Δ. το 36. Να δικαιολογήσετε ότι έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες.

**12**

Να γράψετε από τους αριθμούς 3432, 4581, 864, 156, 62775, 730 αυτούς που διαιρούνται.  
α. με το 2    β. με το 5    γ. με το 3    δ. με το 9

**13**

Να συμπληρώσετε τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.

- |               |   |                              |
|---------------|---|------------------------------|
| α. i. 52....3 | ii. 2....61                                     | ώστε να διαιρούνται με το 3. |
| β. 6....4.... | ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 9. |                              |

**14**

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς.

- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| α. 132 | β. 500 | γ. 140 |
|--------|--------|--------|

**15**

Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών 60 και 100.

**16**

Να γράψετε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών 16, 20, 60 και να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των αριθμών αυτών.

**17**

Δίνονται οι αριθμοί: 3, 5, 9, 11, 12, 15. Να βρείτε:

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| α. Ποιο από αυτούς είναι πρώτοι. | β. Ποιοι από αυτούς είναι σύνθετοι. |
|----------------------------------|-------------------------------------|

**18**

Να γράψετε από τους αριθμούς 4816, 805, 3600, 28575, 933 αυτούς που διαιρούνται.

- |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| α. με το 2 | β. με το 5 | γ. με το 3 | δ. με το 9 |
|------------|------------|------------|------------|

**19**

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς

- |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| α. 126 | β. 300 | γ. 256 | δ. 620 |
|--------|--------|--------|--------|

**20**

Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36 και 124.

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;
2. Τι είναι τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών;
3. Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσοτέρων φυσικών;
4. Τι καλούμε διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού;
5. Τι καλούμε μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο φυσικών;
6. Ποια είναι τα κριτήρια διαιρετόπτας;

### ΘΕΜΑ 2

1. Να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

- α. του 2 και του 7                          β. του 2 , 4 και 12                          γ. του 3 , 4 και 5

2. Να βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη

- α. του 5 και του 8                          β. του 12 και του 48                          γ. του 10 , 20 και 60

3. Να βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών

$$11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20$$

Ποιοι από αυτούς τους αριθμούς είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι;

4. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς

- α. 108                          β. 660                          γ. 625

### ΘΕΜΑ 3

1. Να υπολογίσετε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 24 και 60

2. Να βρείτε τους παρακάτω αριθμούς

$$\alpha. 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3                          \beta. 4^2 \cdot 5 \cdot 2^3$$

### ΘΕΜΑ 4

1. Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών 18 , 28 , 64 και να βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη αυτών.

2. Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς 4912 , 5368 , 7235 , 8371 , 5423 διαιρούνται

- α. με το 2                          β. με το 3                          γ. με το 5                          δ. με το 9

