

1.5 Χαρακτήρες Διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

Απάντηση

Πολλαπλάσια ενός φυσικού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή οι αριθμοί: $0, a, 2a, 3a, 4a, \dots$

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του, εκτός από τον φυσικό αριθμό 0.
- Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλο θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

Ερώτηση 2

Τι είναι τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών; Βρείτε τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8.

Απάντηση

Αν βρούμε τα πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών, πιθανόν να υπάρχουν πολλαπλάσια του ενός, τα οποία είναι πολλαπλάσια και των υπολοίπων φυσικών, τους οποίους εξετάζουμε. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **κοινά πολλαπλάσια** των αριθμών αυτών.

Τα πολλαπλάσια του 6 είναι:

0, 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, ...

Τα πολλαπλάσια του 8 είναι:

0, 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, ...

Τα κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 8 είναι:

0, 24, 48, ...

Ερώτηση 3

Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών;

Απάντηση

Από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο ονομάζεται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των αριθμών αυτών και συμβολίζεται: Ε.Κ.Π.

Ερώτηση 4

Τι καλούμε διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a ;

Απάντηση

- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
- Κάθε αριθμός $a \neq 0$ έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και a .
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται πρώτος αριθμός, διαφορετικά λέγεται σύνθετος. Κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Ερώτηση 5

Τι καλούμε Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών;

Απάντηση

- Δύο φυσικοί αριθμοί a και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) των a και β και συμβολίζεται ΜΚΔ (a, β).
- Δύο αριθμοί a και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι $\text{ΜΚΔ}(a, \beta) = 1$.

Ερώτηση 6

Ποια είναι τα κριτήρια της διαιρετότητας;

Απάντηση

- **Κριτήρια διαιρετότητας** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **2, 3, 4, 5, 9, 10,** ή **25.**
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000 ...**, αν λήγει σε **ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο

ψηφίο είναι **0, 2, 4, 6, 8.**

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** ή το **25** αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το **4** ή το **25** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5** αν λήγει στο **0** ή **5.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9.

- α. $2 \square 5$ β. $96 \square 4$ γ. $503 \square$

Λύση

Ένας φυσικός αριθμός είναι διαιρετός με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9. Οπότε:

- α. Ο αριθμός είναι ο 225 διότι $2 + 2 + 5 = 9$.
 β. Ο αριθμός είναι ο 9684 διότι $9 + 6 + 8 + 4 = 27$.
 γ. Ο αριθμός είναι ο 5031 διότι $5 + 0 + 3 + 1 = 9$.

Να τοποθετήσετε ένα "X" στην αντίστοιχη θέση.

- α. Ε.Κ.Π. $(2, 5) =$

8 9 10 12

2

- β. Ε.Κ.Π. $(4, 9) =$

16 18 27 36

- γ. Ε.Κ.Π. $(3, 2, 5) =$

20 15 30 60

Λύση

- α. Τα πολλαπλάσια του 2 είναι 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...
 Τα πολλαπλάσια του 5 είναι 0, 5, 10, 15, 20, 25, ...
 Το Ε.Κ.Π. $(2, 5) = 10$.
- β. Τα πολλαπλάσια του 4 είναι 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...
 Τα πολλαπλάσια του 9 είναι 0, 9, 18, 27, 36, 45, ...
 Το Ε.Κ.Π. $(4, 9) = 36$.
- γ. Τα πολλαπλάσια του 2 είναι 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ...
 Τα πολλαπλάσια του 3 είναι 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...
 Τα πολλαπλάσια του 5 είναι 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...
 ...
 Το Ε.Κ.Π. $(3, 2, 5) = 30$.

3

Συμπλήρωσε με τις κατάλληλες λέξεις τα κενά στην πρόταση που ακολουθεί:

Για τον αριθμό 66 έχουμε $66:6 = 11$.

Ο αριθμός 66 είναι ένα (α) του αριθμού 6 και ο αριθμός 11 είναι (β) του 66.

Λύση

(α) πολλαπλάσιο (β) διαιρέτης.

Τοποθετήστε ένα "X" στην αντίστοιχη θέση

α. Μ.Κ.Δ. (3, 8) =

1 3 8 24

4

β. Μ.Κ.Δ. (16, 24) =

8 4 24 16

γ. Μ.Κ.Δ. (10, 40, 50) =

4 10 40 50 **Λύση**

- α. Οι διαιρέτες του 3 είναι οι αριθμοί 1, 3
Οι διαιρέτες του 8 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 8
Άρα Μ.Κ.Δ.(3, 8) = 1.
- β. Οι διαιρέτες του 16 είναι οι 1, 2, 4, 8, 16.
Οι διαιρέτες του 24 είναι οι 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
Οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 16 και 24 είναι οι 1, 2, 4, 8.
Άρα Μ.Κ.Δ. (16, 24) = 8.
- γ. Οι διαιρέτες του 10 είναι οι 1, 2, 5, 10.
Οι διαιρέτες του 40 είναι οι 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.
Οι διαιρέτες του 50 είναι οι 1, 2, 5, 10, 25, 50.
Οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών, 10, 40, 50 είναι οι 1, 2, 5, 10.
Άρα Μ.Κ.Δ. (10, 40, 50) = 10.

5

Να βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών 10, 11, 12, 13, 14, 15. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

Λύση

Διαιρέτες του 10: 1, 2, 5, 10.

Διαιρέτες του 11: 1, 11.

Διαιρέτες του 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Διαιρέτες του 13: 1, 13.

Διαιρέτες του 14: 1, 2, 7, 14.

Διαιρέτες του 15: 1, 3, 5, 15.

Οι αριθμοί 11, 13 είναι πρώτοι αριθμοί αφού έχουν διαιρέτες τον εαυτό τους και το 1.

Οι αριθμοί 10, 12, 14, 15 είναι σύνθετοι.

6

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς.

α. 106 β. 440 γ. 325

Λύση

$$\begin{array}{r|l} \alpha. & 106 \\ & 2 \\ & 53 \\ & 1 \end{array} \quad \text{Άρα } 106 = 2 \cdot 53$$

$$\begin{array}{r|l} \beta. & 440 \\ & 2 \\ & 220 \\ & 2 \\ & 110 \\ & 2 \\ & 55 \\ & 5 \\ & 11 \\ & 11 \\ & 1 \end{array} \quad \text{Άρα } 440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r|l} \gamma. & 325 \\ & 5 \\ & 65 \\ & 5 \\ & 13 \\ & 13 \\ & 1 \end{array} \quad \text{Άρα } 325 = 5^2 \cdot 13$$

7

Η ανάλυση κάποιων αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έδωσε τα παρακάτω γινόμενα.

α. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ β. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ γ. $3 \cdot 13$

Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Λύση

α. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ β. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ γ. $3 \cdot 13 = 39$

8

Να υπολογίσετε το Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών 36 και 70.

Λύση

$$\begin{array}{r} 36 \ 2 \\ 18 \ 2 \\ 9 \ 3 \\ 3 \ 3 \\ 1 \end{array} \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r} 70 \ 2 \\ 35 \ 5 \\ 7 \ 7 \\ 1 \end{array} \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Εκτελούμε διαδοχικές διαιρέσεις ώστε να αναλύσουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

$$\text{Άρα Ε.Κ.Π.}(36, 70) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \text{ Μ.Κ.Δ.}(36, 70) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α. Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα του.

β. Αν ένας φυσικός έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

γ. Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών.

δ. αριθμός λέγεται ένας αριθμός που διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και το 1.

ε. Μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β είναι ο κοινός διαιρέτης των α και β .

στ. Δύο αριθμοί α και β λέγονται αν $\text{Μ.Κ.Δ.}(\alpha, \beta) = 1$.

2

Να σημειώσετε ένα Χ στο κατάλληλο τετραγωνάκι.

α. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών

2, 3, και 6 είναι ο αριθμός 12.

Σωστό

Λάθος

β. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών

2 και 12 είναι ο αριθμός 2.

γ. Ο αριθμός 13 είναι σύνθετος.

δ. Ισχύει $246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** α. Να γράψετε κατά αύξουσα τάξη τα πολλαπλάσια του 4.
β. Υπάρχει κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4 και 6 που να είναι μικρότερο ή ίσο του 12;
γ. Υπάρχουν κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 4 και 6 που να είναι μεγαλύτερα του 12; Πόσα είναι αυτά;
- 2** α. Ποιων φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο ο αριθμός μηδέν;
β. Ο αριθμός μηδέν έχει πολλαπλάσια; Αν ναι, ποια;
γ. Να απαντήσετε στις δύο παραπάνω ερωτήσεις, αν αντί του αριθμού 0 θεωρήσετε τον αριθμό 1.
- 3** ΕΚΠ (8, 12) = ;
Να γράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 8 και 12 και μετά τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (8, 12). Τι παρατηρείτε;
- 4** Να γράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των 5, 6, 10 και τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (5, 6, 10). Τι παρατηρείτε για τα κοινά πολλαπλάσια των 5, 6, 10 και για τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ (5,6,10);
α. Είναι ο 135 ένα από τα πολλαπλάσια του 11;
β. Αν διαπιστώσετε πως όχι, τότε να ελέγξετε αν υπάρχουν δύο διαδοχικά πολλαπλάσια του 11, που το ένα να είναι μικρότερο και το άλλο μεγαλύτερο από τον 135.

- 5** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Φυσικοί αριθμοί	0	1	2	3	4
Πολ/σια του 11, μεγαλύτερα του 30 και μικρότερα του 120							

- 6** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Φυσικοί αριθμοί	0	1	2
Πολ/σια του 6					
Πολ/σια του 8					

- 7** Ποιο είναι το ΕΚΠ(6, 8);

- 8** Να βρείτε το ΕΚΠ (4, 6, 18).

