

1.4 Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

Ερώτηση 1

Τι λέγεται ευκλείδεια διαίρεση;

Απάντηση

Αν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί, ο Δ (διααιρετός) και δ (διαιρέτης), $\delta \neq 0$ τότε βρίσκονται δύο άλληλοι φυσικοί αριθμοί, ο π (ακέραιο πηλίκο ή πηλίκο) και ο u (υπόλοιπο), ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta\pi + u \text{ και } 0 \leq u < \delta$$

Η διαδικασία αυτή λέγεται **ευκλείδεια διαίρεση**.

Ερώτηση 2

Τι καλείται τέλεια διαίρεση;

Απάντηση

Αν $u = 0$, τότε ισχύει $\Delta = \delta\pi$ και έχουμε την περίπτωση της **τέλειας** διαίρεσης.



Παρατήρηση

- Ο διαιρέτης δ μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0.
- Όταν $\Delta = \delta$ τότε το πηλίκο $\pi = 1$.
- Όταν ο διαιρέτης $\delta = 1$, τότε $\pi = \Delta$.
- Όταν διααιρετός $\Delta = 0$ τότε το πηλίκο $\pi = 0$.

Ερώτηση 3

Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5 και το 9;

Απάντηση

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0, 2, 4, 6 ή 8.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν Ευκλείδεια διαίρεση;

- α) $140 = 27 \cdot 5 + 5$ β) $1.285 = 85 \cdot 15 + 10$
 γ) $329 = 15 \cdot 13 + 134$

Λύση

- α) Έχουμε $u = 5$ που είναι αριθμός μικρότερος του 27. Άρα είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με το 27.
 β) Έχουμε $u = 10$ που είναι αριθμός μικρότερος του 85 και

του 15. Άρα, είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 85, είτε το 15.

- γ) Έχουμε $u = 134$ που είναι αριθμός μεγαλύτερος του 15 και του 13. Άρα, δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 15 ή το 13.

2

Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις και οι δοκιμές τους.

- α) $95:6$ β) $1424:18$ γ) $945:15$

δ) $4.422:22$

ε) $6182:441$

Λύση

$$\begin{array}{r} \text{α) } 95 \overline{) 6} \quad \text{Δοκιμή } 15 \\ 35 \overline{) 15} \quad \quad \quad \times 6 \\ 5 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 90 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{β) } 1424 \overline{) 18} \quad \text{Δοκιμή } 79 \\ 164 \overline{) 79} \quad \quad \quad \times 18 \\ 2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1422 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{γ) } 945 \overline{) 15} \quad \text{Δοκιμή } 63 \\ 45 \overline{) 63} \quad \quad \quad \times 15 \\ 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 945 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{δ) } 4422 \overline{) 22} \quad \text{Δοκιμή } 201 \\ 22 \overline{) 201} \quad \quad \quad \times 22 \\ 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4422 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ε) } 6182 \overline{) 441} \quad \text{Δοκιμή } 441 \\ 8 \overline{) 14} \quad \quad \quad \times 14 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6174 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 8 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6182 \end{array}$$

3

Αν ο v είναι φυσικός αριθμός, ποια πρέπει να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης $v:4$;

Λύση

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$$v = 4\kappa + \upsilon \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{N} \text{ και } 0 \leq \upsilon < 4.$$

Άρα τα υπόλοιπα της διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού v με τον αριθμό 4 μπορεί να είναι $\upsilon = 0$ ή $\upsilon = 1$ ή $\upsilon = 2$ ή $\upsilon = 3$.

4

Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 8 δίνει πηλίκο 72 και υπόλοιπο 5. Να βρείτε τον αριθμό.

Λύση

Έχουμε $\Delta = 8 \cdot 72 + 5 = 581$.

5

Ποιοι αριθμοί όταν διαιρούνται με το 8 δίνουν πηλίκο 7;

Λύση

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε

$$\Delta = 8 \cdot 7 + \upsilon \quad \text{με } 0 \leq \upsilon < 8.$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης μπορεί να είναι:

$$\upsilon = 0, \upsilon = 1, \upsilon = 2, \upsilon = 3, \upsilon = 4, \upsilon = 5, \upsilon = 6, \upsilon = 7.$$

$$\text{Για } \upsilon = 0, \Delta = 8 \cdot 7 = 56 \quad \text{Για } \upsilon = 1, \Delta = 8 \cdot 7 + 1 = 57$$

$$\text{Για } \upsilon = 2, \Delta = 8 \cdot 7 + 2 = 58 \quad \text{Για } \upsilon = 3, \Delta = 8 \cdot 7 + 3 = 59$$

$$\text{Για } \upsilon = 4, \Delta = 8 \cdot 7 + 4 = 60 \quad \text{Για } \upsilon = 5, \Delta = 8 \cdot 7 + 5 = 61$$

$$\text{Για } \upsilon = 6, \Delta = 8 \cdot 7 + 6 = 62 \quad \text{Για } \upsilon = 7, \Delta = 8 \cdot 7 + 7 = 63$$

$$\text{Για } \upsilon = 8, \Delta = 8 \cdot 7 + 8 = 64$$

6

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{α) } (64 + 32) : 4 \quad \quad \quad \text{β) } (64 : 4) + (32 : 4)$$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

$$\text{α) } (64 + 32) : 4 = 96 : 4 = 24$$

$$\text{β) } (64 : 4) + (32 : 4) = 16 + 8 = 24$$

Παρατηρούμε ότι $(64 + 32) : 4 = (64 : 4) + (32 : 4)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

- α. Η διαδικασία $\Delta = \delta \cdot \pi + \dots$ με $0 \leq \upsilon < \delta$ καλείται ευκλείδεια διαίρεση.
 β. Όταν $\upsilon = 0$ τότε η διαίρεση καλείται
 γ. Όταν $\Delta = \delta$ τότε $\pi = \dots$
 δ. Όταν $\delta = 1$ τότε $\pi = \dots$

2 Να σημειώσετε ένα Χ στο κατάλληλο τετραγωνάκι.

- α. Η ισότητα $126 = 25 \cdot 5 + 1$ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση.
 β. Τα υπόλοιπα της διαίρεσης του 13 με το 4.
 γ. Ο αριθμός 739 διαιρείται με το 9.
 δ. Ο αριθμός $18x$ διαιρείται με το 3.
 ε. Η διαίρεση $0:5$ δεν ορίζεται

Σωστό Λάθος

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.

- α. $91:7$ β. $120:5$ γ. $136:17$ δ. $3588:23$ ε. $58117:89$ στ. $34200:456$

2 Να υπολογίσετε: α. Πόσο κοστίζει το κάθε παγωτό, αν για 7 παγωτά πληρώσαμε 14€.

β. Την πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει περίμετρο 231 μέτρα.

γ. Πόσα δοχεία των 5 κιλών χρειαζόμαστε για να αδειάσουμε 320 κιλά λάδι.

3 Ένας μαθητής στην αρχή της σχολικής χρονιάς αγόρασε 15 τετράδια και 23 στυλό διαρκείας και πλήρωσε 3790 λεπτά. Αν κάθε στυλό κοστίζει 80 λεπτά, να βρείτε πόσο κοστίζει κάθε τετράδιο.

4 Για αναμικτικά δώσαμε συνολικά 18€. Αν παίρναμε 6 αναμικτικά παραπάνω θα δίναμε 30€. Πόσο κοστίζει το κάθε αναμικτικό;

- 5** Να γράψετε από τους αριθμούς 3432, 4581, 864, 156, 62775, 730 αυτούς που διαρούνται.
α. με το 2 β. με το 5 γ. με το 3 δ. με το 9
- 6** Να συμπληρώσετε τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.
α. i. 52...3 ii. 2...61 ώστε να διαιρούνται με το 3.
β. 6...4... ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 2 και το 9.
- 7** Να γίνουν οι παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις με τις δοκιμές τους.
α. $134 : 8$ β. $315 : 25$ γ. $5124 : 15$
- 8** Αν Δ είναι φυσικός αριθμός
α. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\Delta : 5$.
β. Να βρείτε τους φυσικούς Δ , που, διαιρούμενοι με το 5, δίνουν πηλίκο 7.
- 9** Να γραφτούν οι διαιρέσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες:
α. $5 \cdot 13 = 65$ β. $7 \cdot 16 = 112$ γ. $126 = 72$
δ. $124 = 48$ ε. $27 \cdot 31 = 837$ στ. $36 \cdot 45 = 1620$
- 10** Να γίνουν όπου είναι δυνατό οι διαιρέσεις.
α. $2004 : 2004$ β. $0 : 1324$ γ. $5398 : 1$ δ. $1932 : 0$
- 11** Να γράψετε από τους αριθμούς 4816, 805, 3600, 28575, 933 αυτούς που διαιρούνται.
α. με το 2 β. με το 5 γ. με το 3 δ. με το 9
- 12** Να συμπληρωθούν τα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς
α. i 6_53 ii. 9_1 ώστε να διαιρούνται με το 3
β. $8_3_$ ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 5 και το 9.
- 13** Να δικαιολογήσετε ότι οι αριθμοί: α. $9a$ β. $18a + 21$ γ. $15a - 3$
όπου a φυσικός αριθμός, διαιρούνται με το 3.
- 14** Αν Δ είναι φυσικός αριθμός
α. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\Delta : 8$
β. Να βρείτε τους φυσικούς Δ , που διαιρούμενοι με το 8, δίνουν πηλίκο 5.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**ΘΕΜΑ 1**

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

1. Τι λέγεται ευκλείδεια διαίρεση;
2. Τι καλείται τέλεια διαίρεση;
3. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 , το 3 , το 5 και το 9;

ΘΕΜΑ 2

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις και οι δοκιμές τους
α. $84 : 2$ β. $1325 : 12$ γ. $4.532 : 22$
2. Αν n είναι φυσικός αριθμός, ποια πρέπει να είναι τα υπόλοιπα $n : 6$;
3. Να βρείτε τον αριθμό που όταν διαιρεθεί με το 6 δίνει υπόλοιπο 3 και πηλίκο 45.
4. Να κάνετε την πράξη $(68 + 12) : 4$

ΘΕΜΑ 3

1. Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς 232 , 445 , 531 , 62.232, 89.880 διαιρούνται με το 2 , το 3 , το 5 και με το 9.
2. Να συμπληρώσετε το ψηφίο στους παρακάτω αριθμούς ώστε να διαιρούνται με το 3.
α. $34.....5$ β. $76....9$ γ. $21...4$
3. Να συμπληρώσετε το ψηφίο στους παρακάτω αριθμούς ώστε να διαιρούνται με το 9.
α. $56...8$ β. $24...9$ γ. $76...2$
4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε ο αριθμός να διαιρείται με το 2 και το 9
 $2...6...7$

ΘΕΜΑ 4

1. Να γραφούν οι διαιρέσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες
α. $6 \cdot 12 = 72$ β. $12 \cdot 5 = 60$ γ. $15 \cdot 5 = 75$
2. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις
α. $2376 : 2376$ β. $0 : 23$ γ. $65 : 0$
3. Να δικαιολογήσετε ότι οι παρακάτω αριθμοί διαιρούνται με το 5
α. $15x$ β. $25x + 125$ γ. $60x - 25$

