Μέρος 1ο – Άλγεβρα
Ερωτήσεις θεωρίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρική παράσταση

1 Ποιοι αριθμοί λέγονται πραγματικοί;

Απάντηση

Πραγματικοί ονομάζονται όλοι οι αριθμοί που υπάρχουν στην πραγματικότητα. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

---

2 Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί;

Απάντηση

Ρητοί λέγονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος, όπου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακέραιοι αριθμοί.

---

3 Ποιοι αριθμοί λέγονται άρρητοι;

Απάντηση

Άρρητοί λέγονται οι αριθμοί που δε είναι ρητοί.

---

4 Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού;

Απάντηση

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α, συμβολίζεται με $|α|$ και ισούται με την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.

---

5 Πώς προσθέτουμε δύο αριθμούς;

Απάντηση

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

---

6 Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς;

Απάντηση

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο +.
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο –.

---

7 Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;

Απάντηση

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=$ $=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\bullet 1=\alpha$
	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Επιπλέον ισχύει ότι:

- $\alpha\cdot 0=0$.
- Αν $\alpha\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$.
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

---

8 Τι ονομάζεται δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ακέραιο;

Απάντηση

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu\geq 2$ συμβολίζεται με α^ν και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλαδή: $\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$. Ισχύει ακόμη: $\alpha^0=1$, $\alpha^1=\alpha$ και $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$

---

9 Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο;

Απάντηση

$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
$(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

---

10 Ποια είναι η σειρά προτεραιότητας των πράξεων;

Απάντηση

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Απαλοιφή των παρενθέσεων
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

---

11 Πώς ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

Απάντηση

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

---

12 Ποιες είναι οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας;

Απάντηση

Οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας είναι οι εξής:

- $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha, \quad$ αν $\alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|, \quad$ αν $\alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}, \quad$ αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$
- $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \quad$ αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$

---

§1.2 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρική παράσταση

13 Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;

Απάντηση

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

---

14 Τι ονομάζεται μονώνυμο;

Απάντηση

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα.

---

15 Ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος ενός μονωνύμου;

Απάντηση

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του υψωμένων στους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

---

16 Τι είναι ο βαθμός ενός μονωνύμου;

Απάντηση

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή.
Βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

---

17 Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια;

Απάντηση

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια.

---

18 Ποια μονώνυμα λέγονται ίσα και ποια αντίθετα;

Απάντηση

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα ενώ αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα.

---

19 Ποιο μονώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό; Τι βαθμό έχει το σταθερό μονώνυμο και τι το μηδενικό

Απάντηση

Οι αριθμοί θεωρούνται ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε σταθερά μονώνυμα.
Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

---

20 Πώς υπολογίζεται το άθροισμα μονωνύμων;

Απάντηση

Το άθροισμα **ομοίων** μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

---

21 Πώς υπολογίζεται το άθροισμα μονωνύμων;

Απάντηση

Το άθροισμα **ομοίων** μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

---

22 Πώς υπολογίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Απάντηση

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:
• συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους
• κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

---

§1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση κι αφαίρεση πολυωνύμων

23 Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

Απάντηση

Πολυώνυμο ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα δύο ή περισσοτέρων μονωνύμων, τα οποία δεν είναι όμοια μεταξύ τους.

---

24 Τι ονομάζεται όρος ενός πολυωνύμου;

Απάντηση

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο, λέγεται όρος του πολυωνύμου.

---

25 Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου;

Απάντηση

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

---

26 Ποιο είναι το σταθερό και ποιο το μηδενικό πολυώνυμο; Τι βαθμό έχουν;

Απάντηση

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται σταθερό πολυώνυμο.
Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

---

27 Τι είναι η αναγωγή ομοίων όρων;

Απάντηση

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

---

28 Πώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

---

§1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

29 Πώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

---

§1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

30 Τι ονομάζεται ταυτότητα;

Απάντηση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

---

31 Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Απάντηση

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

<u>Απόδειξη</u>: $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

---

32 Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha-\beta)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Απάντηση

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

<u>Απόδειξη</u>: $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 -2\alpha\beta + \beta^2$

---

33 Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha^2-\beta^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Απάντηση

$\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

<u>Απόδειξη</u>: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

---

34 Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Απάντηση

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

<u>Απόδειξη</u>: $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 =$

$= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

---

35 Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha-\beta)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Απάντηση

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

<u>Απόδειξη</u>: $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 =$

$= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

---

§1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

36 Τι είναι η παραγοντοποίηση;

Απάντηση

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

---

§1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

37 Τι είναι το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων;

Απάντηση

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

---

38 Τι είναι ο Μ.Κ.Δ. δύο ή περισσότερων ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων;

Απάντηση

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

---

§1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

39 Τι ονομάζεται ρητή αλγεβρική παράσταση;

Απάντηση

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση. Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

---

§1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

40 Πώς προσθέτουμε ή αφαιρούμε ρητές παραστάσεις;

Απάντηση

• Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
• Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
• Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.
• Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

41 Πώς λύνουμε εξισώσεις β΄ βαθμού;

Απάντηση

• Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄ μέλος.
• Αναλύουμε το α΄ μέλος σε γινόμενο παραγόντων.
• Εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν (0).
• Λύνουμε τις εξισώσεις που προέκυψαν.

---

42 Ποιες λύσεις έχει μια δευτεροβάθμια εξίσωση αναλόγως τις τιμές τις διακρίνουσας;

Απάντηση

Για την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ισχύει ότι:

• Αν $\Delta > 0$, έχει δύο άνισες λύσεις τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

• Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή λύση την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

• Αν $\Delta < 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη).

---

§2.4 Κλασματικές εξισώσεις

43 Πώς λύνουμε μια κλασματική εξίσωση;

Απάντηση

- Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Παίρνουμε περιορισμούς, δηλ. προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

---

§2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

44 Τι ισχύει αν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά

---

45 Τι ισχύει αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δυο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση

- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ***ίδια φορά***.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την **αντίστροφη φορά**.

---

46 Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη ανισότητες;

Απάντηση

Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη ανισότητες, αρκεί να έχουν την ίδια φορά. Στην περίπτωση αυτή, θα προκύψει ανισότητα με την ίδια φορά.

---

47 Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη ανισότητες;

Απάντηση

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη ανισότητες, αρκεί να έχουν την ίδια φορά και τα μέλη τους να είναι θετικά. Στην περίπτωση αυτή, θα προκύψει ανισότητα με την ίδια φορά.

---

48 Μπορούμε να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε κατά μέλη ανισότητες;

Απάντηση

Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα.

---

49 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, με τι ισούται το α και το β;

Απάντηση

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha=\beta=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

50 Τι ονομάζεται λύση της εξίσωσης $\alpha x+\beta y=\gamma$;

Απάντηση

Λύση μιας εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

---

51 Τι ισχύει αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία;

Απάντηση

• Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
• Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

---

52 Τι παριστάνει η ευθεία με εξίσωση $y=k$;

Απάντηση

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k), ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x΄x.

---

53 Τι παριστάνει η ευθεία με εξίσωση $x=k$;

Απάντηση

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (k, 0), ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y΄y.

---

54 Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y;

Απάντηση

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

---

§3.2 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

55 Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

Απάντηση

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

---

§3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

56 Ποια βήματα ακολουθούμε για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης;

Απάντηση

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

---

57 Ποια βήματα ακολουθούμε για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών;

Απάντηση

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

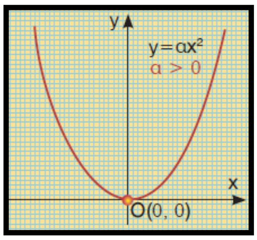
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§4.1 Η συνάρτηση $y=\alpha x^2$

58 Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$;

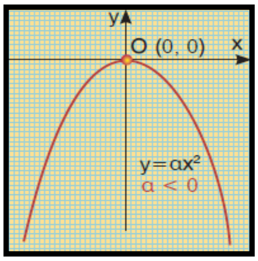
Απάντηση

Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$, έχει γραφική παράσταση μία καμπύλη που είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y΄y$.



Ειδικότερα:

- Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x΄x$ και παίρνει ελάχιστη τιμή την $y=0$, όταν το $x=0$.



- Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x΄x$ και παίρνει μέγιστη τιμή την $y=0$, όταν το $x=0$.

.

---

§4.2 Η συνάρτηση $y=αx^2+βx+γ$ με $α \neq 0$

59 Ποια συνάρτηση λέγεται τετραγωνική;

Απάντηση

Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y=αx^2+βx+γ$ με $α \neq 0$

---

60 Ποια είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx^2+βx+γ$ με $α \neq 0$;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=αx^2+βx+γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- Κορυφή το σημείο $Κ(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α})$, όπου $Δ = β^2-4αγ$ και
- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{β}{2α}$.

---

61 Πότε η συνάρτηση $y=αx^2+βx+γ$ με $α \neq 0$ έχει μέγιστο και πότε ελάχιστο;

Απάντηση

- Αν $α > 0$, η συνάρτηση $y = αx^2+βx+γ$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y=-\frac{Δ}{4α}$, όταν $x=-\frac{β}{2α}$.
- Αν $α < 0$, η συνάρτηση $y = αx^2+βx+γ$ παίρνει μέγιστη τιμή $y=-\frac{Δ}{4α}$, όταν $x=-\frac{β}{2α}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§5.1 Σύνολα

62 Με ποιους τρόπους μπορούμε να παραστήσουμε τα στοιχεία ενός συνόλου;

Απάντηση

α) Με αναγραφή των στοιχείων του.
β) Με περιγραφή των στοιχείων του.
γ) Με διάγραμμα Venn.

---

63 Πότε δυο σύνολα λέγονται ίσα;

Απάντηση

Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

---

64 Πότε σύνολο Α είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β;

Απάντηση

Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

---

65 Ποιο σύνολο λέγεται κενό σύνολο;

Απάντηση

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\varnothing$.

---

§5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

66 Τι είναι το πείραμα τύχης;

Απάντηση

Ένα πείραμα το οποίο όσες φορές κι αν το επαναλάβουμε, δε μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά του, λέγεται πείραμα τύχης.

---

67 Τι είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Απάντηση

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

---

68 Τι είναι το ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης;

Απάντηση

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

---

69 Ποιο ενδεχόμενο λέγεται βέβαιο και ποιο αδύνατο;

Απάντηση

Το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο (και είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος).
Το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο (και είναι το κενό σύνολο).

---

§5.3 Η έννοια της πιθανότητας

70 Να διατυπώσετε τον κλασικό ορισμό πιθανότητας

Απάντηση

Σ' ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α ονομάζεται ο αριθμός $P(A)=\dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

---

71 Μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α;

Απάντηση

Η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου Α είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το 0 και μικρότερος ή ίσος από το 1, αφού το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων. Δηλαδή ισχύει: $0 \le P(A) \le 1$

Μέρος 2ο - Γεωμετρία
Ερωτήσεις θεωρίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§1.1 Ισότητα τριγώνων

72 Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται κύρια στοιχεία του τριγώνου.

---

73 Πόσο είναι το άθροισμα γωνιών ενός τριγώνου;

Απάντηση

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^0.

---

74 Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

Απάντηση

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι τα εξής:
- **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.
- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

---

75 Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους;

Απάντηση

Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις γωνίες του χαρακτηρίζεται ως:
- **Οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **Αμβλυγώνιο**, όταν έχει μία γωνία του αμβλεία.
- **Ορθογώνιο**, όταν έχει μία γωνία του ορθή.

---

76 Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές τους;

Απάντηση

Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις γωνίες του χαρακτηρίζεται ως:

- **Σκαληνό**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες..
- **Ισοσκελές**, όταν έχει δυο πλευρές ίσες.
- **Ισόπλευρο**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

---

77 Πότε δυο τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

---

78 Τι ισχύει αν δυο τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία. Ειδικότερα στα ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

---

79 Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Απάντηση

- **1^{o} κριτήριο (Π-Γ-Π):** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
- **2^{o} κριτήριο (Γ-Π-Γ):** Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- **3^{o} κριτήριο (Π-Π-Π):** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

---

80 Πότε δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

---

81 Ποιες είναι ιδιότητες ενός ισοσκελούς τριγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του, συμπίπτουν.

---

82 Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος;

Απάντηση

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
Αντίστροφα, κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

---

83 Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

Απάντηση

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
Αντίστροφα, κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της.

---

§1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

84 Τι ισχύει αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία;

Απάντηση

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

---

85 Τι ισχύει αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του;

Απάντηση

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

---

86 Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων;

Απάντηση

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.

---

87 Ποια τμήματα λέγονται ανάλογα;

Απάντηση

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα β, γ ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

---

88 Ποιες είναι οι ιδιότητες των αναλογιών;

Απάντηση

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

---

89 Τι ισχύει για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου;

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

---

90 Τι ισχύει για τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

---

§1.5 Ομοιότητα

91 Πότε δυο πολύγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

---

92 Τι είναι ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων σχημάτων;

Απάντηση

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι' αυτό λέγονται ομόλογες και ο λόγος τους λέγεται λόγος ομοιότητας.

---

93 Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

---

§1.6 Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων

94 Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων;

Απάντηση

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

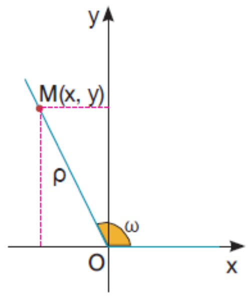
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^0<\omega<180^0$

95 Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω, με $0^0 < \omega < 180^0$;

Απάντηση

Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y), διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση ρ = OM ισχύει:



$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}} = \frac{y}{x}$$

---

96 Τι πρόσημο έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας;

Απάντηση

Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε: ημω>0, συνω>0, εφω>0.

---

97 Τι πρόσημο έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας αμβλείας γωνίας;

Απάντηση

Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε: ημω>0, συνω<0, εφω<0

---

§2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

98 Τι ισχύει για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών ;

Απάντηση

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° – ω ισχύουν:

- ημ(180° – ω) = ημω
- συν(180° – ω) = –συνω
- εφ(180° – ω) = –εφω

---

§2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

99 Αποδείξτε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $ημ^2ω+συν^2ω=1$

Απάντηση

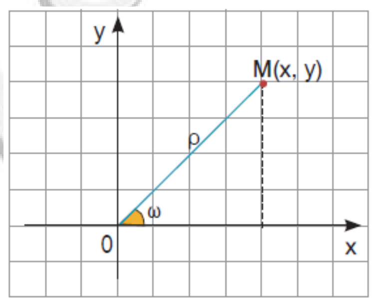
Η απόσταση ενός σημείου Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων είναι:

$$ρ=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{οπότε} \quad ρ^2=x^2+y^2$$

Αν διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με το $ρ^2$, τότε έχουμε:

$$\frac{ρ^2}{ρ^2}=\frac{x^2}{ρ^2}+\frac{y^2}{ρ^2} \quad \text{άρα} \quad \left(\frac{x}{ρ}\right)^2+\left(\frac{y}{ρ}\right)^2=1$$

Επειδή όμως $ημω=\frac{y}{ρ}$ και $συνω=\frac{x}{ρ}$, η προηγούμενη ισότητα γίνεται: $ημ^2ω+συν^2ω=1$

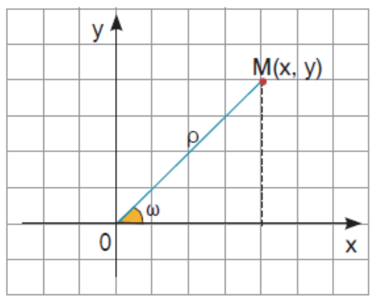


---

100 Αποδείξτε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $εφω=\frac{ημω}{συνω}$

Απάντηση

$$\frac{ημω}{συνω}=\frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}}=\frac{y\cdot ρ}{x\cdot ρ}=\frac{y}{x}=εφω$$



---

§2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

101 Διατυπώστε το νόμο των ημιτόνων.

Απάντηση

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.
Δηλαδή σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

---

102 Διατυπώστε το νόμο των συνημιτόνων.

Απάντηση

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$
