

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\eta\mu x$

Μονάδες 10

A2. Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ .

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=a+βi$, $a,β \in \mathbb{R}$ ισχύει $z-\bar{z}=2β$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.

Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ ,

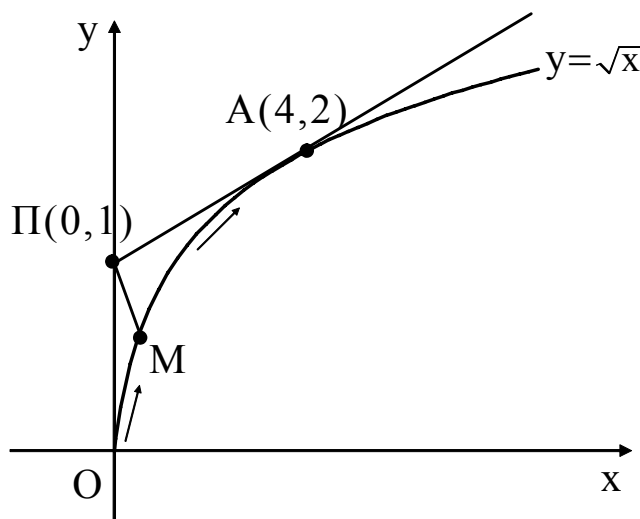
ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση $d=(ΠΜ)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες 6

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 225

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 303

A3. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - i| = 1 + \text{Im}(z) \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = 1 + y \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1 + y \stackrel{y > -1}{\Leftrightarrow} x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

B2. $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \Leftrightarrow w\bar{w} + 3wi = 3\bar{w}i - 1 \Leftrightarrow$

$$|w|^2 + 3(w - \bar{w})i + 1 = 0 \Leftrightarrow \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 + 3 \cdot 2yi \cdot i + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 8 = 2\sqrt{2}$

B3. Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

$$\begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$(1) \stackrel{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Άρα **A(2, 1)** και **B(-2, 1)**.

B4. $(KA) = (KB) = \rho = 2\sqrt{2} \rightarrow \mathbf{KAB}$ ισοσκελές

$$\left. \begin{aligned} (AB)^2 &= \left(\sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} \right)^2 = 16 \\ (KA)^2 + (KB)^2 &= 8 + 8 = 16 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{π.θ.} \\ \Rightarrow \mathbf{KAB} \text{ ορθογώνιο} \end{array}$$

M μέσο του AB $\rightarrow M(0, 1)$

M μέσο του ΚΛ $\rightarrow \Lambda(0, -1) \rightarrow \mathbf{u = -i}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)'$, $t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c$, $t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $x(t) = 16t$, $t \geq 0$

Γ2. Παρατήρηση: Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Αναζητούμε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από το σημείο $\Pi(0, 1)$.

$$(\epsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow (\epsilon) : y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$$

$$\Pi \in C_f \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 4$$

Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow \mathbf{A(4, 2)}$

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4} \text{ min ή } t_0 = 15 \text{ sec}$$

Άρα η οπτική επαφή διαρκεί **15sec**

Γ3. 1^{ος} τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(4, 2)$

είναι η $(\epsilon) : y = \frac{1}{4}x + 1$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} \right) dx$$

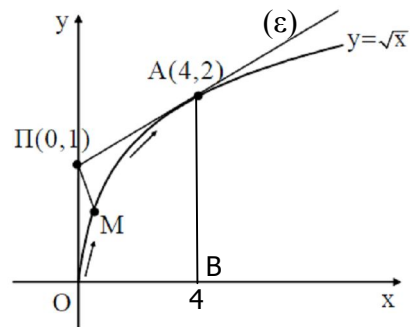
$$= \frac{1}{4} \int_0^4 x dx + \int_0^4 1 dx + \int_0^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + [x]_0^4 - \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_0^4 = 2 + 4 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}^2$$

2^{ος} τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = (\text{ΟΠΑΒ}) - \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{(\text{ΟΠ}) + (\text{ΑΒ})}{2} \cdot (\text{ΟΒ}) - \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_0^4 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}^2$$



$$\Gamma 4. M(x, y) \rightarrow M(x, \sqrt{x}) \rightarrow M(16t, 4\sqrt{t})$$

$$d(t) = (\text{ΠΜ}) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1} \right)' = \frac{256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γν.αύξουσα στο } (0, +\infty)$$

1^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4} \right]$ ως πράξεις συνεχών

$$\bullet g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$$

$$\bullet g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο

$\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή

είναι μοναδική.

2^{ος} τρόπος

• Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) = -\infty$$

$$\bullet g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα

$t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι

μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0	t_0	$+\infty$
$d'(x)$		○	
$d(x)$	↘		↗

Η d είναι γν.φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γν.αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f(0) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ = 0 \cdot [1 + f(0)] = 0,$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0) = 1$$

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = x$$

Δ2. Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0) \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(0) < f(1) - f(0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) \quad (2)$$

Επίσης $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, από συνέπειες Θ. Bolzano η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .

1^{ος} τρόπος Η f' είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} .

Είναι $0 < \xi$ και $f'(0) < f'(\xi)$ από (2)

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ,

2^{ος} τρόπος Θ.Μ.Τ. με τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[0, \xi]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, \xi)$, τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} > 0, \text{ από (2)}$$

Επομένως είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Άρα η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Δ3. Είναι $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = f'(x) - 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0)$$

και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα $x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		\circ	
$g(x)$			

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $g(0) = f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \text{ με } g(x) \geq 0.$$

Δ4. Είναι $g(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^2 g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [f(x) - x] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 x dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx > 2$$

Δ5. Είναι $g(x) \geq 0$, άρα $E = \int_0^1 g(x) dx = e - \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\int_0^1 [f(x) - x] dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = e - 2 \quad (1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση h , με $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2, x \in [1, 2]$

• Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\bullet h(1) = \int_0^1 f(t) dt - 2 \stackrel{(1)}{=} e - 2 - 2 = e - 4 < 0$$

$$h(2) = \int_0^2 f(t) dt - 2 > 0 \text{ από } \Delta 4$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$

$$\text{τέτοιο ώστε } h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^\xi f(t) dt = 2$$