

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A.1 Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 9

A.2 Πότε μια συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται “1-1”;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta$ , στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

**Μονάδες 2**

δ. Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε είναι υποχρεωτικά  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Μονάδες 2**

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών  $z, \bar{z}$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 2**

στ. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει παράγουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx .$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

α. Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i ,$$

να βρείτε τους  $z_1, z_2$ .

**Μονάδες 10**

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  ισχύουν  $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$  και  $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$ :

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  έτσι, ώστε  $z = w$  και

**Μονάδες 10**

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $|z - w|$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι “1-1”.

**Μονάδες 7**

β. Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1,2005)$  και  $B(-2,1)$ ,

να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $M$  της  $C_f$ , στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι κάθετη στην ευθεία

$$(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005.$$

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i.  $f(0) = 0$

**Μονάδες 4**

ii.  $f'(0) = 1$ .

**Μονάδες 4**

β. Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3.$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  και  $f'(x) > f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:

i.  $xf(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$ .

Μονάδες 6

ii.  $\int_0^1 f(x) dx < f(1).$

Μονάδες 4

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30'** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ