

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

Μονάδες 8

**β.** Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ ;

Μονάδες 4,5

**Β.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = e^{1-x}$  είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 2,5

**β.** Η συνάρτηση  $f$  με  $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$ , όπου

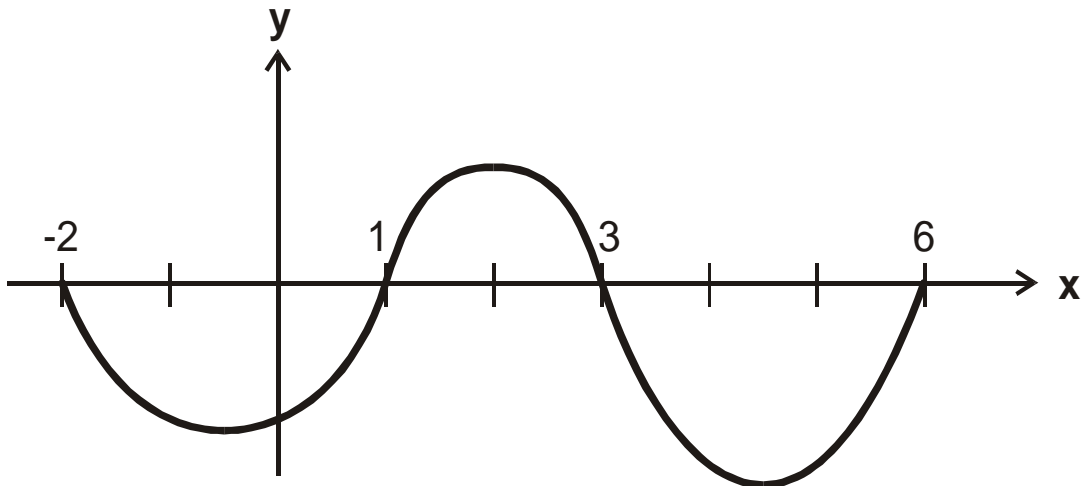
$x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 2,5

γ. Αν  $f'(x) = g'(x) + 3$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - g(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 2,5

**Β.2.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[-2,6]$ .



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $z^2 + 2z + 2 = 0$ , να αποδείξετε ότι  $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$ .

Μονάδες 12

**β.** Αν  $z_1$  είναι ρίζα της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου  $n$  για τις οποίες  $z_1^n$  είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας  $z_1$  η εικόνα της ρίζας  $z_2$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5.$$

α. Να βρείτε το  $f(0)$ .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0=0$ .

Μονάδες 9

γ. Αν  $h(x) = e^{-x}f(x)$ , να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $h$  στα σημεία  $A(0, f(0))$  και  $B(0, h(0))$  αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 4ο**

Η τιμή  $P$  (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος,  $t$  μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 4 + \frac{t - 6}{t^2 + \frac{25}{4}}.$$

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 5

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**