



## Η Τέχνη των Μαθηματικών και τα Μαθηματικά στην Τέχνη

---

Πεφκούλα Σταγιά

### Περίληψη

Στην παρούσα εισήγηση παρουσιάζεται μια παιδαγωγική παρέμβαση σύνδεσης της διδασκαλίας των Μαθηματικών με την Τέχνη. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται η εισαγωγή και διδασκαλία, με μέσο την Τέχνη, βασικών μαθηματικών εννοιών σε ένα τμήμα Α΄ δημοτικού κατά το σχολικό έτος 2017-2018. Η αποτελεσματικότητα της τέχνης ως διδακτικού μέσου έχει ποικιλοτρόπως ερευνηθεί και στοιχειοθετηθεί. Η κύρια συμβολή της εντοπίζεται στη διατήρηση και περαιτέρω ενίσχυση της πρωτότυπης και δημιουργικής σκέψης. Κύριος στόχος εμπλοκής της τέχνης στο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σχεδιασμό ήταν η ανάπτυξη και εδραίωση θετικής στάσης απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Συγκεκριμένα έργα τέχνης, κυρίως πίνακες ζωγραφικής αλλά και δείγματα αρχαϊκών και αρχαίων μορφών τέχνης, κυρίως κεραμικής, αξιοποιήθηκαν ως παιδαγωγικά εργαλεία. Συνδέθηκαν με μια σειρά στόχων για την απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών για την Α΄ δημοτικού όπως η απαρίθμηση ή καταμέτρηση ποσοτήτων, η αναπαράσταση αριθμών, η ανάλυση σε επιμέρους αθροίσματα και η σύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων με τις αντίστοιχες ποσότητες καθώς επίσης και στοιχεία γεωμετρίας. Συνδέθηκαν επίσης με παιγνιώδη τρόπο με συγκεκριμένα στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών που σχετίζονται άμεσα με την τέχνη όπως οι έλικες – σπείρες του Αρχιμήδη και οι αριθμοί Φιμπονάτσι.

**Λέξεις κλειδιά:** Μαθηματικά, Τέχνη, Εποικοδομητισμός, Δημιουργικότητα

*"I'm interested in mathematics only as a creative art"*

(G.H. Hardy, A mathematician's apology, 1941)

*Τα ανώτερα μαθηματικά μου τα έκανα στο σχολείο της θάλασσας.*

*Ιδού και μερικές πράξεις για παράδειγμα:*

*Η ευτυχία είναι η ορθή σχέση ανάμεσα στις πράξεις (σχήματα)*

*και στα αισθήματα (χρώματα).*

*Η ζωή μας κόβεται, και οφείλει να κόβεται,*

*στα μέτρα που έκοψε τα χρωματιστά χαρτιά του ο Matisse.*

(Ο. Ελύτης, Ο μικρός ναυτίλος, 1985)

### 1. Εισαγωγή

Αν και είναι σημαντική η έρευνα που επικεντρώνει στις βασικές μαθηματικές έννοιες που μπορούν τα παιδιά της προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας να αποκτήσουν, να κατανοήσουν και να εμπεδώσουν (αναπαραστάσεις αριθμών, απαρίθμηση, απλές μαθηματικές πράξεις, επίλυση προβλημάτων, γεωμετρία, μετρήσεις και χωρικές δεξιότητες), δεν



ισχύει το ίδιο και για τη διδακτική αξιοποίηση αυτού του σώματος γνώσεων (Gifford, 2004).

Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση έρχονται αντιμέτωποι με μια διττή πρόκληση: από τη μια να κοινωνήσουν απαιτητικές έννοιες της λογικο-μαθηματικής σκέψης και από την άλλη αυτό να γίνεται με μαθησιακά και γνωστικά προκλητικό τρόπο ώστε το ενδιαφέρον των παιδιών να είναι ζωντανό (Κολέζα, 2000 · Kaminski and Sloutsky, 2013).

Παρ' όλο που μεγάλο μέρος της καθημερινής δουλειάς στο σχολείο αφιερώνεται στα μαθηματικά διαπιστώνεται ότι οι μαθητές και μαθήτριες συναντούν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση ακόμα και των πιο βασικών μαθηματικών εννοιών και πολύ γρήγορα εδραιώνουν μια αρνητική στάση απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο. Πολλοί μάλιστα μαθητές και μαθήτριες φτάνουν στο σημείο να φοβούνται και να απεχθάνονται τα μαθηματικά (Βοσιιάδου, 2005). «Τα μαθηματικά κείμενα δίνοντας την εντύπωση της σφηνοειδούς ή της ιερογλυφικής γραφής γίνονται αποκρουστικά και το πρώτο συναίσθημα, που δημιουργείται στην ψυχή των παιδιών, είναι άγχος. Κλίμα εντελώς ασυμβίβαστο και ανταγωνιστικό της σκέψης» (Πολυδούρης, 1976: 92-93). Αυτό οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι πρόκειται για δύσκολες αφηρημένες έννοιες όσο και στην ψυχολογική διάθεση με την οποία αυτές προσεγγίζονται (Τζεκάκη, 2010). Οι Nicol & Crespo (2005) μιλώντας για την μαθηματική εκπαίδευση σημειώνουν ότι η ποιότητα ενός έργου δεν είναι απαραίτητο να κρίνεται από το βαθμό της σχέσης του με την πραγματική ζωή αλλά κυρίως από το βαθμό της επιθυμίας των μαθητών να εμπλακούν και να σκεφτούν για τα μαθηματικά που εμπεριέχονται στο έργο.

Στην παρούσα εισήγηση παρουσιάζεται μια διαδικασία παιδαγωγικής και διδακτικής αξιοποίησης της τέχνης κατά την διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών ως ουσιαστικό και αποτελεσματικό μέσο διαμεσολάβησης για την κατανόηση και εμπέδωσή τους. Ένας από τους πρωτεύοντες στόχους είναι η δημιουργία και εδραίωση θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο με την προσδοκία η θετική αυτή στάση να ακολουθήσει τα παιδιά σε όλη την μετέπειτα σχολική τους πορεία.

## **2. Θεωρητικό πλαίσιο**

### **2.1. Η Διδακτική των Μαθηματικών**

Η θεωρία του κονστρουκτιβισμού κατέχει κεντρική θέση στη διδακτική των μαθηματικών το τελευταίο τέταρτο του 20<sup>ου</sup> αιώνα και στις αρχές του 21<sup>ου</sup> και εδραιώνεται όλο και περισσότερο με νέα θεωρητικά και ερευνητικά δεδομένα. Η συμβολή της έγκειται στο γεγονός ότι προκρίνει την ενεργητική νοητική δραστηριότητα ως πρωταρχικό διαμεσολαβητικό παράγοντα έναντι εκείνου των αισθητηριακών δεδομένων και της παθητικής ακρόασης για την



## «Προτάσεις Τέχνης και Πολιτισμού στην Εκπαίδευση»

απόκτηση και κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών και συμβολικών παραστάσεων. Στο πλαίσιο αυτό η μαθηματική γνώση δεν είναι μια στατική κατάσταση αλλά μια διαδικασία διαρκούς επαναδόμησης όπου η προϋπάρχουσα γνώση επαναδιατάσσεται για να ενσωματώσει με λειτουργικό τρόπο κάθε νέα λογικο-μαθηματική γνωστική πρόκληση (Κολέζα, 2000).

Εκείνος που μετουσίωσε την θεωρία του εποικοδομητισμού από θεωρία μάθησης σε «θεωρία διδασκαλίας», με τρόπο που να εμπεριέχει κάθε φορά και την ιδιαίτερη φύση του αντικειμένου που θα διδαχθεί, είναι ο Bruner (Κολιάδης, 1997). Ο Bruner (1997) αντιλαμβάνεται την ενεργητική νοητική δραστηριότητα κατά την διαδικασία της απόκτησης ολοένα και πιο σύνθετης λογικο-μαθηματικής σκέψης ως μια αλληλοδιάδοχη διαδικασία εσωτερικής αναπαράστασης της εξωτερικής πραγματικότητας από την πραξιακή (το παιδί μαθαίνει μέσα από τη δράση και τον χειρισμό αντικειμένων), στην εικονιστική (με τη χρήση εικόνων και εποπτικών μέσων) και τέλος στη συμβολική (το παιδί αναπαριστά την εξωτερική πραγματικότητα με τη χρήση αφηρημένων συμβόλων).

Η σύγχρονη έρευνα τείνει όλο και περισσότερο να αντιλαμβάνεται αυτές τις διαδικασίες της εσωτερικής αναπαράστασης όχι ως αλληλοδιάδοχες, εν είδει σταδίων, αλλά ως ταυτόχρονες και εναλλασσόμενες, καταδεικνύοντας ως μία από τις πλέον αποτελεσματικές στρατηγικές διδασκαλίας των μαθηματικών τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των εννοιών (Griffin, 2004). Η αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων καταδεικνύει την ικανότητα των μαθητών να μετασχηματίζουν τις δράσεις τους με το υλικό σε εικονιστικές και νοητικές διεργασίες κατασκευής της έννοιας (Moyer, 2001) και να τις επικοινωνούν ώστε να επιτύχουν βαθύτερη κατανόηση.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι συνήθης η εκπαιδευτική πρακτική της αξιοποίησης πολύχρωμων και καθημερινών αντικειμένων που έχουν νόημα για τα παιδιά. Η χρήση ποικιλίας υλικών και μέσων βοηθά στην οργάνωση και την κατασκευή της γνώσης, καθώς επιτρέπει τον χειρισμό των εννοιών και διαδικασιών με πολλούς τρόπους και από διαφορετικές οπτικές (Jacobs & Kusiak, 2006· Perry & Dockett, 2008).

Σύμφωνα με την Τζεκάκη (2007) τα κύρια χαρακτηριστικά μιας μαθηματικής δραστηριότητας είναι η «μαθηματική δράση», η «λεκτική διατύπωση», οι «διαδικασίες ελέγχου» και η φάση της «επισημοποίησης». Προκειμένου να είναι αποτελεσματική η μαθηματική διδασκαλία και να κινητοποιεί παρόμοιες διαδικασίες, οι νέες γνώσεις θα πρέπει να προσεγγίζονται μέσα από μια ποικιλία δραστηριοτήτων.

Ειδικότερα για την έννοια του αριθμού, ως έκφραση πληθική, προτείνονται πιο σύνθετες εκπαιδευτικές στρατηγικές οι οποίες επικεντρώνουν στην ιδιότητα της ποσότητας μέσα από συνθετικές διαδικασίες αναπαράστασης, απαρίθμησης, μέτρησης και σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων. Ιδιαίτερα αποτελεσματικές έχουν βρεθεί να είναι οι



δραστηριότητες μέτρησης που αξιοποιούν διαδικασίες αναπαράστασης της ίδιας ποσότητας με διαφορετικά αντικείμενα, εικόνες ή/και συμβολικά συστήματα (Bruner, 1997· Sophian, 2004).

Το εκπαιδευτικό υλικό επιδρά άμεσα στη μάθηση των μαθητών/τριών καθώς αλληλεπιδρούν με αυτό (Braswell, et al., 2011). Ωστόσο, η πρακτική αυτή, των πολλαπλών αναπαραστάσεων, ενέχει τον κίνδυνο να αποσπάσει την προσοχή των παιδιών από τον μαθησιακό στόχο, τα οποία έχουν την τάση να επικεντρώνουν στις καθαυτό ιδιότητες των αντικειμένων και όχι στο σκοπό για τον οποίο εντάσσονται στην εκπαιδευτική διαδικασία (Kaminski & Sloutsky, 2013· Fyfe et al., 2014· Star and Rittle-Johnson, 2015). Για την αποφυγή του κινδύνου αυτού προτείνεται η χρήση μονοσήμαντου εποπτικού υλικού καθώς και η χρήση έργων τέχνης και η σταδιακή και σχετικά άμεση μετακύλιση σε συμβολικές και αφαιρετικές αναπαραστάσεις (Fyfe et al., 2014).

## **2.2. Η Τέχνη στο σχολείο**

Η Τέχνη έχει ποικιλοτρόπως αξιοποιηθεί στην εκπαίδευση και ειδικότερα σε ό,τι αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών (Χασάπης, 2011· Ward, 2012). Τα τελευταία χρόνια η εκπαίδευση μέσω της τέχνης αλλά και η αξιοποίηση της τέχνης στην εκπαίδευση γίνεται ολοένα και πιο συστηματική (Βρεττός, 1999).

Η αξιοποίηση της τέχνης στη μαθηματική εκπαίδευση έγκειται στην κατανόηση και εμπέδωση μιας σειράς από αφηρημένες μαθηματικές έννοιες μέσα από συγκεκριμένα έργα καλλιτεχνικής έκφρασης που τις εμπεριέχουν. Οι μαθητές και οι μαθήτριες εμπλέκονται σε δημιουργικές διαδικασίες πρωτότυπης και αυθεντικής σκέψης και μάθησης των μαθηματικών της τέχνης και της τέχνης των μαθηματικών. Συμμετέχουν ενεργά σε ενδιαφέρουσες συζητήσεις και συναρπαστικές διαδικασίες διερεύνησης μιας σειράς από μαθηματικές έννοιες οι οποίες, μεταξύ άλλων, συμβάλλουν σημαντικά στην ανάπτυξη του εγκεφάλου (Sylvester, 1998). Επιπλέον, η δημιουργική σκέψη που καλλιεργείται με την ενεργητική αυτή διαδικασία της εμπλοκής με την τέχνη μεταφέρεται και αξιοποιείται και σε άλλα γνωστικά πεδία και απαιτητικές νοητικές δραστηριότητες (Gelineau, 2012).

Κατά τον Eisner (2002) οι τέχνες διδάσκουν τους μαθητές ότι τα προβλήματα δεν έχουν πάντα μόνο μία λύση, ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι να ερμηνεύσει κανείς τις καταστάσεις και συχνά οι απροσδόκητες λύσεις είναι και οι πιο ενδιαφέρουσες. Τα βοηθούν επίσης να εκφράσουν όσα δεν μπορούν ακόμη γλωσσικά να περιγράψουν. Η επιχειρηματολογία, μέσω της οποίας οι μαθητές προτείνουν αποδεικτικά στοιχεία για να υποστηρίξουν ένα ισχυρισμό, προσπαθούν να πείσουν τους συμμαθητές τους, εκφράζουν αμφιβολίες, διατυπώνουν ερωτήσεις και συσχετίζουν διαφορετικές απόψεις, θεωρείται ως βασικό συστατικό της εκπαίδευσης των μαθητών στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (Driver, Newton & Osborne, 2000).

Κατά τη διδασκαλία σύνθετων ή απαιτητικών εννοιών με την διαμεσολάβηση της τέχνης φαίνεται πως λαμβάνει χώρα μια διεργασία



μετασχηματίζουσας μάθησης (Dewey, 1980· Freire, 1977· Κόκκος κ.α., 2011). Κατά την διαδικασία αυτή, με την βοήθεια της τέχνης και μέσω της αισθητικής εμπειρίας (Mezirow, 1991, όπως παρατίθεται στο Κόκκος κ.α., 2011: 87) επαναξιολογούνται οι τρόποι με τους οποίους νοηματοδοτούνται οι καταστάσεις και ενεργοποιείται μια διαδικασία μετασχηματισμού ολόκληρης της δομής της σκέψης. Πρόκειται δηλαδή για μια διαδικασία δυναμικής αλληλεπίδρασης εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων μέσω ενός μηχανισμού εσωτερίκευσης-εξωτερίκευσης. Κατά την εσωτερίκευση οι μαθητές κωδικοποιούν εξωτερικά ερεθίσματα εντάσσοντάς τα λειτουργικά ή χαλαρά στα υπάρχοντα γνωστικά τους σχήματα ενώ κατά την εξωτερίκευση αποτυπώνουν τα εσωτερικευμένα γνωστικά σχήματα σε εξωτερικά παρατηρήσιμα σημεία. Οι πολλαπλές εσωτερικές παραστάσεις για μία έννοια είναι ένδειξη υψηλού επιπέδου λογικο-μαθηματικής σκέψης (Πατσιομίτου-Εμβλωτής, 2009· Διαμαντής, 2017).

«Υιοθετείται η άποψη των στοχαστών του Palo Alto (βλ. κυρίως Watzlawick, 1981 [1986]) ότι, για να πραγματοποιηθεί ολοκληρωμένη μάθηση, χρειάζεται η αλληλοσυμπληρούμενη λειτουργία των δύο ημισφαιρίων του εγκεφάλου. Αυτό σημαίνει ότι στο πλαίσιο της μετασχηματίζουσας μάθησης οι εμπυχωτές φροντίζουν να ενεργοποιείται τακτικά μέσω της αισθητικής εμπειρίας το συνήθως παραμελημένο δεξιό ημισφαίριο, ώστε να διευκολύνεται η ολιστική, συγκινησιακή και διαισθητική σύλληψη των καταστάσεων και έτσι να ενισχύεται ο κριτικός στοχασμός επάνω στις πεποιθήσεις» (Κόκκος κ.α., 2011: 89). Ένα θέμα μπορεί να διδαχθεί με πολύ πιο αποτελεσματικό τρόπο εάν κινητοποιεί ταυτόχρονα και τα δύο ημισφαίρια του εγκεφάλου (Κάτσιου - Ζαφρανά, 1988).

Τέλος, σύμφωνα με τον Vygotsky (1988) τα παιδιά, με την αξιοποίηση παιδαγωγικών εργαλείων και εποπτικών μέσων και στα πλαίσια μιας μαθησιακής διαδικασίας που ευνοεί την κοινωνική αλληλεπίδραση, είναι σε θέση να κατακτήσουν σταδιακά έννοιες και γνωστικά σχήματα τα οποία βρίσκονται ένα επίπεδο πάνω από αυτό στο οποίο βρίσκονται (η γνωστή ζώνη επικείμενης ανάπτυξης). Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και με τη βοήθεια διαφορετικών μορφών εξωτερικών παραστάσεων και κυρίως έργων τέχνης, μπορεί να κινητοποιείται μια διαδικασία κατά την οποία τα παιδιά συζητούν και διαπραγματεύονται γνωστικά σχήματα και νοήματα και συχνά αντιμετωπίζουν αδιέξοδα που τα οδηγούν σε επαναδιαπραγμάτευση των εσωτερικών γνωστικών σχημάτων και αναβάθμισή τους σε νέα, διευρυμένα και πιο δυναμικά σχήματα.

### **3. Μία απόπειρα εφαρμογής**

#### **3.1. Στοιχεία και στόχοι**

Με βάση τα παραπάνω έγινε απόπειρα εφαρμογής σε μία τάξη Α΄ δημοτικού με 16 μαθητές και μαθήτριες κατά το σχολικό έτος 2017-2018 στο Δημοτικό Σχολείο Αγίας Τριάδας Θεσσαλονίκης. Επιχειρήθηκε η προσέγγιση και



διαπραγμάτευση βασικών μαθηματικών εννοιών μέσω της Τέχνης. Μετά την επισταμένη μελέτη των σύγχρονων θέσεων σχετικά με την διδακτική των μαθηματικών, όπως αυτές εν συντομία παρατέθηκαν παραπάνω, διαπιστώθηκε ότι έχει εκφραστεί ένας προβληματισμός σχετικά με την αποτελεσματικότητα των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων κατά τη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών. Κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι αυτές αποσπούν την προσοχή των παιδιών, τα οποία έχουν την τάση να επικεντρώνουν στις καθαυτό τους ιδιότητες και όχι στην αφηρημένη μαθηματική έννοια για την οποία εντάσσονται στην μαθησιακή διαδικασία.

Στην παρούσα πρακτική εφαρμογή, υιοθετείται και δοκιμάζεται η υπόθεση ότι η τέχνη μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό διάμεσο κατά την διαδικασία της διαπραγμάτευσης και εσωτερίκευσης των απαιτητικών εννοιών, δίνοντας έτσι μια διέξοδο στο δίλημμα του παιδαγωγού για τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων ή μονοσήμαντου εποπτικού υλικού.

Οι κύριοι στόχοι που τέθηκαν ήταν:

- η απόκτηση θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά
- η διατήρηση και ενίσχυση της πρωτότυπης και δημιουργικής σκέψης
- η απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών
- η καλλιέργεια ικανοτήτων συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων

### **3.2. Μέσα και διαδικασίες**

Έργα τέχνης αξιοποιήθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς αποτελώντας ουσιαστικό και λειτουργικό μέρος της διδασκαλίας. Άλλες φορές χρησιμοποιήθηκαν ως μέρος μόνο μιας σειράς πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας και άλλες ως το κύριο και αποκλειστικό μέσο αναπαράστασης. Συχνά ζητούνταν από τους μαθητές και τις μαθήτριες να χρησιμοποιήσουν καθημερινά υλικά που βρίσκονταν γύρω τους με όποιον τρόπο ήθελαν ώστε να αναπαραστήσουν τις έννοιες που διδάσκονταν ή τις προβληματικές καταστάσεις που έθετε το έργο τέχνης. Η διαδικασία αυτή κινητοποιούσε την πρωτότυπη και δημιουργική σκέψη και βοηθούσε τόσο την παιδαγωγό όσο και τα ίδια τα παιδιά να διαπιστώσουν σε ποιο βαθμό είχαν κατανοήσει και εσωτερικεύσει τις μαθηματικές έννοιες. Συχνά οδηγούσε σε συναρπαστικές συζητήσεις και έντονες διαφωνίες σχετικά με μία έννοια και την αναπαράστασή της τόσο στο ίδιο το έργο τέχνης όσο και στους δικούς τους πρωτότυπους τρόπους αναπαράστασης.

#### **3.2.1. Παραδείγματα**

Ο αριθμός 4:



**Εικόνα 1.** Annie Leroy, *Ανεμώνες*



**Εικόνα 2.** Richard de Wolfe, *Just Ducky*, 2015

Με τον πίνακα της Leroy παρουσιάζεται και επιδιώκεται η κατανόηση της έννοιας του αριθμού τέσσερα ως ένα προς ένα αντιστοίχιση. Με τους πίνακες του de Wolfe και του Λύτρα εισάγεται η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης. Στη συνέχεια ελέγχεται ο βαθμός κατανόησης με αναπαραστάσεις που σκέφτονται και δημιουργούν τα παιδιά με αντικείμενα και υλικά καθημερινά που βρίσκονται μέσα στην σχολική τάξη.



**Εικόνα 3.** Αναπαράσταση μαθητών/τριών (ένα προς ένα αντιστοίχιση)



**Εικόνα 4.** Αναπαράσταση μαθητών/τριών του 1+3

Η έννοια του μισού:

Η έννοια του μισού αποτέλεσε ένα σημαντικό παράδειγμα έντονων συζητήσεων, διαφωνιών και αντιπαραθέσεων μεταξύ των μαθητών/τριών τόσο μέσα από την τέχνη όσο και κατά τις δικές τους απόπειρες αναπαράστασης της έννοιας. Το έναυσμα αποτέλεσε αναπάντεχα ο πίνακας «Εκρηκτική άνοιξη» του Νταλί με τρόπο που η διαπραγμάτευση της έννοιας



του μισού ξεκίνησε αρκετά νωρίτερα από τον προβλεπόμενο χρόνο και κράτησε για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα.



**Εικόνα 5.** Salvador Dali, *Spring Explosive*, 1965

Ο πίνακας αυτός του Νταλί αξιοποιήθηκε κατά τη συζήτηση του αριθμού τέσσερα. Ωστόσο προέκυψε αναπάντεχα έντονη διαφωνία για το εάν επρόκειτο πράγματι για τον αριθμό τέσσερα. Ένας μαθητής εξέφρασε την άποψη πως το μικρό κόκκινο μπουμπούκι δεν είναι ολόκληρο αλλά μισό. Αυτό πυροδότησε μια σειρά από έντονες και συναρπαστικές συζητήσεις και αλληπάλληλες απόπειρες αναπαράστασης του ολόκληρου και του μισού. Κατά την διαδικασία αυτή διαπιστώθηκε σε ένα πρώτο επίπεδο ότι τα καθημερινά αντικείμενα περισσότερο περιέπλεκαν παρά ξεκαθάριζαν την έννοια του αριθμού, αν και είχαν τεράστιο ενδιαφέρον (για παράδειγμα ένα λούτρινο κουταβάκι μπορεί να θεωρηθεί ολόκληρο ή μισό σκυλάκι ή το καπάκι από ένα στίλο είναι ή δεν είναι το μισό στίλο) ενώ η χρήση

## «Προτάσεις Τέχνης και Πολιτισμού στην Εκπαίδευση»

μονοσήμαντου υλικού (π.χ. χυμός ή απλό χαρτί) ήταν πιο ουσιαστική για την κατανόηση και αναπαράσταση της έννοιας του μισού ως καθαρού εννοιολογικού σχήματος. Κρίνουμε όμως πως πρόκειται για μια αυθεντική διαδικασία επίλυσης προβλήματος με εξηγήσεις, επιχειρηματολογία, αναστοχασμό και επαναδιαπραγμάτευση που οδηγούν τελικά σε μια βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

Σπείρες και Φιμπονάτσι: Καθ' όλη τη διάρκεια της χρονιάς και στο πλαίσιο ευέλικτης ζώνης αξιοποιήθηκαν στιγμές από την ιστορία των μαθηματικών και την τέχνη για παιχνίδι, χαρά, δημιουργία και αισθητική απόλαυση. Χρησιμοποιήθηκαν, για παράδειγμα, ταυτόχρονα οι «Πολύχρωμες Σπείρες», τοιχογραφία μεγάλων διαστάσεων που βρέθηκε στον οικισμό του Ακρωτηρίου της Σαντορίνης καθώς και τα σπирάλ της ακολουθίας φιμπονάτσι σε πολλές αναπαραστάσεις.



Εικόνα 6. Ακολουθία Φιμπονάτσι

#### 4. Συζήτηση

Κατά την παραπάνω απόπειρα εφαρμογής, κάποιες μόνο πτυχές της οποίας περιγράφηκαν εδώ, φάνηκε πως τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αυθεντική διαδικασία μάθησης που προκαλεί το ζωντανό ενδιαφέρον των παιδιών και κινητοποιεί τη δημιουργικότητά τους. Σχετικά με την πολύ καλά εδραιωμένη στη σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών θέση των πολλαπλών αναπαραστάσεων για την εισαγωγή και την εμπέδωση απαιτητικών αφηρημένων εννοιών, διαπιστώθηκε πράγματι η



αποτελεσματικότητα και η χρησιμότητά της. Οι εναλλαγές πραξιακών, εικονιστικών και συμβολικών αναπαραστάσεων λειτούργησαν εξαιρετικά αποτελεσματικά καθώς επίσης και η διαπραγμάτευση εννοιών στο πλαίσιο της κοινωνικής αλληλεπίδρασης επιβεβαιώνει τη θεωρία του Vygotsky για τη λειτουργία της ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης.

Ωστόσο, φάνηκε επίσης πως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις κάποιες φορές, λειτουργούν ως καταιγισμός ερεθισμάτων και πληροφοριών που καθυστερεί και συσκοτίζει την έννοια, τουλάχιστον προσωρινά. Η διαπίστωση αυτή χρήζει περαιτέρω έρευνας κατά την οποία είναι σημαντικό να διερευνηθεί το είδος και η ποιότητα των υλικών και εικονιστικών ή και συμβολικών αναπαραστάσεων, καθώς και ο τρόπος και ο χρόνος εισαγωγής τους όπως επίσης και οι ιδιαιτερότητες των διαφορετικών εννοιών και ο βαθμός δυσκολίας και αφαίρεσής τους.

Στην παρούσα εφαρμογή, η Τέχνη φάνηκε να αποτελεί σημαντικό διάμεσο μεταξύ της έννοιας και της κατανόησής της, της αλληλεπιδραστικής και διαρκούς διαδικασίας εσωτερίκευσης – εξωτερίκευσης και επαναδιαπραγμάτευσής της. Επίσης, μπορεί να συμβάλει θετικά στη συζήτηση και τους προβληματισμούς των αναπαραστάσεων, καθώς ένα έργο τέχνης μπορεί να λειτουργήσει ταυτόχρονα και ως πολλαπλή και ως μονοσήμαντη αναπαράσταση και μπορεί με πολύ καλά αποτελέσματα σε πολλά επίπεδα να αποτελέσει είτε μέρος της πολλαπλής αναπαράστασης είτε την μόνη αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας. Η Τέχνη ενεργοποιεί επίσης γνήσια μαθηματικά ερωτήματα καθώς και συζητήσεις που εμπεριέχουν αυθεντικές διαδικασίες διερεύνησης και επίλυσης προβλήματος, κινητοποιεί του μαθητές/τριες να επιχειρηματολογήσουν και να αναπτύξουν πρωτότυπους και δημιουργικούς τρόπους «μαθηματικής απόδειξης».

## **Βιβλιογραφικές αναφορές**

### **Ξενόγλωσσες**

- Dewey J., (1980). *Art as experience*. USA: The Penguin Group.
- Driver, R., & Oldham, V. (1986). "A constructivist approach to curriculum development in science". *Studies in Science Education*, 18, 105-122.
- Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). "Establishing the Norms of Scientific Argumentation in Classrooms". *Science Education*, 84, 287-312.
- Eisner, E. (2002). *The arts and the creation of mind*. USA: Yale University Press.
- Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26, 9-25.
- Gelineau, R. P. (2012). *Integrating the arts across the elementary school curriculum*. Belmont CA: Wadsworth.
- Gardner H. (1990). *Art Education and Human Development*. Los Angeles: The Getty Center for Education in the Arts.



- Geary D.C. (1994). *Children's mathematical development*. Washington D.C. : American Psychological Association
- Gifford, S. (2004) A New Mathematics Pedagogy for the Early Years: in search of principles for practice, *International Journal of Early Years Education*, 12(2), 99-115. Ανακτήθηκε στις 3/10/2019 από <http://dx.doi.org/10.1080/0966976042000225507>
- Griffin, S. (2004) Building Number Sense with Number Worlds: a mathematics program for young children, *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 173-180. Ανακτήθηκε στις 16/10/2019 από <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.012>
- Jacobs, R.V., & Kusiak, J. (2006). "Got tools? Exploring children's use of mathematics tools during problem solving". *Teaching Children Mathematics*, 12(9), 470-477.
- Kaminski, J. A., & Sloutsky, V. M. (2013). "Extraneous perceptual information interferes with children's acquisition of mathematical knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 351-363.
- Moyer, P. (2001). "Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.
- Nicol, C. & Crespo, S. (2005). "Exploring mathematics in imaginative places: rethinking what counts as meaningful contexts for learning mathematics". *School Science and Mathematics*. 105, (5), 240-252.
- Perry, B., & Dockett, S. (2008). "Young children's access to powerful mathematical ideas". In L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in ME*, pp. 75-108. Routledge.
- Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics στο Gutiérrez, A. and Boero P. (eds): *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sophian, C. (2004) Mathematics for the Future: developing a Head Start curriculum to support mathematics learning, *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 59-81. Ανακτήθηκε στις 29/9/2019 από <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.015>
- Star, J. and Rittle-Johnson, B. (2015). Toward an educational psychology of mathematics education. *Handbook of Educational Psychology*: Third Edition
- Sylvester, R. (1998). "Art for the brain's sake". *Educational Leadership*, 56 (3), 31-36.
- Verschaffel, L, Greer, B. and Torbeyns J. (2006), "Numerical Thinking". In Gutiérrez, A. and Boero P. (eds): *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Ward, R. A. (2012). *Math Art Fun: Activities for Discovering Mathematical Magic in Modern Art*. Houston: Bright Sky Press.



Zemal-Saul, C. (2009). "Learning to teach elementary school science as argument". *Science Education*, 93(4), 687-719.

### **Ελληνόγλωσσες**

- Βοσνιάδου, Σ. (2005). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg
- Βρεττός, Ι.Ε. (1999). *Εικόνα & Σχολικό Εγχειρίδιο. Επιλογή, Μεθοδολογική Προσέγγιση*. Αθήνα: Ανάγνωση.
- Bruner, J. (1997). *Πράξεις Νοήματος*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα
- Διαμαντής, Β. (2017). *Ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων σε δραστηριότητες μαθηματικής αφαίρεσης για μαθητές του δημοτικού σχολείου*. Μεταπτυχιακή εργασία.
- Freire, P. (1977). *Πολιτισμική δράση για την κατάκτηση της ελευθερίας*. Αθήνα: Καστανιώτη.
- Κάτσιου – Ζαφρανά Μ. (1988). "Ανθρώπινος εγκέφαλος και μάθηση". *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 42, 32 – 44.
- Κόκκος, Α. & Συνεργάτες. (2011). *Εκπαίδευση μέσα από τις τέχνες*. Αθήνα: Μεταίχιμο.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.
- Κολιάδης, Ε. (1997). *Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα
- Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής Α. (2009). "Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία". *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση*, 2 (3), 247-272. Ανακτήθηκε στις 23/10/2019 από:  
<http://earthlab.uoi.gr/thete/index.php/thete/article/view/40>
- Πολυδούρης, Β. (1976). *Το ταμπού των συμβόλων*. Αθήνα.
- Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg
- Vygotsky, L.S. (1988). *Σκέψη και Γλώσσα*. Αθήνα: Γνώση.
- Χασάπης, Δ. (2011). "Μαθηματικά & Τέχνες στην Εκπαίδευση: Αναζητώντας κοινούς τόπους". Στο, *Πρακτικά 9<sup>ου</sup> Δημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σ. 13-28

### **Πεφκούλα Σταγιά**

Εκπαιδευτικός, Δημοτικό Σχολείο Αγίας Τριάδας  
pstagia@gmail.com