

Η τροχιά της Σελήνης

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα σχετικά με την τροχιά της Σελήνης βρίσκεται στο βιβλίο των Halliday και Resnick:

Η δύναμη της παγκόσμιας έλξης που ασκεί ο Ήλιος πάνω στη Σελήνη, $F_{\text{H}\Sigma}$, είναι μεγαλύτερη (περίπου διπλάσια) από τη δύναμη που ασκεί η Γη πάνω στη Σελήνη, $F_{\text{Γ}\Sigma}$. Γιατί τότε η Σελήνη δε διαφεύγει από τη Γη (στη διάρκεια μιας ηλιακής έκλειψης για παράδειγμα);

Ανάλυση

Δίνονται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ και τα αστρονομικά δεδομένα:

μάζες kg	
Ήλιος	$1,966 \cdot 10^{30}$
Γη	$5,97 \cdot 10^{24}$
Σελήνη	$7,331 \cdot 10^{22}$

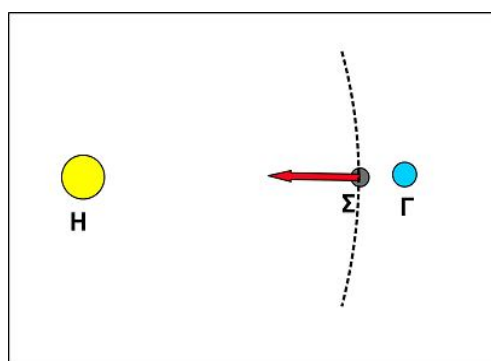
αποστάσεις m	
Ήλιος - Γη	$1,49 \cdot 10^{11}$
Γη - Σελήνη	$3,8 \cdot 10^8$

Υπολογίζουμε το πηλίκιο $F_{\text{H}\Sigma}/F_{\text{Γ}\Sigma}$ στρογγυλοποιώντας τις αστρονομικές τιμές:

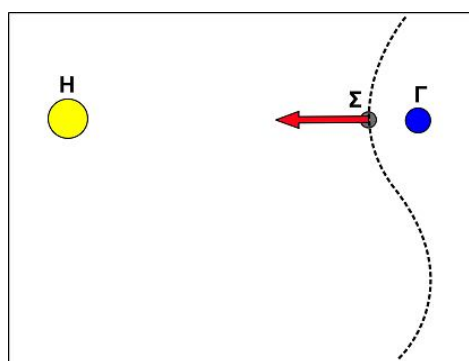
$$\frac{F_{\text{H}\Sigma}}{F_{\text{Γ}\Sigma}} = \frac{M_{\text{H}}}{M_{\text{Γ}}} \left(\frac{R_{\text{Γ}\Sigma}}{R_{\text{H}\Sigma}} \right)^2 \cong 2,5$$

Γιατί λοιπόν ο Ήλιος δεν αποσπά τη Σελήνη αφού την έλκει με διπλάσια δύναμη απ' ό,τι την έλκει η Γη; Η απάντηση είναι πως η Σελήνη είναι ήδη «αποσπασμένη» σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Η Γη απλώς διαταράσσει την τροχιά της.

Θα δείξουμε ότι η τροχιά της Σελήνης έχει τα κοίλα στραμμένα πάντοτε προς το εσωτερικό της τροχιάς της, όπως, ποιοτικά, φαίνεται στο Σχ1α ενώ η απεικόνιση του Σχ1β είναι λάθος.



Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

Είναι γνωστό ότι αν ένα σώμα κινείται σε καμπυλόγραμμη τροχιά, τότε η ασκούμενη σε αυτό συνισταμένη δύναμη έχει φορά προς το εσωτερικό της τροχιάς. (απόδειξη: το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται εξ' ορισμού στην τροχιά. Η διαφορά $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ των ταχυτήτων που έχει το σώμα δύο χρονικές στιγμές, με $\Delta t \rightarrow 0$, έχει φορά προς το εσωτερικό της καμπυλόγραμμης τροχιάς. Η συνισταμένη δύναμη, από το β' νόμο του Νεύτωνα, είναι $\vec{F} \approx \Delta \vec{v}$. Συνεπώς η δύναμη έχει φορά προς το εσωτερικό της τροχιάς.) Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο: αν η

συνισταμένη δύναμη είναι όπως στα Σχ1α και Σχ1β η τροχιά θα μοιάζει με αυτή του Σχ1α και όχι του Σχ1β. Η καμπυλότητα του Σχ1α είναι στην πραγματικότητα ανεπαίσθητη, λόγω της μεγάλης διαφοράς των αποστάσεων της Σελήνης από τον Ήλιο και τη Γη και δεν μπορεί να αποδοθεί γραφικά.

Η προσομοίωση στο **Interactive Physics** είναι διαφωτιστική δεδομένου ότι έχουμε τη δυνατότητα να εισάγουμε τις πραγματικές τιμές μαζών και αποστάσεων και να παρακολουθήσουμε τις τροχιές Γης και Σελήνης.

(Στην προσομοίωση μπορούμε να θέσουμε χρονικό βήμα ολοκλήρωσης ίσο με μια ημέρα δηλ. $8,64 \cdot 10^4$ s.)

Ο Ήλιος τοποθετείται στην αρχή των αξόνων και η αρχική θέση της Γης είναι στο αφήλιο. Η ταχύτητά της εκεί είναι η ελάχιστη.

Μεγάλος ημιάξονας, $a = 1,49597887 \times 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ AU}$

Μικρός ημιάξονας, $b = 1,49577 \times 10^{11} \text{ m} = 0,668459 \text{ AU}$

Εκκεντρότητα, $e = 1 - b^2/a^2 = 0,01671022$

Αφήλιο, $r_a = 1,52098 \times 10^{11} \text{ m} = 1,0167122 \text{ AU}$

Περιήλιο, $r_p = 1,47098 \times 10^{11} \text{ m} = 0,98328929 \text{ AU}$

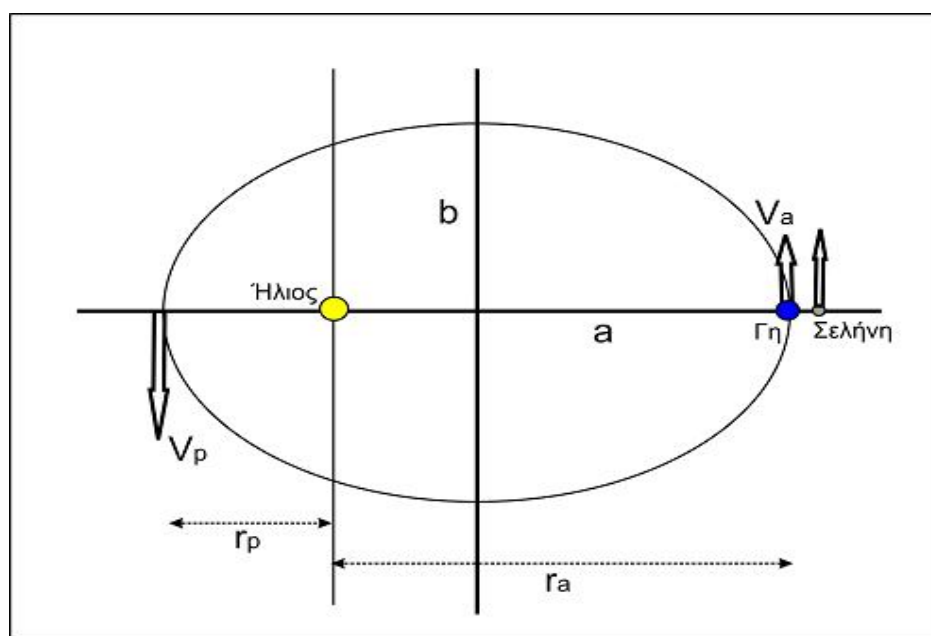
Ελάχιστη ταχύτητα Γης στο αφήλιο, $V_a = 29119,6 \text{ m/s}$

Μέγιστη ταχύτητα Γης στο περιήλιο, $V_p = 30109,3 \text{ m/s}$

Απόσταση Γης – Σελήνης = $3,8 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,0025401 \text{ AU}$

Σχετικά με την αρχική ταχύτητα της Σελήνης εργαζόμαστε «πειραματικά»: επιλέγουμε τέτοια τιμή ώστε η περιφορά της γύρω από τη Γη να διαρκεί 28 «βήματα», δηλ. 28 ημέρες.

Στο Σχ2 απεικονίζονται αυτά τα μεγέθη. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι, πρακτικά, ασήμαντη και ο Ήλιος βρίσκεται πολύ κοντά στο κέντρο της έλλειψης.



Σχήμα 2

Παρατήρηση Η προσομοίωση «τρέχει» γρηγορότερα αν χρησιμοποιήσουμε άλλες μονάδες:

Μονάδα μάζας=1M (μάζα του Ήλιου)

Μονάδα μήκους=1AU

Μονάδα χρόνου = 1 yr (έτος)

Τότε η σταθερή της παγκόσμιας έλξης θα είναι

$$G = 38,962 \text{ AU}^3/\text{yr}^2 \text{ M}$$

Και οι ρυθμίσεις για την προσομοίωση θα γίνουν:

Θέση X Ήλιου $X=0 \text{ AU}$

Θέση Y Ήλιου $Y=0 \text{ AU}$

Θέση X Γης $X = \text{μεγάλος ημιάξονας} = 1 \text{ AU}$

Θέση Y Γης $Y = 0 \text{ AU}$

Θέση X Σελήνης $X = 1,019250361 \text{ AU}$

Θέση Y Σελήνης $Y = 0 \text{ AU}$

Ταχύτητα της Γης κατά τον άξονα y στο αφήλιο $V_y = 6,138542 \text{ AU/yr}$

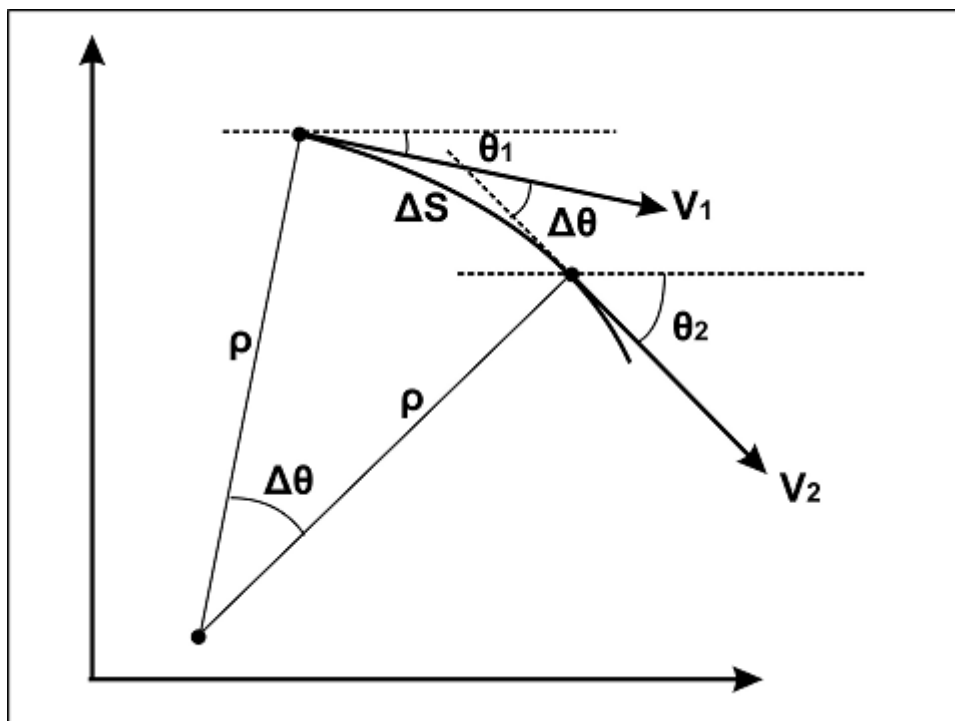
Ταχύτητα της Γης κατά τον άξονα x στο αφήλιο $V_x = 0 \text{ AU/yr}$

Ταχύτητα Σελήνης $V_x = 0,002 \text{ AU/yr}$

Ταχύτητα Σελήνης $V_y = 5,918001 \text{ AU/yr}$

Υπολογισμός της ακτίνας καμπυλότητας

Η ακτίνα καμπυλότητας $\rho(t)$ μπορεί να υπολογιστεί αν ξέρουμε την τροχιά $x=x(t)$, $y=y(t)$. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά ενός υλικού σημείου και η ταχύτητά του V_1 και V_2 δύο «διαδοχικές» χρονικές στιγμές. Οι κάθετες στην ταχύτητα ορίζουν την ακτίνα καμπυλότητας.



Από το σχήμα έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho} = \frac{V\Delta t}{\rho} = \theta_2 - \theta_1$$

Και από τα σχηματιζόμενα τρίγωνα

$$\varepsilon\phi\Delta\theta \cong \Delta\theta = \varepsilon\phi(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\varepsilon\phi\theta_2 - \varepsilon\phi\theta_1}{1 + \varepsilon\phi\theta_1 \varepsilon\phi\theta_2} = \frac{\frac{V_{2y}}{V_{2x}} - \frac{V_{1y}}{V_{1x}}}{1 + \frac{V_{1y}}{V_{1x}} \frac{V_{2y}}{V_{2x}}}$$

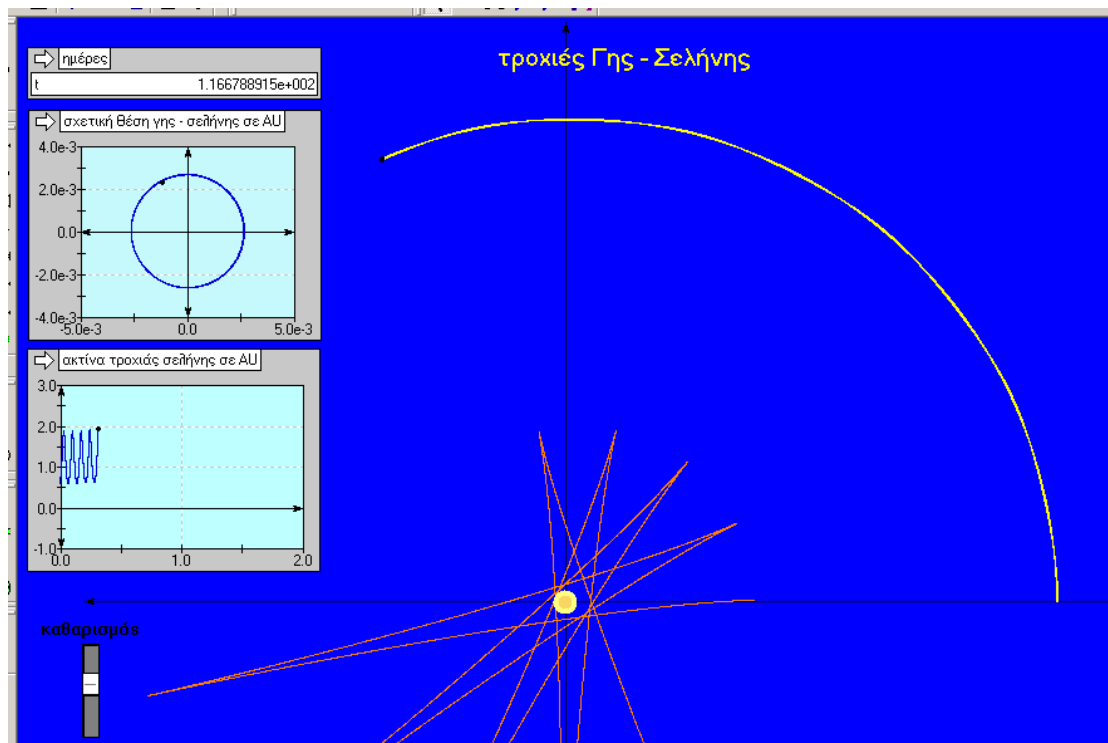
Αναπτύσσουμε κατά Taylor, π.χ

$$V_{2x} = V_{1x} + (dV_{1x}/dt)\Delta t = V_{1x} + \alpha_{1x} \Delta t ,$$

όπου α η επιτάχυνση και αντικαθιστούμε. Τελικά, με την προσέγγιση $\Delta t \rightarrow 0$ και κάποιες πράξεις, βρίσκουμε:

$$\rho = \frac{V^3}{\alpha_y V_x - \alpha_x V_y} .$$

(Εφαρμογή της σχέσης αυτής για την κυκλική, $\alpha = V^2 / R$, κίνηση δίνει $\rho = R$.)



Στο σχήμα φαίνονται οι κυκλικές τροχιές της Γης και της Σελήνης. Λόγω της μικρής μεταξύ τους απόστασης, συγκριτικά με την απόστασή τους από τον Ήλιο, οι δύο τροχιές και για τη συγκεκριμένη κλίμακα της οθόνης, δεν ξεχωρίζουν. Όμως σε κάποια σημεία που οι τροχιές πλησιάζουν η καμπύλη του σχήματος έχει μικρότερο πάχος. Και όπου οι τροχιές απομακρύνονται η καμπύλη είναι παχύτερη. Η αστεροειδής γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που είναι το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς της Σελήνης.