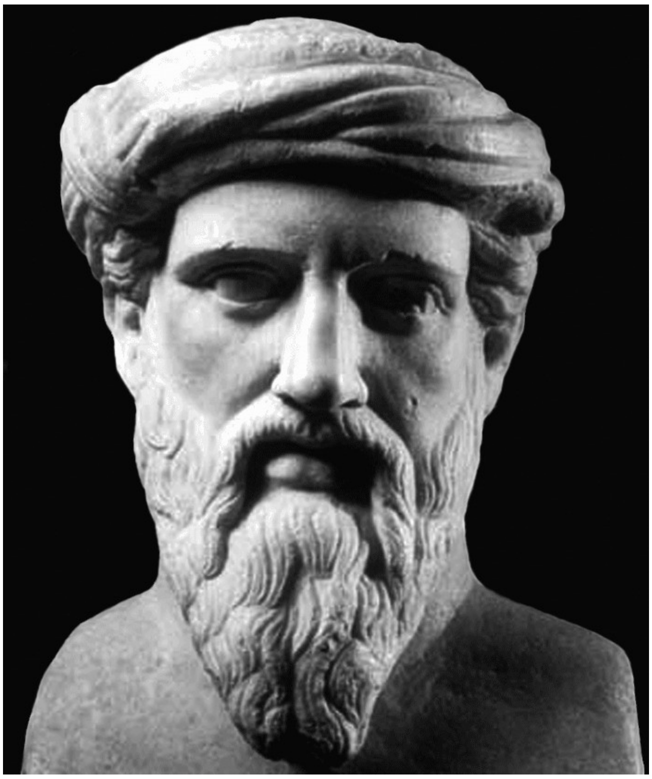
Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ
ΚΑΙ ΤΟΥ
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ



Παπαδοπούλου Γεωργία
Τμήμα Εφ. Μαθηματικών

Βασίλης Ευθυμίου
Τμήμα Επ. Υπολογιστών

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

Ο Πυθαγόρας, γιος του Μνήσαρχου και της Πυθαΐδας, γεννήθηκε στη Σάμο. Η γέννηση του πιθανολογείται ανάμεσα στο (592 και το 572 π.Χ.). Σημαντικός αριθμός ιστορικών ισχυρίζεται ως σίγουρη χρονολογία γέννησης του Πυθαγόρα το (585 π.Χ.). Το όνομα Πυθαγόρας, του το έδωσαν οι γονείς του προς τιμήν της Πυθίας που προφήτευσε την γέννηση του. Ο Πυθαγόρας, υπήρξε σημαντικός έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωμέτρης, θεωρητικός της μουσικής και ιδρυτής της πυθαγόρειας σχολής. Είναι ο κατεξοχήν θεμελιωτής των ελληνικών μαθηματικών και δημιούργησε ένα άρτιο σύστημα για την επιστήμη των ουρανίων σωμάτων, που κατοχύρωσε με όλες τις σχετικές αριθμητικές και γεωμετρικές αποδείξεις. Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος που ονόμασε τον εαυτό του "φιλόσοφο" και ο πρώτος που ανακάλυψε τα μουσικά διαστήματα από μία χορδή.

Ο Πρόκλος (Νεοπλατωνικός φιλόσοφος 410-485 π.Χ.) λέει πως πρώτος ο Πυθαγόρας ανύψωσε την γεωμετρία σε ελεύθερη επιστήμη, γιατί θεώρησε τις αρχές της από πάνω προς κάτω και όχι με βάση τα υλικά αντικείμενα. Ο Απολλώνιος ο λογιστικός, αναφέρει ότι προσέφερε εκατόμβη, όταν βρήκε ότι τ***ο τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων κάθετων πλευρών.*** Ενώ ο Διογένης Λαέρτιος (Βίοι Φιλοσόφων, Βιβλίο Όγδοο), αναφέρει για τον Πυθαγόρα ότι : " Νεαρός ακόμη, παρακινημένος από τη φιλομάθειά του έφυγε από την πατρίδα του για να μυηθεί σε όλες τις Ελληνικές και βαρβαρικές τελετές. Πήγε και στην Αίγυπτο και τότε ο Πολυτάρκης τον σύστησε με επιστολή του στον ’μαση. Έμαθε τέλεια τα Αιγυπτιακά, όπως λέει ο Αντιφών στο "Περί των εν αρετή πρωτευσάντων" και επισκέφτηκε τους Χαλδαίους και τους Μάγους. Κατόπιν στην Κρήτη με τον Επιμενίδη κατέβηκε στο Ιδαίον άντρο, αλλά και στην Αίγυπτο είχε μπει στα άδυτα. Έτσι γνώρισε τα μυστικά για τους θεούς. Στη συνέχεια επέστρεψε στη Σάμο, επειδή όμως βρήκε την πατρίδα του τυραννοκρατούμενη από τον Πολυκράτη, αναχώρησε για τον Κρότωνα της Ιταλίας."

Ο Πυθαγόρας με τη διδασκαλία του, αποσκοπούσε στα εξής: Πρώτον, στο να οδηγήσει τον άνθρωπο στην κατανόηση των νόμων της φύσης και δεύτερον, στο να βελτιώσει και να αναπτύξει τις ικανότητές του. Για τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του, τους πυθαγόρειους η ουσία των πραγμάτων βρίσκεται στους αριθμούς και στις μαθηματικές σχέσεις. Όπου οι αριθμοί και οι μαθηματικές σχέσεις είναι οι νόμοι που διέπουν τον φυσικό αλλά και τον πνευματικό μας κόσμο.

Γνωστή θεωρείται η πυθαγόρεια διδασκαλία της "μιμήσεως" κατά την οποία τα αισθητά υπάρχουν κατ' απομίμηση ατελή του τέλειου νοητού κόσμου. Έτσι εισάγεται στην Ελληνική φιλοσοφία η αντίληψη των δύο κόσμων, νοητού και αισθητού που επηρέασε στη συνέχεια, την θεωρία για τον κόσμο των Ιδεών του Πλάτωνα. Η αληθινή πηγή της σοφίας για τους Πυθαγόρειους είναι η ***τετρακτύς***, δηλαδή οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί που θεωρείται ότι συνδέονται μεταξύ τους με διάφορες σχέσεις. Πραγματικά, από αυτούς τους τέσσερις αριθμούς, μπορεί κανείς να κατασκευάσει τις αρμονικές αναλογίες της τέταρτης, της πέμπτης και της ογδόης. Οι αναλογίες αυτές δημιουργούν την αρμονία (το άκουσμα για το ωραίο) που για τους Πυθαγόρειους είχε όχι απλώς γενική σημασία, αλλά κυριολεκτικά κοσμική.

Η Τετρακτύς (τετράδα) του Πυθαγόρα, σημαίνει το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών, δηλαδή ο αριθμός 10=(1+2+3+4). Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ως ρίζα και πηγή κάθε δημιουργίας την τετράδα αυτή των αριθμών και αποτελούσε τον μέγιστο και ιερότερο όρκο τους.

Ο Πυθαγόρας απέδιδε στους αριθμούς μεταφυσικές ιδιότητες, λέγοντας ότι αυτοί, οι αριθμοί, διέπουν τις κινήσεις των αστέρων και ότι κατέχουν ορισμένη θέση στο Διάστημα. Οι Πυθαγόρειοι εργάσθηκαν με σημαντικές αποδόσεις και στη Γεωμετρία. Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα, οι αριθμοί δεν είναι απλά σύμβολα ποσοτικών σχέσεων αλλά αποτελούν την ουσία του κόσμου, γι' αυτό και είναι ιεροί. Η *μονάδα* (1) συμβολίζει το πνεύμα, τη δύναμη εκείνη από την οποία προέρχεται το παν. Η *δυάδα* (2) δείχνει τις δύο μορφές της ύλης - Γη και Νερό. Η *τριάδα* (3) φανερώνει το χρόνο στις τρεις του διαστάσεις - παρόν, παρελθόν, μέλλον κ.ο.κ. Η κατανόηση των κοσμικών φαινομένων ήταν δυνατή με τη αριθμολογία, τη γεωμετρία και τη μουσική. Κατά το Διογένη το Λαέρτιο, ο Πυθαγόρας θεωρούσε ως αρχή όλων των πραγμάτων τη μονάδα. Από τη μονάδα προερχόταν η αόριστη δυάδα με την εκδήλωση της μονάδας και ως ύλης. Από τη μονάδα και την αόριστη δυάδα γίνονταν οι αριθμοί. Από τους αριθμούς τα σημεία. Από αυτά οι γραμμές, από τις οποίες σχηματίζονται τα επίπεδα, και από αυτά τα στερεά.

Επίσης, στους Πυθαγόρειους πρέπει να οφείλεται η γνώμη ότι η Γη στρέφεται γύρω από τον άξονά της και ταυτόχρονα γύρω από τον Ήλιο. Η ταχύτατη κίνηση όλων των ουράνιων σφαιρών δημιουργεί ήχους και οι τελευταίοι την αρμονία. Αρμονία επίσης για το σώμα είναι η ψυχή, η οποία διατηρεί κάποια συμμετρία ανάμεσα στο υλικό και το πνευματικό στοιχείο του ανθρώπου. Η ψυχή έχει τις ιδιότητες της ταυτότητας, της ετερότητας, της στάσης και της κίνησης (τετρακτύς).

Ο Πυθαγόρας δεν έγραψε κανένα έργο, έτσι το βάρος της διάσωσης της διδασκαλίας του έπεσε στους μαθητές του.. Ο Πυθαγόρας είχε πολλούς και πιστούς μαθητές. Κάθε φορά που έμπαιναν στο σπίτι του, τους έλεγε να λένε τα εξής. Που έσφαλα; τι έκανα; τι έπρεπε να κάνω και δεν έκανα; Οι μαθητές του επί πέντε χρόνια παρέμεναν σιωπηλοί και άκουγαν μόνο τις ομιλίες του Πυθαγόρα χωρίς ποτέ να βλέπουν τον ίδιο. Μετά το τέλος αυτής της δοκιμασίας, οι μαθητές του, γίνονταν μέλη του σπιτιού του και είχαν δικαίωμα να τον βλέπουν. Η εισδοχή των νέων μαθητών στη σχολή του Πυθαγόρα. γινόταν μετά από αυστηρή και πολύχρονη άσκηση. Ο υποψήφιος έπρεπε να παραμένει σιωπηλός, να είναι εγκρατής, να έχει ισχυρό χαρακτήρα. Ταυτόχρονα ήταν απαραίτητο να συνδέεται με στενή φιλία με τους άλλους μαθητές. Ο Πυθαγόρας. υποστήριζε ότι "**φίλος εστίν άλλος εγώ**" και "**φιλίαν τ' είναι εναρμόνιον ισότητα**". Διάφορα ρητά ήταν γραμμένα στις αίθουσες της σχολής, όπως "**επί χοίνικος μη καθίζειν**" (να μη φροντίζεις για το μέλλον), "**τας λεωφόρους μη βαδίζειν**" (να μην παρασύρεσαι από τη γνώμη του πλήθους, αλλά μόνο τη γνώμη των "επαΐοντων" να θεωρείς σεβαστή). Πριν από το βραδινό τους ύπνο, οι μαθητές έπρεπε να ελέγχουν όσα έγιναν ή δεν έγιναν κατά την ημέρα που πέρασε. Γενικά όμως, η ηθική διδασκαλία των Πυθαγορείων περιέχεται μέσα σε 71 στίχους που είναι γνωστοί ως "χρυσά έπη" του Πυθαγόρα.

Μολονότι η προσωπικότητα και το έργο του Πυθαγόρα υπήρξαν τόσο σημαντικά στην αρχαία Ελλάδα, εξαιτίας της μυστικότητας με την οποία περιβαλλόταν η διδασκαλία του, δεν υπάρχουν συγκεκριμένες πληροφορίες για τη ζωή του. Λέγεται ότι ήταν μαθητής του φιλόσοφου Φερεκύδη στη Λέσβο και του Θαλή και Αναξίμανδρου στη Μίλητο. Όντας ακόμη έφηβος, η φήμη του έφθασε εις την Μίλητο προς τον Θαλήν και εις την Πριήνη προς τον Βίαντα, τους δύο εκ των επτά σοφών της αρχαιότητος και σε πολλά μέρη οι άνθρωποι εξεθείαζαν τον νεανία, αποκαλώντας τον, τον "εν Σάμω κομήτην". Μόλις εις την Σάμο άρχισε να εμφανίζεται το τυραννικό καθεστώς του Πολυκράτους, εποχή όπου ο Πυθαγόρας ήταν περίπου δεκαοκτώ ετών, προβλέποντας ότι η τυραννία θα εμπόδιζε τα σχέδιά του και την φιλομάθειά του, έφυγε μαζί με τον Ερμοδάμαντα τον Κρεοφύλειο για την Μίλητο κοντά στον Φερεκύδη και στον φυσικό Αναξίμανδρο και στον φιλόσοφο Θαλή. Με την προσωπικότητα και την ευφράδεια της ομιλίας του, κέρδισε τον θαυμασμό και την εκτίμηση όλων και κατέστη κοινωνός των διδασκαλιών των. Μάλιστα ο Θαλής διακρίνοντας την μεγάλη διαφορά του Πυθαγόρα εν συγκρίσει με τους άλλους νέους, του παραστάθηκε με ευχαρίστηση και του μετέδωσε όσες γνώσεις κατείχε, που ήταν δυνατόν να μεταδοθούν. Κοντά στον Θαλή ο Πυθαγόρας έλαβε την πρώτη του σοβαρή εκπαίδευση πάνω στα μαθηματικά, τη γεωμετρία και όσα έχουν σχέση με τους αριθμούς και τους υπολογισμούς. Ήταν ο Θαλής που προέτρεψε τον Πυθαγόρα να μεταβεί στην Αίγυπτο και να συναναστραφεί με τους ιερείς της Μέμφιδος και της Διοσπόλεως, από τους οποίους ο ίδιος ο Θαλής είχε λάβει πολλές γνώσεις, προλέγοντας πως εάν ο Πυθαγόρας ερχόταν σε επαφή μαζί τους, θα γινόταν θεϊκότερος και σοφότερος από όλους τους ανθρώπους.

Είναι βέβαιο ότι έμεινε 22 χρόνια στην Αίγυπτο κοντά στους ιερείς της Μέμφιδος, της Ηλιούπολης και της Διοσπόλεως. Όταν όμως ο βασιλιάς των Περσών Καμβύσης κατέλαβε την Αίγυπτο, ο Πυθαγόρας. μεταφέρθηκε αιχμάλωτος στη Βαβυλώνα και έτσι είχε την ευκαιρία να συναναστραφεί και με τους Πέρσες μάγους. Ελευθερώθηκε μετά από 12 χρόνια με τη μεσολάβηση του Έλληνα προσωπικού γιατρού του βασιλιά Δημοκήδη. Επέστρεψε στη Σάμο σε ηλικία πλέον 56 χρόνων. Ο Πυθαγόρας όταν έφτασε στην πατρίδα του, επιχειρούσε με κάθε τρόπο να μεταδώσει στους συμπατριώτες του μαθήματα των αριθμών καθώς και άλλες γνώσεις της πολύ πλούσιας παιδείας του. Όμως οι Σάμιοι δεν έδειξαν το απαιτούμενο ενδιαφέρουν ούτε και ακολούθησαν τις διδασκαλίες του στον τρόπο ζωής τους, με αποτέλεσμα ο Πυθαγόρας να παραιτηθεί εν τέλει, από τις προσπάθειες διαπαιδαγώγησης τους. Τον θαύμαζαν βεβαίως και του προσέφεραν αξιώματα και μάλιστα τον ανάγκαζαν να συμμετέχει σε όλες τις δημόσιες λειτουργίες, ενώ η φήμη του, τόσο είχε απλωθεί σε όλη την Ελλάδα που άλλοι μεγάλοι φιλόσοφοι επίσης ήλθαν εις την Σάμο, ζητώντας να τον συναντήσουν. Ο Πυθαγόρας διαπίστωσε ότι η συμμόρφωσή του προς τα πρόσθετα αυτά καθήκοντα προς την πατρίδα δυσχέραινε την δυνατότητα να φιλοσοφεί. Επιπλέον, η τυραννίδα του Πολυκράτους είχε πλέον επικρατήσει και ο φιλόσοφος την θεωρούσε εν μέρει υπεύθυνη για την αδιαφορία των Σαμίων προς τα μαθηματικά και την φιλοσοφία. Θεωρώντας πως δεν είναι σωστό ένας άνδρας φιλόσοφος με ελεύθερα φρονήματα να ζει κάτω από ένα τέτοιο πολίτευμα, απεφάσισε να μετοικίσει προς την νότια Ιταλία - είχε δε την γνώμη πως πατρίδα του είναι η χώρα εκείνη όπου περισσότεροι άνθρωποι είναι δυνατόν να βρεθούν με καλή διάθεση να μαθαίνουν.

Κι έτσι λοιπόν έφυγε και κατευθύνθηκε προς την Σικελία, όπου τον υποδέχτηκαν με ευμένεια διάφορες ιταλικές πόλεις. Έκανε μεγάλη εντύπωση στους εκεί κατοίκους. Ήταν ένας άνδρας με μακρόχρονες περιπλανήσεις και εξαιρετικός από την ίδια του τη φύση, καλά προικισμένος από την τύχη, φιλελεύθερος στα φρονήματα και μεγάλος, με πολλή χάρη και ευπρέπεια στον λόγο και στο ήθος και σε όλα τα άλλα, με αποτέλεσμα να γοητεύσει τους ανώτατους άρχοντες της πόλεως. Συγκεκριμένα, στον Κρότωνα, όπου και νυμφεύθη, ίδρυσε την πρώτη σχολή και μύησε τους πρώτους μαθητές του. Το αντικείμενο ενασχόλησης του Πυθαγόρα ήταν η καθοδήγηση αυτής της σχολής, η οποία ήταν μία μυστική, θρησκευτική κίνηση, που είχε αναπτύξει και έντονη πολιτική δραστηριότητα. Πιθανολογείται ότι η ίδρυση της σχολής έγινε γύρω στο 520 π.Χ, στην είσοδο της οποίας οι Πυθαγόρειοι είχαν χαράξει το ρητό: ‘ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΗΤΩ’, », δηλαδή «δεν μπορεί να εισέλθει και να συμμετάσχει κανείς στην αδελφότητα, ο οποίος δεν μετρά με γήινα μέτρα όλα τα αντικείμενα». Αυτό με άλλα λόγια σήμαινε, ότι η αδελφότητα πίστευε ότι «το θείο» είναι μέσα στον άνθρωπο και «μετρήσιμο» και όχι στα ουράνια και άπιαστο.

Ο Πυθαγόρας, απέτρεψε οριστικά στάσεις και αναρχία όχι μόνο στην εποχή του αλλά και μεταξύ των απογόνων των μαθητών του. Και για πολλές γενεές διατηρήθηκαν οι διδαχές του. Αυτός έκανε γνωστό το σοφό απόφθεγμα: "με κάθε τρόπο πρέπει να διώχνεται και να καυτηριάζεται με φωτιά, και με σίδερο και με άλλες επινοήσεις η αρρώστια από το σώμα, η πολυτέλεια από την κοιλιά, η επανάσταση από την πόλη, η διχόνοια από το σπίτι και απ' όλα μαζί η αμετρία". Οι ιδέες του, έκαναν ξεχωριστή εντύπωση, κυρίως στους νέους, και γρήγορα οδηγήθηκε στο δικαστήριο με την κατηγορία της διαφθοράς των νέων και της αθεΐας, όπου όμως τελικά αθωώθηκε. Ο Πυθαγόρας θεωρούσε ύψιστες αρετές τη σωφροσύνη, τη δικαιοσύνη και την ανδρεία. Κατά τη γνώμη του, η σωφροσύνη αποτελεί το μέτρο αρετής ενός ανθρώπου, η δικαιοσύνη είναι αρετή που υπάρχει σε μια κοινωνία και η ανδρεία είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να αποκτηθούν οι δύο προηγούμενες. Για τον Πυθαγόρα. αυτά δεν ήταν μόνο θεωρία, αλλά ο ίδιος προσπάθησε να τα πραγματώσει στον Κρότωνα. Πίστευε πως κατά την αρχή της δικαιοσύνης τα πράγματα όλα πρέπει να είναι κοινά και ο καθένας να θεωρεί και δικό του και ξένο οτιδήποτε. Αυτό κυρίως εφαρμόστηκε, όπως αναφέρθηκε, στη σχολή του.

Στον Κρότωνα, υπήρξε ένας άνδρας, ο Κύλων που παρότι καταγόταν από αριστοκρατική γενεά και διέθετε πλούτο μεγαλύτερο από των άλλων πολιτών, δεν διέθετε ευγενή χαρακτήρα αλλά ήταν φορτικός, βίαιος και τυραννικός. Χρησιμοποιούσε τον κύκλο των φίλων του και την δύναμη του πλούτου του για να μπορεί να αδικεί και όντας άπληστος είχε την αξίωση να κατέχει οτιδήποτε του φαινόταν καλό. Αυτός λοιπόν, πίστευε πως έπρεπε να γίνει μέτοχος και στην φιλοσοφία του Πυθαγόρα και να γίνει δεκτός μεταξύ των μαθητών. Προσήλθε εις τον Πυθαγόρα αυτοεπαινούμενος και επιθυμώντας να γίνει μαθητής του. Όμως ο Πυθαγόρας διακρίνοντας από τη φυσιογνωμία του ανδρός και από άλλα σημάδια το ποιόν του, τον διέταξε αμέσως να φύγει και να επιστρέψει στις ασχολίες του. Ο Κύλων το εξέλαβε ως μεγάλη προσβολή και οργίστηκε πολύ. Συγκέντρωσε τους φίλους του, όπου κατηγόρησε τον Πυθαγόρα και μαζί τους άρχισε να προετοιμάζεται για να βλάψει αυτόν και τους μαθητές του. Φαίνεται πως υπήρχαν και πολιτικά αίτια όμως για το μίσος του Κύλωνος διότι ήθελε να μεταβάλλει το πατροπαράδοτο πολίτευμα του Κρότωνος που όριζε ορισμένο αριθμό πολιτών με το δικαίωμα να συμμετέχουν στην εκκλησία του δήμου (οι «χίλιοι»). Ο Κύλων ήθελε να συμμετέχουν όλοι, ώστε να μπορεί να εξαγοράζει πολιτική δύναμη, δωροδοκώντας πολλούς από εκείνους. Όμως, σε αυτά του τα σχέδια εναντιώθηκαν οι Πυθαγόρειοι Κροτωνιάτες Αλκίμαχος, Δείναρχος, Μέτων και Δημοκίδης.

Ο Κύλων, υποβοηθούμενος από τον ρήτορα Νίνονα, που συνέγραψε βιβλίο που υποτίθεται πως περιείχε τις μυστικές διδασκαλίες των Πυθαγορείων, έβαλε να αναγνώσουν το πλαστό σύγγραμμα και άρχισε να συκοφαντεί τους Πυθαγόρειους πως ετοιμάζουν τυραννίδα. Εντός ολίγων ημερών με δημαγωγία και συκοφαντία ξεσήκωσε τον λαό εναντίον των Πυθαγορείων και ο ίδιος με τους υποστηρικτές του, επιτέθηκαν στους συντρόφους την ημέρα που είχαν συγκεντρωθεί εις την οικία του Μίλωνος. Ο Πυθαγόρας έλειπε σε ταξίδι προς την Σύρο, για να περιποιηθεί τον άρρωστο Φερεκύδη που υπήρξε διδάσκαλός του. Επακολούθησε συμπλοκή όπου σκοτώθηκαν πολλοί από τους συντρόφους του Πυθαγόρα και πυρπόλησαν το οίκημα.

Και σ΄ αυτό το σημείο αρχίζει η διαφωνία των ιστορικών για τον θάνατο του Πυθαγόρα. Δύο εκδοχές υπάρχουν για το θάνατο του. Πρώτον, σύμφωνα με το Διογένη Λαέρτιο, οι Κροτωνιάτες έσφαξαν αυτόν μαζί με τετρακόσιους μαθητές του. Πρώτα έκαψαν το σπίτι του Μίλωνα στο οποίο λίγο πριν είχαν συγκεντρωθεί. Ο λόγος της σφαγής του, σύμφωνα πάντα με την ίδια μαρτυρία, είναι ο φόβος της μεγάλης δύναμης που είχε αποκτήσει στην πόλη του Κρότωνα και η συκοφαντία, από εχθρούς του, για την εγκαθίδρυση τυραννίας. Και δεύτερον, σύμφωνα με τον Δικαίαρχο, ο Πυθαγόρας, αφού κατέφυγε στο ιερό των Μουσών στο Μεταπόντιο, μένει σαράντα μέρες νηστικός και πεθαίνει από ασιτία.

Διάδοχος του Πυθαγόρα έγινε ο Αρισταίος ο Κροτωνιάτης που κατείχε αρίστως την διδασκαλία. Άλλοι επιφανείς Πυθαγόρειοι ήταν ο Φιλόλαος από το Μεταπόντιο και ο Αρχύτας ο Ταραντίνος. Μέσω του Φιλολάου κάποια συγγράμματα των μεταγενέστερων Πυθαγορείων παρεδόθησαν στον Δίωνα, μαθητή του Πλάτωνος με αποτέλεσμα την γόνιμη συνέχεια του Πυθαγορισμού μέσω της Πλατωνικής Ακαδημίας.

Ο Πυθαγόρας χρήζει παγκόσμιας αναγνώρισης. Το όνομα του είναι σήμερα ταυτισμένο με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Σε ολόκληρο τον κόσμο γνωρίζουν τον μεγάλο αυτόν φιλόσοφο και μαθηματικό από το θεώρημά του και τον τιμούν ιδιαίτερα. Στο Άμστερνταμ, υπάρχει οδός που φέρει το όνομά του. Αγάλματα και μεγάλοι πίνακες ζωγραφικής αναφέρονται στον Πυθαγόρα και τη θεωρία του. Πολλά βιβλία και μελέτες σύγχρονων μαθηματικών έχουν γραφτεί για τη μεγάλη αυτή φυσιογνωμία των μαθηματικών, τον **ΠΥΘΑΓΟΡΑ**.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

«Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις». Δηλαδή:

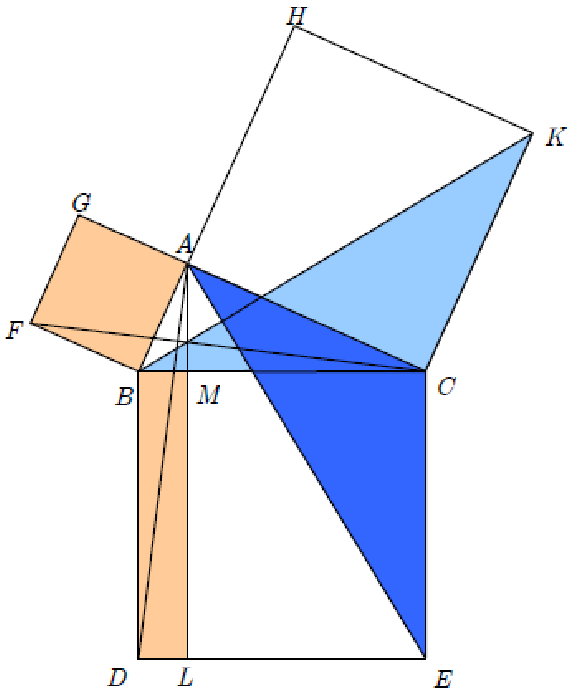
«Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του».

Αν και η ναυαρχίδα της θεωρίας του Πυθαγόρα είναι η τετρακτύς, το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι αυτό που τον καθιέρωσε στο χώρο των μαθηματικών και χάριν αυτού είναι γνωστός στους περισσότερους ανθρώπους σήμερα. Το Πυθαγόρειο θεώρημα μελετά τη σχέση ανάμεσα στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και αποτελεί θεώρημα της επιπέδου Ευκλείδειας γεωμετρίας. Το Πυθαγόρειο θεώρημα ονομάζεται και «Εκατόμβη» ή «Θεώρημα εκατόμβης» γιατί σύμφωνα με την παράδοση ο Πυθαγόρας μόλις το διατύπωσε προσέφερε θυσίες στους θεούς.

Η Απόδειξη του Ευκλείδη

(Πρόταση 47)

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει τη γωνία ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της *BC* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της *AB* και *AC* (Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Βιβλίο I των «Στοιχείων»

Φέρομε την *AL* παράλληλη στις *BD*, *CE* και τις ευθείες *AD* και *FC*. Αφού οι γωνίες $\angle BAC$, $\angle BAG$ είναι ορθές, έπεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα *GA*, *AC* κείνται επ’ ευθείας.
Για τον ίδιο λόγο τα τμήματα *BA*, *AH* κείνται επ’ ευθείας.
Αφού οι γωνίες $\angle DBC$, $\angle FBA$ είναι ορθές, έπεται ότι $\angle DBC = \angle FBA$, απ’ όπου λαμβάνεται ότι $\angle DBC + \angle ABC = \angle FBA + \angle ABC$ ή $\angle DBA = \angle FBC$.
Αφού $DB = BC$, $FB = BA$ και $\angle DBA = \angle FBC$, η βάση *AD* ισούται με τη βάση *FC*, και το τρίγωνο *ABD* ισούται με το τρίγωνο *FBC* . Τώρα το παραλληλόγραμμο *BMLD* είναι διπλάσιο από το τρίγωνο *ABD* , αφού έχουν την ίδια βάση *BD* και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων *BD*, *AL*, και το τετράγωνο *GABF* είναι διπλάσιο από το τρίγωνο *FBC*, επειδή έχουν την ίδια βάση *FB* και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων *FB*, *GC*. Επομένως, το παραλληλόγραμμο *BMLD* είναι

ισοδύναμο με το τετράγωνο *GABF*. Ομοίως, αν φέρουμε την *AE* και την *BK* μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο *CMLE* είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο *HKCA*.

Επομένως το τετράγωνο *BDEC* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων *GABF* και *HKCA*.

Η απόδειξη του Ευκλείδη έχει ορισμένες ιδιομορφίες. Πρώτον, το τετράγωνο που κατασκευάζεται στην υποτείνουσα διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ισοδύναμα με τα τετράγωνα που κατασκευάζονται στις δύο κάθετες πλευρές. Δεύτερον, κατά την απόδειξη της ισοδυναμίας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με το τετράγωνο της κάθετης πλευράς χρησιμοποιείται ένα βοηθητικό σχήμα: ένα ειδικό τρίγωνο το οποίο εξετάζεται σε δύο διαφορετικές θέσεις, η μία από τις οποίες λαμβάνεται από την άλλη με στροφή κατά 90°.

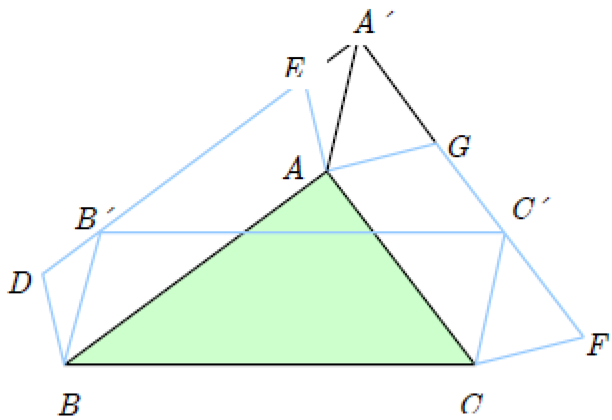
Επιπλέον, η απόδειξη γίνεται πιο σύνθετη επειδή ο Ευκλείδης αποφεύγει να χρησιμοποιήσει αναλογίες και προτιμά τη σύγκριση χωρίων.

Αν χρησιμοποιηθούν αναλογίες η απόδειξη των ισοτήτων $BM \cdot BD = AB^2$, $MC \cdot CE = AC^2$ είναι άμεση.

Η γενίκευση του Πάππου

Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι το παρακάτω θεώρημα του Πάππου που αφορά πλέον *οποιοδήποτε* τρίγωνο (όχι κατ' ανάγκην ορθογώνιο).

Σε κάθε τρίγωνο *ABC* (Σχήμα 2) το παραλληλόγραμμο *BB΄C΄C* που κατασκευάζεται στην μια από τις πλευρές του εσωτερικά του τριγώνου και έτσι ώστε οι δύο κορυφές του *B΄* και *C΄* να βρίσκονται εκτός του τριγώνου, είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των παραλληλογράμμων *ABDE* και *ACFG* που κατασκευάζονται στις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου, έτσι ώστε οι πλευρές τους που είναι παράλληλες στις πλευρές του τριγώνου να διέρχονται από τις κορυφές του πρώτου παραλληλογράμμου. Αποδεικνύεται πρώτα ότι τα τρίγωνα *A΄B΄C΄* και *ABC* είναι ίσα. Επίσης, ισοδύναμα είναι τα παραλληλόγραμμα *BB΄A΄A* = *BDEA* και CC΄A΄A = CFGA, επειδή έχουν ίσες βάσεις και ύψη. Επομένως,



Σχήμα 2. Το θεώρημα του Πάππου

BB΄A΄C΄C - B΄A΄C΄ = BB΄C΄C ή
BB΄A΄C΄C - BAC = BB΄A΄A+A΄ACF ή
BB΄A΄C΄C - BAC = BDEA+CFGA.

Ιστορική επισκόπηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

«Έστιν ουν πρόνοια
η μεν ανωτάτω
και πρώτη του πρώτου θεού
νόησις είτε και βούλησις
ούσα ευεργέτις απάντων,
καθ' ην πρώτως έκαστα των θείων
δια παντός άριστά τε
και κάλλιστα κεκόσμηται».

Πλούταρχος, «Ηθικά», Τόμος 15, Περί Ειμαρμένης,

Ένα από τα πιο συναρπαστικά και ασφαλώς πιο φημισμένα και χρήσιμα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το λεγόμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι *«σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών»*. Αν υπάρχει ένα θεώρημα του οποίου η γέννηση δικαιούται να θεωρηθεί μια μεγάλη στιγμή στα μαθηματικά, τότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι το πιο κατάλληλο, γιατί είναι ίσως το πρώτο πραγματικά μεγάλο Θεώρημα των μαθηματικών. Όταν όμως αρχίζουμε να εξετάζουμε την προέλευση του Θεωρήματος, τότε είναι σαν να ψάχνουμε σε θολά νερά.

Αν και η παράδοση έχει αποδώσει το περίφημο θεώρημα στον Πυθαγόρα, η εξέταση πήλινων πινάκων με σφηνοειδή γραφή, που βρέθηκαν στην Μεσοποταμία τον 20ο αιώνα, αποκαλύπτει ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που έζησαν πάνω από χίλια χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, γνώριζαν το Θεώρημα. Το θεώρημα γνώριζαν επίσης οι αρχαίοι Ινδοί και Κινέζοι της εποχής του Πυθαγόρα ή και νωρίτερα, όπως αποδεικνύεται από σχετικές εργασίες τους (Van der Waerden, 2000). Αυτές οι μη ελληνικές και πιθανόν προελληνικές αναφορές στο Θεώρημα δεν περιέχουν όμως αποδείξεις του, και ίσως είναι αλήθεια ότι ο Πυθαγόρας ή κάποιο μέλος της διάσημης αδελφότητας του ήταν ο πρώτος που έδωσε μια λογική απόδειξη στο θεώρημα.

Αν και οι ρίζες του είναι στη Γεωμετρία, το Θεώρημα που αποδίδεται παγκοσμίως στον Πυθαγόρα έχει βρει εφαρμογή σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης, καθαρό ή εφαρμοσμένο. Ευρέως πάνω από τετρακόσιες αποδείξεις του είναι γνωστές, και ο αριθμός τους μεγαλώνει ακόμα. Ο κατάλογος περιλαμβάνει μια αρχική απόδειξη από τον μελλοντικό αμερικανό Πρόεδρο Garfield, μια άλλη από τον δωδεκάχρονο τότε Albert Einstein, από το Leonardo da Vinci, ακόμα μία από ένα νεαρό τυφλό κορίτσι, και ο κατάλογος συνεχίζεται. Μερικές από αυτές τις αποδείξεις είναι συναρπαστικές στην απλότητά τους, ενώ άλλες είναι απίστευτα σύνθετες.

Το ίδιο το Θεώρημα είναι γνωστό με διάφορα ονόματα: το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», το «Θεώρημα της υποτείνουσας», το «Θεώρημα της εκατόμβης» ή απλά «Ευκλείδης Ι. 47», αποκαλούμενο έτσι επειδή παρατίθεται ως πρόταση 47 στο βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Σήμερα σκεφτόμαστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως αλγεβρική σχέση $a^2 + b^2 = c^2$, από την οποία το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να βρεθεί, λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των άλλων δύο πλευρών. Αλλά ο Πυθαγόρας δεν την αντιλήφθηκε έτσι. Γι' αυτόν ήταν μια γεωμετρική δήλωση για τα εμβαδά. Ήταν μόνο με την ανάπτυξη της σύγχρονης άλγεβρας, περίπου το 16ο αιώνα, όταν το Θεώρημα εξοικειώθηκε στην αλγεβρική του μορφή (Heath, 1956). Είναι σημαντικό να αντέξει αυτό στο μυαλό, εάν πρόκειται να επισημάνουμε την εξέλιξη του Θεωρήματος κατά τη διάρκεια των 2.500 ετών από τότε που ο Πυθαγόρας υποθετικά το απέδειξε πρώτος και το έκανε αθάνατο. Και δεν ήταν ούτε καν ο πρώτος που ανακάλυψε το Θεώρημα. Ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους και ενδεχομένως στους Κινέζους, τουλάχιστον χίλια έτη πριν από αυτόν (Van der Waerden, 2000).

Οι Αιγύπτιοι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Οι Αιγύπτιοι πρέπει να έχουν χρησιμοποιήσει τον τύπο $a^2 + b^2 = c^2$ ***αλλιώς δε θα μπορούσαν να έχουν χτίσει τις πυραμίδες τους, αλλά δεν το έχουν εκφράσει ποτέ ως μία χρήσιμη θεωρία.***

Joy Hakim, The Story of Science

Ο διασημότερος όλων των αιγυπτιακών ιερών τόπων είναι οι πυραμίδες, που χτίζονται για πάνω από 1.500 έτη για να δοξάσουν τους κυβερνήτες Φαραώ κατά τη διάρκεια των ζωών τους, και ακόμα περισσότερο μετά από τους θανάτους τους. Ένας τεράστιος όγκος της βιβλιογραφίας ήταν γραμμένος στις πυραμίδες. Δυστυχώς, ένα μεγάλο μέρος αυτής της λογοτεχνίας είναι περισσότερο μυθιστοριογραφία παρά πραγματικότητα. Οι πυραμίδες έχουν προσελκύσει ένα κοινό προσκυνητών που βρήκε σε αυτά τα μνημεία κρυφές συνδέσεις για τα πάντα στον κόσμο, από τις αριθμητικές τιμές του π μέχρι και για τη χρυσή αναλογία της ευθυγράμμισης των πλανητών και των αστεριών. Αναφέρει ο Αιγυπτιολόγος Gillings, 1982. «Συντάκτες, μυθιστοριογράφοι, δημοσιογράφοι, και συγγραφείς μυθιστορημάτων βρήκαν κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα ένα νέο θέμα (τις πυραμίδες), μία νέα ιδέα αναπτύχθηκε, και αυτοί που ήξεραν λιγότερα πράγματα και δεν κατανοούσαν καθαρά το θέμα, θα μπορούσαν πιο ελεύθερα να δώσουν τα ηνία στη φαντασία τους».

Οι Δακανάλης και Θεοδοσίου αναφέρουν ότι ο Legon μελέτησε εκτενώς καιεπέκτεινε την πρώτη τοπογραφική μελέτη που έγινε στην Γκίζα από τονW.M.F.Petrie (1883). Τα αποτελέσματα της εργασίας του Legon έχουν δημοσιευθεί στα περιοδικά της Αρχαιολογικής κοινότητας, Discussions in Egyptology και στο Gottinger Miszelen. Οι τρεις πυραμίδες στην Γκίζα περιγράφονται με ένα ορθογώνιο με πλευρές $1000\sqrt{2}$ και $1000\sqrt{3}$. Ο Legon παρατήρησε ότι η τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιήθηκε εκτενώς από τους κτίστες, γεγονός που δεν προκαλεί έκπληξη, διότι είναι γενικά αποδεκτό πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι τη γνώριζαν. Ο τρόπος όμως με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε στο όλο σχέδιο, προτείνει τη γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Βεβαίως, χτίζοντας ένα τέτοιο τεράστιο μνημείο όπως είναι η μεγάλη πυραμίδα του Χέοπα – 756 πόδια η κάθε πλευρά και το ύψος να αγγίζει τα 481 πόδια, απαιτεί πολλή μαθηματική γνώση, και σίγουρα αυτή η γνώση πρέπει να περιλαμβάνει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αλλά το ήξεραν;

Υπάρχουν αρχεία, όπως ο πάπυρος Berlin 6619 που χρονολογείται περίπου στο 1850 π.Χ., που παρουσιάζει τη γνώση των Πυθαγόρειων τριάδων από τους Αιγυπτίους. Εντούτοις, κανένα τρίγωνο δεν αναφέρεται εδώ ή κάπου αλλού. Ο Van der Waerden (2000) προτείνει ότι οι Αιγύπτιοι μπορεί να είχαν μάθει για τις Πυθαγόρειες τριάδες από τους Βαβυλώνιους. Υπέρ αυτής της άποψης, οι Boyer & Merzbach (1991) έγραψαν: *«συχνά λέγεται ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν* *εξοικειωμένοι με τις Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά δεν υπάρχει κανένας υπαινιγμός αυτού στους παπύρους που έχουν έρθει στα χέρια μας».*

Η κύρια πηγή πληροφοριών για τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά προέρχεται από τον πάπυρο Rhind, μια συλλογή από ογδόντα τέσσερα προβλήματα που ασχολούνται με την αριθμητική, τη γεωμετρία και τη στοιχειώδη άλγεβρα. Ανακαλύφθηκε το 1858 από τον Σκωτσέζο Αιγυπτιολόγο A. Henry Rhind. Έχει 18 πόδια μήκος και 13 ίντσες πλάτος. Επέζησε κάτω από εντυπωσιακά καλές συνθήκες και είναι το παλαιότερο εγχειρίδιο μαθηματικών που έφθασε σε μας σχεδόν άθικτο (τώρα βρίσκεται στο βρετανικό μουσείο στο Λονδίνο).

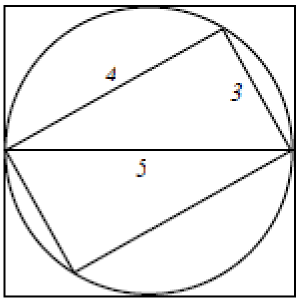
Ο πάπυρος γράφτηκε περίπου το 1650 π.Χ. από έναν γραφέα που ονομαζόταν A'h-mose, όνομα γνωστότερο στη δύση ως Ahmes. Αλλά δεν ήταν δική του εργασία (Van der Waerden, 2000) δεδομένου ότι ο A'h-mose μας λέει ότι το αντέγραψε από ένα παλαιότερο έγγραφο που χρονολογείται περίπου το 1800 π.Χ. Κάθε ένα από τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα ακολουθείται από μια λεπτομερή λύση βήμα προς βήμα. Επίσης, μερικά από τα προβλήματα συνοδεύονται από σχέδια. Πιθανότατα η εργασία ήταν ένα εγχειρίδιο κατάρτισης για χρήση σε κάποιο σχολείο γραφέων. Για αυτόν το λόγο υπήρχε η αίρεση των βασιλικών γραφέων στους οποίους όλοι οι λογοτεχνικοί στόχοι ήταν ορισμένοι. Ανάγνωση, γραφή και αριθμητική, τα σύγχρονα σε μας «τρία Ρ».

Ο πάπυρος Rhind.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα κινεζικά μαθηματικά

Απαντάται για πρώτη φορά στην «Μαθηματική πραγματεία για τον γνώμονα», το αρχαιότερο κείμενο που σώζεται στην ιστορία των Κινεζικών μαθηματικών. Το έργο αυτό είναι γραμμένο με μορφή διαλόγου ανάμεσα στον κυβερνήτη Ζόου και το σοφό Σανγκ Γκάο, ο οποίος θεωρείτο ως «εξαιρετικά επιδέξιος στους υπολογισμούς», και ανάμεσα στον Τσένζι και τον μαθητή Ρονγκ Φανγκ. Σύμφωνα με την μαρτυρία αυτή, η σχέση μεταξύ των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, με πλευρές 3, 4, 5, ήταν γνωστή στον Σανγκ Γκάο, ήδη από τον 12ο αι. π.Χ., ίσως και πιο πριν.

Στην ίδια πραγματεία αναφέρεται ότι «το ορθογώνιο που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο διαιρείται σε δύο τρίγωνα με πλευρές 3, 4, 5 (στο παρακάτω σχήμα)». Η ιδιότητα επομένως της γωνίας που βαίνει σε διάμετρο, η οποία αποδίδεται στον Θαλή από τον Πρόκλο, ήταν ήδη γνωστή στον Σανγκ Γκάο. Στο τέλος του έργου αυτού αναφέρεται επίσης ότι «οι επιφάνειες των δύο τετραγώνων που κατασκευάζονται στις δύο καθέτους έχουν άθροισμα είκοσι και πέντε, το οποίο είναι η επιφάνεια του τετραγώνου που κατασκευάζεται στην υποτείνουσα του τριγώνου».



Αργότερα, στις «Δέκα κλασσικές μαθηματικές πραγματείες» ή «Δεκάβιβλο», που θεωρείται ότι συνέγραψε ή συνέταξε ο Ζεν Λουάν (6ος αι. μ.Χ.) εμφανίζεται ο ειδικός όρος «κανονικοί συντελεστές» που υποδηλώνει τη στοιχειώδη τριάδα Πυθαγόρειων αριθμών 3:4:5.

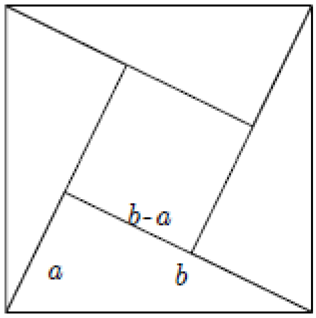
Στο δεύτερο διάλογο της πραγματείας για το γνώμονα το θεώρημα διατυπώνεται στη γενική του μορφή κάνοντας χρήση γεωμετρικού σχήματος (βλέπε παρακάτω σχήμα). Σε σχόλιο σημειώνεται ότι η απόδειξη αυτή βασίζεται στο σχήμα, από το οποίο προκύπτει ότι το τετράγωνο που κατασκευάζεται με πλευρά την υποτείνουσα c ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα του τετραγώνου που κατασκευάζεται με πλευρά τη διαφορά b των καθέτων και τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές a και b, δηλ.

$$4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (b-a)^2 = c^2$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Έτσι ο διάλογος αυτός θεωρείται ως η πρώτη γραπτή μαρτυρία της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος στην ιστορία των Κινεζικών μαθηματικών. Το ίδιο σχήμα απαντάται αργότερα στο έργο του Ινδού μαθηματικού Bhaskara.



Κατά το μεσαίωνα οι Κινέζοι μαθηματικοί έκαναν συστηματική χρήση της ονομαζόμενης μ ε θ ό δ ο υ γ κ ό ο υ - γ κ ο υ σε προβλήματα υπολογισμών. Μάλιστα το τελευταίο κεφάλαιο του κλασσικού μαθηματικού έργου «Εννέα κεφάλαια της μαθηματικής τέχνης», βιβλίου που χαρακτηρίζει το ύφος της Κινεζικής μαθηματικής σκέψης, ονομάζεται «Γκόου-γκου». Σε όλα λοιπόν αυτά τα προβλήματα, εκτός από τα τρία τελευταία, χρησιμοποιείται το θεώρημα του Πυθαγόρα. Στα τρία τελευταία μόνο χρησιμοποιείται η ιδιότητα της αναλογίας των πλευρών ομοίων ορθογωνίων τριγώνων. Έτσι το κεφάλαιο αυτό είναι στην πραγματικότητα αφιερωμένο στην εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων σε γεωμετρικά προβλήματα, όπου γίνεται χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος (στα Κινεζικά «γκόου-γκου ντινλί», που στην κυριολεξία σημαίνει «θεώρημα του ορθογωνίου τριγώνου») και της ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων. Επομένως η «μέθοδος γκόου-γκου» συνίσταται στην υπολογιστική λύση ενός προβλήματος με εφαρμογή της ισότητας του τετραγώνου της υποτείνουσας με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων.

Ορισμένα προβλήματα οδηγούν σε λύση τετραγωνικής εξίσωσης ή συστήματος ισοδύναμου με τετραγωνική εξίσωση. Πολλά από τα προβλήματα αυτά είναι όμοια με προβλήματα που εμφανίζονται στα αρχαία Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά ή Ινδικά μαθηματικά. Ο γενικός κανόνας της λύσης εκτίθεται στην αρχή του ένατου κεφαλαίου και βασίζεται στους τρεις αλγορίθμους για τις τρεις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου

$$a = \sqrt{cc - bb}, \quad b = \sqrt{cc - aa}, \quad c = \sqrt{aa + bb}$$

οι οποίοι εφαρμόζονται στα τρία πρώτα προβλήματα στη στοιχειώδη Πυθαγόρεια τριάδα $a = 3$ (γκόου), $b = 4$ (γκου), $c = 5$ (σιαν). Στα προβλήματα αυτά απαιτείται να καθοριστούν σωστά ποια μεγέθη πρέπει να ληφθούν ως κάθετοι (γκόου και γκου) και υποτείνουσα (σιαν), ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός ενός από αυτά τα μεγέθη. Το πιο σημαντικό πρόβλημα είναι η εύρεση της διαγωνίου ορθογωνίου ή τετραγώνου από τις πλευρές του, που στην περίπτωση μοναδιαίου τετραγώνου οδηγεί στο κλασσικό πρόβλημα της εύρεσης της $\sqrt{2}$. Στα αρχαία Κινεζικά κείμενα για το μέγεθος αυτό προτείνεται ο λόγος 7:5. Ωστόσο, πως ελήφθη η προσέγγιση αυτή στην Κίνα δεν είναι γνωστό.

Πιο σύνθετα προβλήματα προκύπτουν με τη διατύπωση αντίστροφων προβλημάτων, όπως τα αποκαλούμενα «προβλήματα των θυρών», που οδηγούν σε σύστημα εξισώσεων. Το πρώτο απ' αυτά οδηγεί στο παρακάτω σύστημα (με σύγχρονο συμβολισμό)

$$\left\{\begin{matrix} z^2 = x^2 + y^2, \\ k = y - x \end{matrix}\right\}$$

όπου δίδεται η υποτείνουσα z. Η λύση του προβλήματος δίδεται με έναν κανόνα που αντιστοιχεί στους τύπους:

$$\left\{\begin{matrix} x = \sqrt{\dfrac{z^2 - 2(k/2)^2}{2}} - \dfrac{k}{2}, \\ y = \sqrt{\dfrac{z^2 - 2(k/2)^2}{2}} + \dfrac{k}{2} \end{matrix}\right\}$$

Πως όμως οδηγήθηκαν οι Κινέζοι μαθηματικοί στον κανόνα αυτό δεν είναι γνωστό.

Το δεύτερο πρόβλημα οδηγεί στο σύστημα (με σύγχρονο συμβολισμό)

$$\left\{\begin{matrix} z^2 = x^2 + y^2, \\ x = z - a, \\ y = z - b \end{matrix}\right\}$$

απ' όπου υπολογίζεται το z με έναν αλγόριθμο που αντιστοιχεί στον τύπο

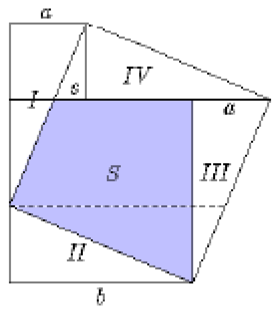
$$z = \sqrt{2ab} + (a + b).$$

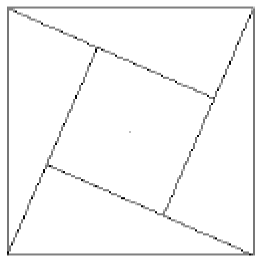
Χαρακτηριστική είναι επίσης η ομάδα «προβλημάτων της δοκού» που στηρίζεται σε τοίχο. Κατά τη λύση των προβλημάτων αυτών χρησιμοποιείται ένα ορθογώνιο τρίγωνο για το οποίο ισχύει η ισότητα: $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$ και δίδονται τα μεγέθη *a και c+b (ή c-b).* Τότε οι άλλες κάθετοι βρίσκονται με τον κανόνα

$$b = \frac{(c+b) - a^2/(c+b)}{2}, \quad c = \frac{(c-b) + a^2/(c-b)}{2}.$$

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα Ινδικά μαθηματικά

Απαντάται στα θρησκευτικής και φιλοσοφικής σημασίας έργα «Σουλβασούτρας» που περιέχουν γεωμετρικές κατασκευές και υπολογισμούς που χρησιμοποιούνταν για την κατασκευή βωμών και τον προσανατολισμό των ναών.



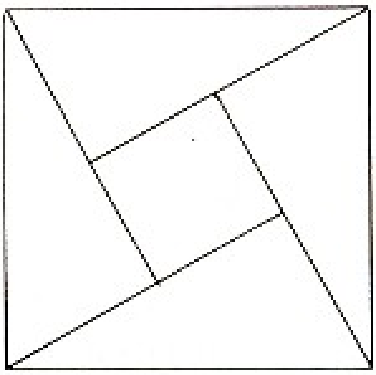


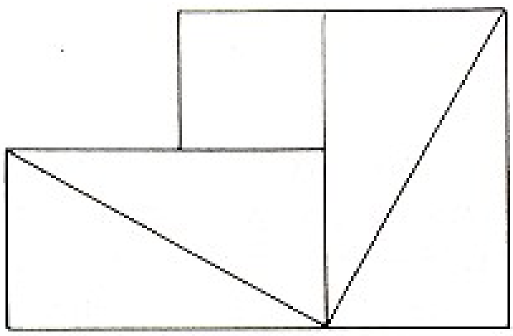
Το τετράγωνο που κατασκευάζεται πάνω στην υποτείνουσα (σχήμα αριστερά) αποτελείται από τις επιφάνειες *S*, *III*, *IV* και *s*. Το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών αποτελείται από τις επιφάνειες *S*, *I*, *II* και *s*. Όμως τα τρίγωνα *I*, *II*, *III* και *IV* είναι ίσα. Η απόδειξη αυτή ώθησε ορισμένους ιστορικούς να υποθέσουν ότι οι Ινδοί μαθηματικοί κατέληξαν στο Πυθαγόρειο θεώρημα από την κατασκευή αυτή.

Αργότερα, στο έργο «Η κορωνίδα της επιστήμης» (περίπου 1150) του Bhaskara 1114-περίπου 1185), απαντάται μια άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος (σχήμα δεξιά) που βασίζεται σε άλλο διαμερισμό της επιφάνειας του τετραγώνου της υποτεινούσης που ήταν από πιο πριν γνωστός στην Κίνα. Στην απόδειξη αυτή ο Ινδός μαθηματικός απλώς εκθέτει το σχήμα, το οποίο συνοδεύεται από την μονολεκτική επεξήγηση «Ιδέ».

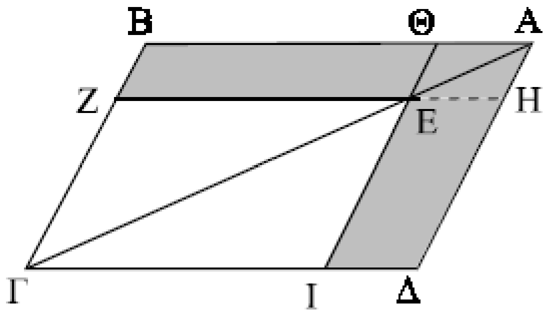
Ο Bhaskara δίδει και άλλη απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος, που βασίζεται στη διαίρεση ενός ορθογωνίου τριγώνου από το ύψος σε δύο τρίγωνα όμοια με το αρχικό και μεταξύ τους[2]. Η απόδειξη αυτή ανακαλύφτηκε εκ νέου από τον Λεονάρδο της Πίζας το 1220 και τον 17ο αι. από τον Τζ. Ουώλλις.

- **Bhaskara:** Ο Ινδός μαθηματικός και αστρονόμος Bhaskara, που διέπρεψε γύρω στα 1150, έδωσε μία άλλη απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος. Είναι μια απόδειξη διαμέρισης, κατά την οποία το τετράγωνο πάνω στην υποτείνουσα διαμερίζεται, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα, σε τέσσερα τρίγωνα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με το δεδομένο ορθογώνιο τρίγωνο, και σε ένα τετράγωνο πλευράς ίσης με τη διαφορά των καθέτων του δεδομένου τριγώνου. Τα κομμάτια αυτά αναδιατάσσονται εύκολα για να μας δώσουν το άθροισμα των τετραγώνων πάνω στις δύο καθέτους. Ο Bhaskara σχεδίασε το σχήμα και η μόνη επεξήγηση που έδωσε ήταν η λέξη «ιδού!». Με λίγη άλγεβρα παίρνουμε ασφαλώς την απόδειξη, διότι αν γ είναι η υποτείνουσα και α και β οι κάθετες πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου, τότε $\gamma^2 = 4(\alpha\beta/2) + (\beta-\alpha)^2 = \alpha^2+\beta^2$





Το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται στενά με το δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, στο οποίο ένα από πιο επιφανή χαρακτηριστικά είναι η χρήση του *γνώμονα.* Ο γνώμων ήταν ένας όρος κατανοητός από τους Πυθαγόρειους. Αρχικά γνώμων ήταν το τετράγωνο των ξυλουργών. Μία άλλη χρήση της λέξης γνώμων ήταν για ένα αστρονομικό όργανο. Ο Αριστοτέλης αποδίδει στους Πυθαγόρειους την τοποθέτηση περιττών αριθμών σαν γνώμονες γύρω από τετράγωνα, σχηματίζοντας νέα, μεγαλύτερα τετράγωνα. Ο Ευκλείδης στο δεύτερο βιβλίο του (ορισμός 2) επεκτείνει αυτή την έννοια για όλα τα παραλληλόγραμμα: Από σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τις παράλληλες ΕΖ, ΕΙ προς τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Το ΒΖΕΙΔΑ ονομάζεται γνώμονας. Ομοίως γνώμονας ονομάζεται και το ΒΘΕΗΔΓ.



Τελικά ο Ήρων ορίζει το γνώμονα ως εξής: *«καθόλου δὲ γνώμων ἐστὶν πᾶν, ὃ προσλαβὸν ὁτιοῦν, ἀριθμὸς ἢ σχῆμα, ποιεῖ τὸ ὅλον ὅμοιον ᾧ προσείληφεν».*

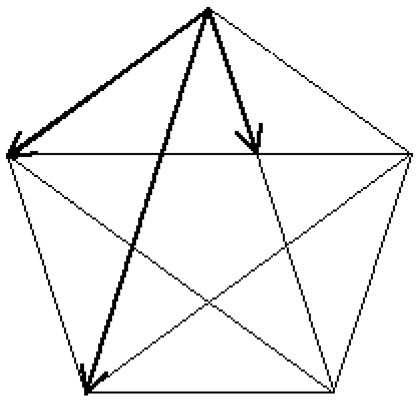
- Ο **Ήρων ο Αλεξανδρεύς** έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 62 μ.Χ. και είναι περισσότερο γνωστός ως μαθηματικός και γεωμέτρης. Ήταν επίσης ένας διορατικός εφευρέτης και η αιολόσφαιρα που κατασκεύασε ήταν η πρώτη επιτυχημένη ατμομηχανή. Ο Ήρων εφηύρε επίσης τα αυτόματα μηχανήματα πώλησης -με τέσσερις δραχμές μπορούσε κανείς να αγοράσει άγιο νερό - και μια φορητή συσκευή που διασφάλιζε ότι κανείς άλλος δεν θα έπινε από το κρασί που εσύ ο ίδιος είχες φέρει σε μια φιλική συγκέντρωση. Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας (κάτι σαν το πρώτο πολυτεχνείο).
  Στο βιβλίο του «Μηχανικά» περιγράφονται πέντε βασικά τεχνικά εργαλεία: βαρούλκο, μοχλός, πολύσπαστο (τροχαλίες), σφήνα, ατέρμων κοχλίας.
  Ο τύπος του Ήρωνα για την επιφάνεια ενός τριγώνου, που μερικές φορές αποδίδεται στον Αρχιμήδη, δίνει την επιφάνεια σε σχέση με τις πλευρές:

$$\kappa = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

$$E = \sqrt{\kappa(\kappa-\alpha)(\kappa-\beta)(\kappa-\gamma)}$$

Ε το εμβαδόν και α, β και γ οι πλευρές του τριγώνου.

Ο Ήρων, όπως και ο Πρόκλος, αποδίδουν στον Πυθαγόρα ένα γενικό κανόνα για τον σχεδιασμό ορθογωνίων τριγώνων με ρητούς φυσικούς αριθμούς για πλευρές. Η «περίληψη» του Πρόκλου αποδίδει στον Πυθαγόρα την ανακάλυψη της θεωρίας, ή της μελέτης των αναλογιών. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δυο φυσικών αριθμών. Στην πεποίθηση αυτή είχαν στηρίξει όλη τη κοσμοθεωρία τους και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ.) αποκάλυψε τον άρρητο, όπως προσπαθούσε να αναγνωρίσει τις πλευρές του πενταγράμμου. Σήμερα αμφισβητείται ότι οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν τους άρρητους.



Πεντάγραμμο: το σύμβολο των Πυθαγορείων

- **ΠΡΟΚΛΟΣ:** Έλληνας νεοπλατωνικός φιλόσοφος. Γεννήθηκε το 410 ή 412 μ.Χ. στην Κωνσταντινούπολη και πέθανε το 485 στην Αθήνα. Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια ρητορική με δασκάλους του Λεωνά και Ωρίωνα και φιλοσοφία με δασκάλους τους Ολυμπιόδωρο και Ήρωνα. Αργότερα συνέχισε τις σπουδές του στην Αθήνα, όπου υπήρξε μαθητής του Πλούταρχου και του Συνέσιου. Προσπάθησε να εντάξει όλες τις παλαιότερες φιλοσοφικές θεωρίες μέσα σε μία αυστηρή ταξινόμηση των ιδεών και γι' αυτό ονομάστηκε "Χέγκελ της αρχαιότητας".

Όμως η θεωρία των αναλογιών που ο Πρόκλος αποδίδει στον Πυθαγόρα εφαρμόζεται μόνο σε συμμετρικά μεγέθη, σε αντίθεση με την θεωρία του πέμπτου βιβλίου του Ευκλείδη, η οποία οφείλεται στον Εύδοξο.

- **ΕΥΔΟΞΟΣ:** Έλληνας φιλόσοφος, μαθηματικός, γεωγράφος και αστρονόμος (408 -355/3 πΧ). Γεννήθηκε στην Κνίδο της Δωρίδας της Μικράς Ασίας. Ίδρυσε σχολή στην Κύζικο, η οποία απέκτησε πολύ μεγάλη φήμη. Η πρωτοτυπία του ως γεωμέτρη αποδεικνύεται από το πέμπτο βιβλίο του Ευκλείδη το οποίο αποδίδεται σ' αυτόν. Είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι ο όγκος πυραμίδος είναι το 1/3 του γινόμενου του εμβαδού της βάσεώς της επί το ύψος της και ότι ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών είναι ίσος με το λόγο των κύβων των

διαμέτρων τους. Επίσης σε αυτόν αποδίδεται η διατύπωση και εφαρμογή αξιώματος που είναι γνωστό ως **αξίωμα "Αρχιμήδους-Ευδόξου": για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α,β με τον α θετικό υπάρχει φυσικός αριθμός ν με να›β.** Ως αστρονόμος και γεωγράφος είναι ο πρώτος που απέδειξε τη σφαιρικότητα της Γης, την οποία χώρισε σε ζώνες, διόρθωσε την **"οκταετηρίδα"** του Κλεοστράτου, ο οποίος συνέδεε το σεληνιακό με το ηλιακό έτος. Ίδρυσε αστεροσκοπεία. Για ένα διάστημα έμεινε στην Αίγυπτο, απ' όπου ξαναγύρισε στην Κνίδο, όπου εισήγαγε νέο πολίτευμα.
Υπήρξε μαθητής του Πλάτωνα. Ως φιλόσοφος είναι επηρεασμένος από τις πλατωνικές αντιλήψεις, αλλά διαμόρφωσε όμως τις δικές του.

Τι ήταν αυτό όμως που οδήγησε τον Πυθαγόρα στην ανακάλυψη του Π.Θ.; Υπάρχουν πολλές αναφορές ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν πως ένα τρίγωνο με τις πλευρές του σε αναλογία 3,4,5 ήταν ορθογώνιο. Ο Cantor το συμπέρανε αυτό από το γεγονός ότι αυτό ήταν ακριβώς το τρίγωνο με το οποίο ξεκίνησε ο Πυθαγόρας.

- **ΓΚΕΟΡΓΚ ΚΑΝΤΟΡ (1845-1918):** Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής, ο δημιουργός της μεγαλοφυούς θεωρίας των συνόλων και ιδιαίτερα των απειροσυνόλων. Το 1867 πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα στο Βερολίνο και στη συνέχεια δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Χάλλε.
  Οι αντιλήψεις του ήταν σύμφωνες με τις μεσαιωνικές θεολογικές απόψεις, τις οποίες είχε ένθερμα ενστερνιστεί.
  Τα βασικά έργα του στα οποία ανέπτυξε τη θεωρία του, είναι τα «Θεμέλια μιας γενικής θεωρίας πολλαπλοτήτων» (1883) και η «Συμβολή στη θεμελίωση της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων»(1895-97).
  Αν και υπήρξαν αρκετοί που αντιτάχθηκαν στις ιδέες του και παρά τις αμφισβητήσεις και διαφωνίες γύρω από το έργο του, που παραμένουν ζωντανές, το σύγχρονο ρεύμα των μαθηματικών χαρακτηρίζεται ως «καντοριανό».
  Πριν από μερικές δεκαετίες, ψήγματα της καντοριανής θεωρίας περιλήφθηκαν στη σχολική ύλη πολλών κρατών με το βαρύγδουπο τίτλο «Νέα Μαθηματικά».: *«Θα διερευνήσουμε προσεκτικά εκείνους τους τρόπους ορισμού των εννοιών και εκείνους τους τρόπους συμπερασμού που είναι γόνιμοι. Θα τους φροντίσουμε, θα τους υποστηρίξουμε και θα τους καταστήσουμε λειτουργικούς, οπουδήποτε υπάρχει ελάχιστη ελπίδα επιτυχίας. Κανείς δεν θα μπορέσει να μας απομακρύνει από τον παράδεισο που δημιούργησε ο Κάντορ για μας.»* Ποιος τα γράφει αυτά; Ο πατριάρχης της συνολοθεωρίας Δαυίδ Χίλμπερτ. Από το βιβλίο του «Για το άπειρο».

Ο Βιτρούβιος καταθέτει ότι ο Πυθαγόρας δίδαξε πώς να κατασκευασθεί ορθή γωνία χρησιμοποιώντας τα τρία μήκη 3, 4, 5. Αν μετά πήρε από τους Αιγύπτιους το τρίγωνο 3, 4, 5 πιθανώς να έμαθε την ιδιότητά του από αυτούς επίσης.

- Ο **Βιτρούβιος** ήταν Ρωμαίος αρχιτέκτων, μηχανικός και συγγραφέας που έζησε τον 1ο αιώνα π.Χ. Στα χρόνια μεταξύ 33 και 22 π.Χ.

δημιουργήθηκε το έργο του «De architectura libri decem» (=Δέκα βιβλία περί Αρχιτεκτονικής), το οποίο είναι αφιερωμένο στον αυτοκράτορα Οκταβιανό Αύγουστο. Χρησιμοποίησε πληθώρα πηγών, κυρίως ελληνικών, όπως θεωρητικά κείμενα Ελλήνων αρχιτεκτόνων μεταξύ των οποίων και ο Ερμογένης. Στα αντικείμενα του βιβλίου περιέχονται, πέρα από τα συνήθη αρχιτεκτονικά θέματα, θεωρήματα του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα, η υδροστατική αρχή του Αρχιμήδη, οι τοπογραφικές μέθοδοι του Ερατοσθένη και του Αρχύτα, καθώς επίσης μελέτες για τη μέτρηση του χρόνου, τις οικοδομικές και πολεμικές μηχανές, τους υδροτροχούς, την εκπαίδευση των Αρχιτεκτόνων κ.ά.
Η θεωρία του χαρακτηρίζεται συχνά ως ανθρωπομορφική, καθώς αποφαίνεται για τους κανόνες περί αναλογιών βασισμένος στις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος. Εξάλλου, αρκετά αναγεννησιακά σχέδια, με πιο γνωστό τον Άνθρωπο του Βιτρούβιου του Λεονάρντο ντα Βίντσι, άντλησαν από τους κανόνες αναλογιών του Βιτρούβιου.

Η στοιχειώδης τριάδα (3, 4, 5) ήταν γνωστή στους αρχαιότατους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων και των Κινέζων.
Οι Κινέζοι μαθηματικοί μάλιστα εφάρμοζαν τον κανόνα εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad b = pq, \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

σε μια ξεχωριστή ομάδα προβλημάτων, στα οποία οι κάθετες αποτελούν διαστήματα τα οποία διατρέχουν κάποια κινητά με ταχύτητες p, q. Τέτοιο είναι, π.χ. το πρόβλημα 14 του ένατου κεφαλαίου στα «Εννέα κεφάλαια της μαθηματικής τέχνης».
Στο «Σχόλιο στο πρώτο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» ο Πρόκλος αναφέρει δύο μεθόδους εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων στην αρχαία Ελλάδα. Μία μέθοδο αποδίδει στους Πυθαγορείους, και άλλη στον Πλάτωνα. Κατά τον Πρόκλο, οι Πυθαγόρειοι ξεκινούσαν από περιττό αριθμό, τον οποίο θεωρούσαν ως την μικρή κάθετο, εύρισκαν το τετράγωνό του, αφαιρούσαν την μονάδα και λάμβαναν το ήμισυ του λαμβανόμενου αριθμού ως μεγάλη κάθετο. Προσθέτοντας την μονάδα στο αποτέλεσμα αυτό υπολόγιζαν την υποτείνουσα, δηλ. οι Πυθαγόρειοι είχαν βρει την εξής λύση

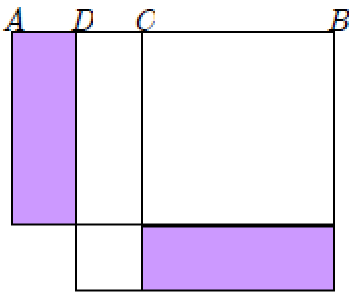
$$x = a, \quad y = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{a^2 + 1}{2}$$

όπου $a = 2k+1$. Έτσι η στοιχειώδης Πυθαγόρεια τριάδα λαμβάνεται από τον πρώτο περιττό αριθμό, το τρία. (Για τους Πυθαγόρειους, και για τους αρχαίους Έλληνες εν γένει, η μονάδα δεν ήταν αριθμός, έτσι ο πρώτος περιττός είναι ο 3.)
Ο Πλάτων, από την άλλη, ξεκινούσε από άρτιο αριθμό και, βρίσκοντας το μισό του, λάμβανε τις Πυθαγόρειες τριάδες με τον εξής κανόνα

$$x = a, \quad y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1, \quad z = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$$

όπου $a = 2k$. Στην περίπτωση αυτή η στοιχειώδης Πυθαγόρεια τριάδα λαμβάνεται από τον δεύτερο άρτιο αριθμό, τον τέσσερα.

Όμως ούτε η μέθοδος των Πυθαγορείων, ούτε του Πλάτωνα δεν δίνουν *όλες* τις Πυθαγόρειες τριάδες. Ο κανόνας που δίνει όλες τις τριάδες εξαρτάται από δύο παραμέτρους, ενώ στους παραπάνω τύπους εμφανίζεται μία μόνο παράμετρος, η a. Ο κανόνας που δίδει όλες τις τριάδες απαντάται για πρώτη φορά στο Βιβλίο X των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Το πρώτο λήμμα στην Πρόταση 29 ζητεί να βρεθούν δύο τετράγωνοι αριθμοί, ώστε το άθροισμά τους να είναι τετράγωνος.



Σχήμα 9

Για τη λύση του προβλήματος αυτού ο Ευκλείδης παίρνει δύο «όμοιους επίπεδους» αριθμούς, δηλ. δύο αριθμούς της μορφής $AB = mnp^2$ και $BC = mnq^2$. Υποθέτει ότι οι αριθμοί αυτοί είναι ταυτόχρονα ή άρτιοι ή περιττοί, οπότε η διαφορά τους $AB - BC$ είναι πάντοτε άρτιος. Έστω AD το μισό αυτής της διαφοράς (Σχήμα 9), τότε από την Πρόταση 6 του δεύτερου Βιβλίου των «Στοιχείων» προκύπτει ότι

$AB \cdot BC + CD^2 = BD^2$ ή

$$(mnp^2)(mnq^2) + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2$$

δηλ. λαμβάνεται λύση με την μορφή

$$x = \frac{mnp^2 - mnq^2}{2}, \quad y = mnpq, \quad z = \frac{mnp^2 + mnq^2}{2}$$

Αν διαιρέσουμε τις παραστάσεις για τα x, y, z με τον κοινό παράγοντα mn και πολλαπλασιάσουμε με 2, λαμβάνομε τη λύση στη συνήθη μορφή

$x = p^2 - q^2, y = 2pq, z = p^2 + q^2$

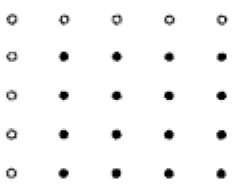
την οποία χρησιμοποιεί αργότερα και ο Διόφαντος.

Ο Bretschneider υποστηρίζει την εξής απλή μέθοδο για το πώς ο Πυθαγόρας έβρισκε τα τρίγωνά του: έγραφε σε τρείς σειρές (α) τους φυσικούς αριθμούς, (β) τα τετράγωνά τους και (γ) τους διαδοχικούς περιττούς αριθμούς, που αποτελούν τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών τετραγώνων του (β).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27

Ο Πυθαγόρας είχε απλά να διαλέξει έναν αριθμό της τρίτης γραμμής που ήταν τετράγωνο και ύστερα θα συνέδεε αυτό τον αριθμό με τους δύο γειτονικούς του της δεύτερης γραμμής.

Ο Treutlein από την άλλη, υποστηρίζει κάτι που φαίνεται πιο απλό και πιο κοντά στον Πυθαγόρα. Λέει λοιπόν, ότι οποιοδήποτε τετράγωνο μπορεί να



μετατραπεί στο αμέσως μεγαλύτερο τετράγωνο απλά προσθέτοντας μια σειρά από κουκίδες γύρω από δύο γειτονικές πλευρές, σε μορφή γνώμονα. Έτσι προκύπτει άμεσα ο τύπος του Πυθαγόρα.

Αν στις $16 = 4^2$ μαύρες κουκίδες προσθέσουμε τις $9 = 3^2$ άσπρες κουκίδες έχουμε ένα νέο τετράγωνο με πλευρά 5.

Βιβλιογραφία:

1. Τριανταφύλλου Δήμος (2008). "ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΝΣΩΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (EMBODIED MATHEMATICS)"

2. **Thomas L. Heath** (1909). The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2

3. Wikipedia

4. http://mythologia.8m.com/pithagoras.html

5. http://www2.forthnet.gr/presocratics/pithag.htm

6. http://www.mathsforyou.gr

7. http://www.mousa.gr/html/eydoksos.html

8. Κώστας Δόρτσιος. Η Στήλη των Μαθηματικών http://www.emekozanis.gr/reports/r071012/dorts071212.pdf