ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΡΡΗΤΟΙ, ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Άρρητοι αριθμοί

Λύνουμε την εξίσωση $x^2 = 2 \rightarrow x \cong 1{,}414$ ή $x \cong -1{,}414$.

Όσο και να συνεχίσουμε δε θα βρούμε τη δεκαδική μορφή αυτού του αριθμού, καθώς η διαδικασία αυτή δεν τελειώνει.

Έτσι, επειδή δεν μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε άρρητο.

Άρρητος είναι ο αριθμός που δεν μπορεί να γραφτεί σε δεκαδική μορφή ή σε μορφή κλάσματος.

Ορισμός τετραγωνικής ρίζας 1

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α, δηλαδή $\sqrt{\alpha}$ είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, που αν υψωθεί στο τετράγωνο ισούται με τον α.

Άρα η τετραγωνική ρίζα είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Το σύμβολο $\sqrt{\ }$ ονομάζεται ριζικό.

Ειδικά $\sqrt{0} = 0$

Ορισμός τετραγωνικής ρίζας 2

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 2 είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2 = 2$.

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού α (που δεν είναι αρνητικός) είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Η τετραγωνική ρίζα του 2 συμβολίζεται με $\sqrt{2}$.

Η τετραγωνική ρίζα του α (που δεν είναι αρνητικός) συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επίσης $\sqrt{2}^2 = 2$ και $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$.

Ιδιότητες

P1) $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

P2) $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

P3) $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της αντιστοιχίας και της συνάρτησης

Συνάρτηση είναι μία αντιστοιχία από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β, με τρόπο ώστε αν δίνεται ένα στοιχείο του Α να γνωρίζουμε σε ποιο από τα στοιχεία του Β αυτό αντιστοιχεί.

Άρα η συνάρτηση είναι:
προσανατολισμένη αντιστοιχία
που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του Α σε ένα στοιχείο του Β που πρέπει να μπορούμε να βρούμε ποιο είναι.

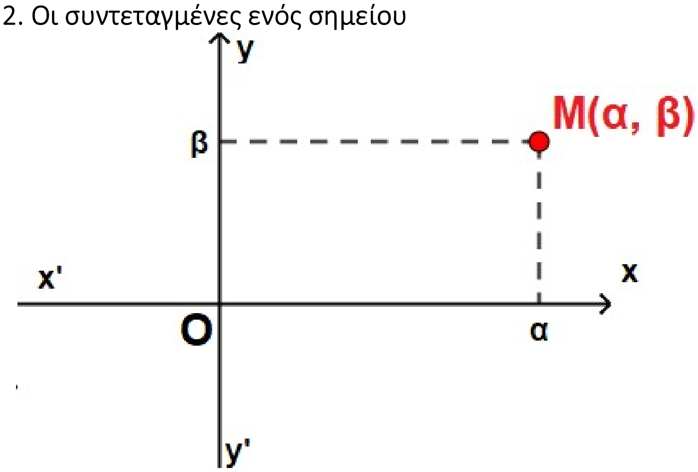
Αναπαραστάσεις συνάρτησης

1. Πίνακας τιμών
2. Γραφική παράσταση
3. Τύπος

Σύστημα συντεταγμένων

1. Το σύστημα

2. Οι συντεταγμένες ενός σημείου



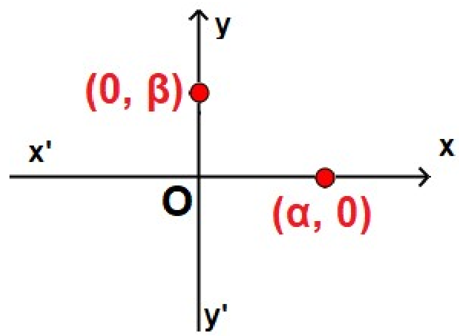
Οι (α,β) ονομάζονται συντεταγμένες του Μ.

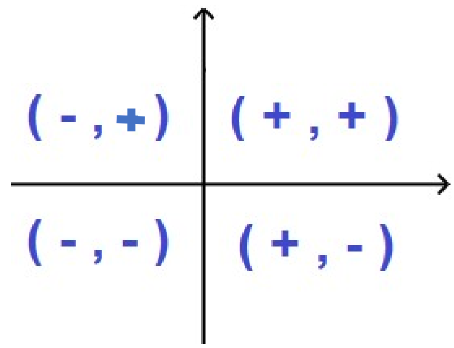
Η α ονομάζεται τετμημένη.

Η β ονομάζεται τεταγμένη.

Γράφουμε πρώτα το α και μετά το β.

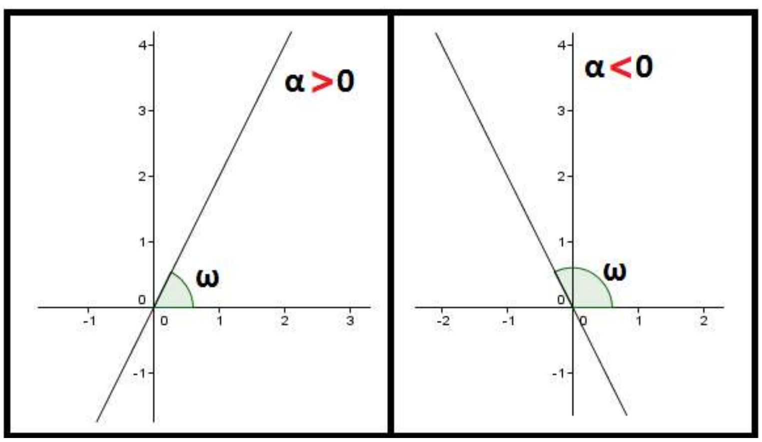
3. Σημεία των αξόνων και πρόσημα συντεταγμένων σε κάθε τεταρτημόριο





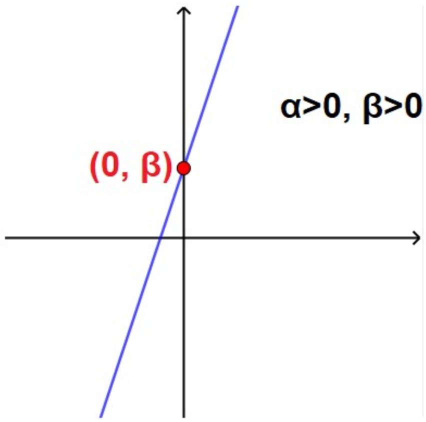
Βασικές συναρτήσεις και γρ. παραστάσεις

1. y = αx [ΑΝΑΛΟΓΙΑ]
Η ευθεία $y = \alpha x$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$ και εκφράζει σχέση αναλογίας μεταξύ των x και y. Ο αριθμός α είναι ο λόγος της αναλογίας, αλλά και η κλίση της ευθείας. Η ευθεία $y = 2x$ έχει μικρότερη κλίση από την ευθεία $y = 3x$.



Π.χ. αν $y = 2x$, η συνάρτηση είναι σχέση αναλογίας με **λόγο αναλογίας** $\alpha = 2$.
Αυτό σημαίνει ότι αν διαιρέσουμε οποιοδήποτε y με το αντίστοιχο x, το πηλίκο είναι 2.
Δηλαδή $\frac{y}{x} = 2$.
Γενικά, στη σχέση $y = \alpha x$, ο α είναι ο λόγος της αναλογίας και ισχύει $\alpha = \frac{y}{x}$.

2. y=αx+β με β≠ 0 [ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ]
Τα ποσά y και x **δεν είναι ανάλογα**.
Η σχέση των y και x δε λέγεται αναλογία, αλλά **γραμμική** σχέση.

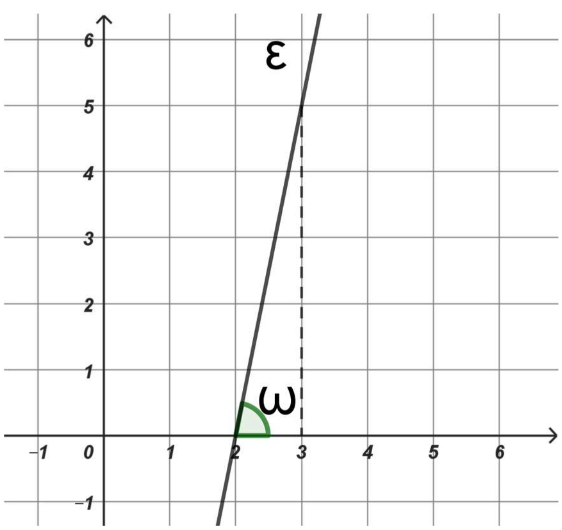


Γενικά συμπεράσματα:
Ι. Το α στην $y = \alpha x$ το ονομάζουμε «λόγο» ή «κλίση». Στην περίπτωση $y = \alpha x + \beta$ το α ονομάζουμε απλά «κλίση».

ΙΙ. Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$, αν $\beta \neq 0$:
α) δεν εκφράζει σχέση αναλογίας.
β) εκφράζει γραμμική σχέση.
γ) είναι ευθεία, η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
δ) είναι ευθεία, παράλληλη στην $y = \alpha x$, που έχει την ίδια κλίση.

- Η ευθεία $y = 2x$ έχει μικρότερη κλίση/λόγο από την ευθεία $y = 3x$.
- Η ευθεία $y = 2x + 1$ έχει μικρότερη κλίση από την ευθεία $y = 3x + 5$.
- Οι ευθείες $y = 4x$, $y = 4x + 3$ και $y = 4x - 2$ έχουν ίσες κλίσεις και είναι παράλληλες.

ΙΙΙ. Η γωνία ω έχει ως πλευρές τον ημιάξονα $\boldsymbol{Ox}$ και την ευθεία.

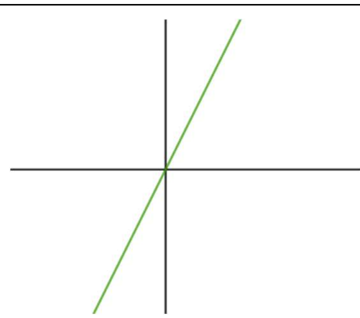
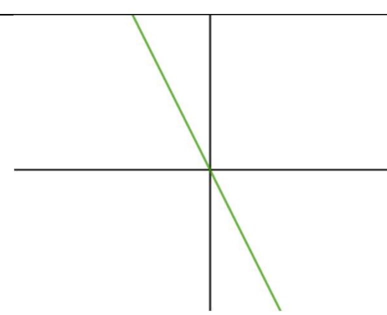


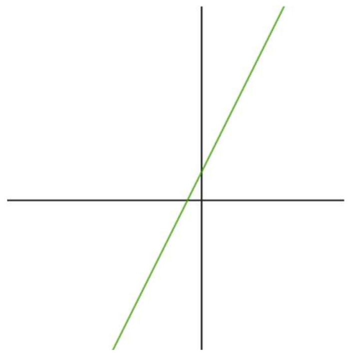
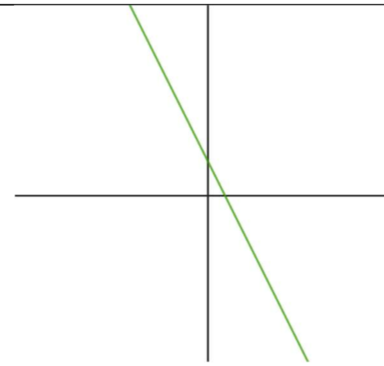
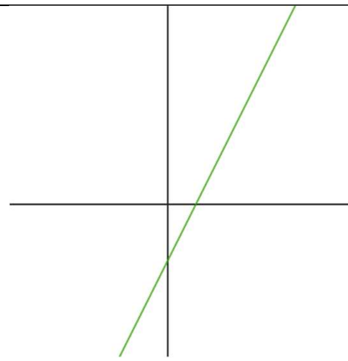
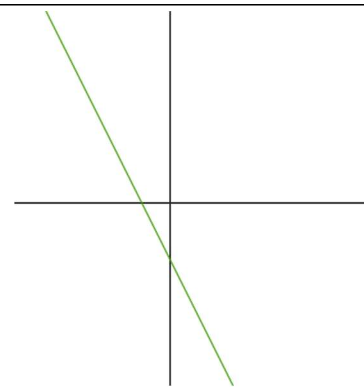
- Όταν η κλίση της ευθείας είναι θετική, τότε η γωνία είναι οξεία και είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω.
  Δηλαδή, για την ευθεία $y = 5x - 10$ (σχήμα) είναι $\varepsilon\varphi\omega = 5$.
- Όταν η κλίση της γωνίας είναι αρνητική, τότε η γωνία είναι αμβλεία.
- Όταν αυξάνεται το α, δηλαδή η κλίση της ευθείας μεγαλώνει η ω.

Το α στην $y = \alpha x$ (γραμμική, αναλογία) και στην $y = \alpha x + \beta$ (γραμμική) δείχνει το ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x.
Δηλαδή μας δείχνει «πόσο μεταβάλλεται το y, όταν το x αυξάνεται κατά 1».

Επίσης

$y = \alpha x + \beta$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\beta = 0$ Ανάλογα ποσά	Διέρχεται από το $O(0,0)$ ω: οξεία Ρυθμός μεταβολής: θετικός, άρα «αύξηση»	Διέρχεται από το $O(0,0)$ ω: αμβλεία Ρυθμός μεταβολής: αρνητικός, άρα «μείωση»
$\beta > 0$ Γραμμική συνάρτηση	Τέμνει τον Oy ω: οξεία Ρυθμός μεταβολής: θετικός, άρα «αύξηση»	Τέμνει τον Oy ω: αμβλεία Ρυθμός μεταβολής: αρνητικός, άρα «μείωση»
$\beta < 0$ Γραμμική συνάρτηση	Τέμνει τον Oy' ω: οξεία Ρυθμός μεταβολής: θετικός, άρα «αύξηση»	Τέμνει τον Oy' ω: αμβλεία Ρυθμός μεταβολής: αρνητικός, άρα «μείωση»

$y = \alpha x + \beta$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\beta = 0$		

$\beta > 0$		
$\beta < 0$		

3. Η περίπτωση $y = \frac{\alpha}{x}$ ή $y \cdot x = \alpha$

Η σχέση $y \cdot x = \alpha$ ή $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου α είναι ένας σταθερός αριθμός σημαίνει ότι τα x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Έχουμε μια συνάρτηση αντιστρόφως ανάλογων ποσών με τύπο:

$$y = \frac{\alpha}{x}$$

(ή $y \cdot x = \alpha$, ή $x = \frac{\alpha}{y}$)

Θα δούμε την περίπτωση που ο αριθμός α είναι θετικός και τα x και y θετικά.

Για παράδειγμα, $y \cdot x = 20$ ή $y = \frac{20}{x}$ (εδώ $\alpha = 20$).
Μερικά ζεύγη των ποσών x και y είναι:

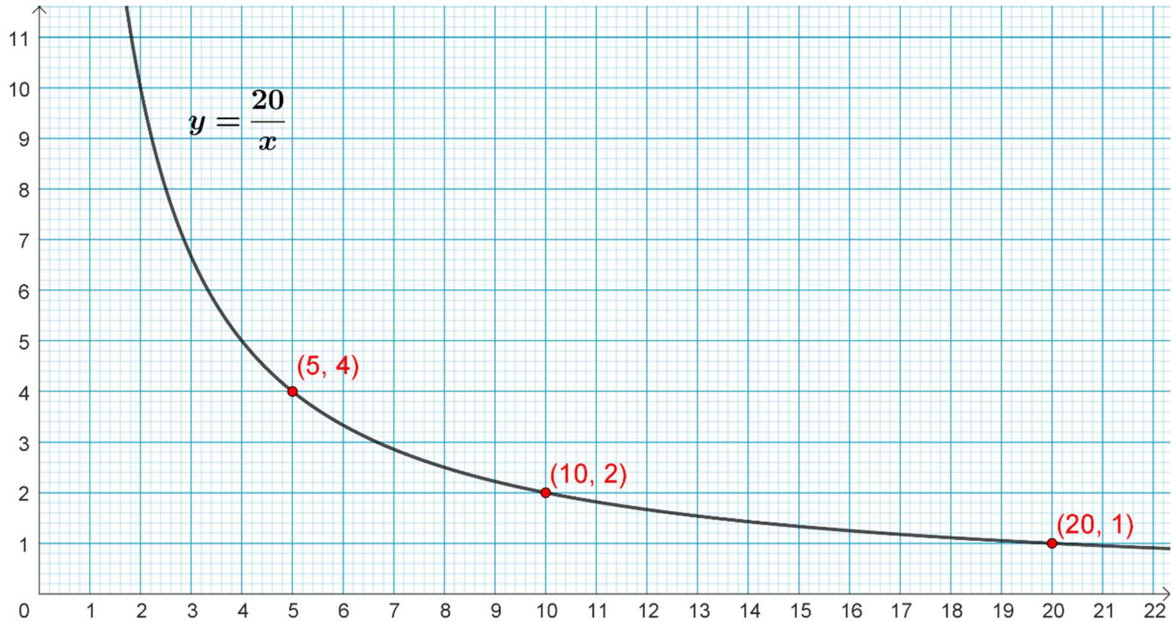
x	1	2	4	8	16
y	20	10	5	2,5	1,25

Για τη συνάρτηση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών έχουμε ότι:

- Η γραφική της παράσταση δεν είναι ευθεία, αλλά καμπύλη (αυτή την καμπύλη ονομάζουμε υπερβολή).
- Το γινόμενο των τιμών των x και y παραμένει σταθερό 20.
  Π.χ. $1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = \cdots = 20$

- Με όποιον αριθμό πολλαπλασιάζουμε, με τον ίδιο αριθμό διαιρούμε το άλλο.

Γραφική παράσταση:



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

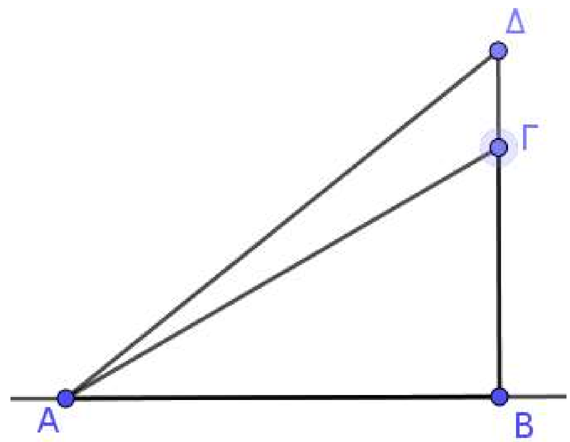
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Κλίση γωνίας

Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο.

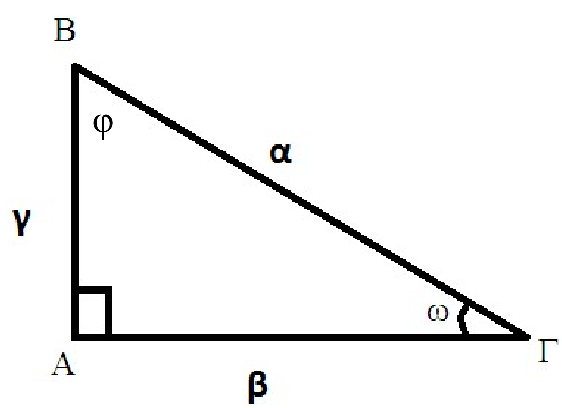
Ως κλίση της γωνίας $B\hat{A}\Delta$ ονομάζουμε τον λόγο $\frac{B\Delta}{AB}$.

Ομοίως ως κλίση της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ ονομάζουμε τον λόγο $\frac{B\Gamma}{AB}$.



Η κλίση μιας γωνίας εκφράζεται με την εφαπτομένη της γωνίας.

$$\varepsilon\varphi(\text{οξείας γωνίας}) = \frac{\text{απέναντι κάθετη της γωνίας}}{\text{προσκείμενη κάθετη της γωνίας}}$$



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{\gamma}$$

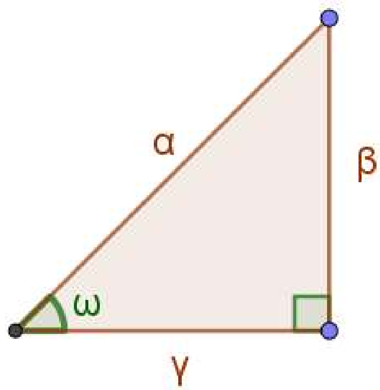
Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Εφαπτομένη, ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας που συμβολίζονται ως:

εφ(όνομα γωνίας),

ημ(όνομα γωνίας) και

συν(όνομα γωνίας).



$$ημω = \frac{β}{α} \rightarrow \begin{cases} β = α \cdot ημω \\ α = \dfrac{β}{ημω} \end{cases}$$

$$συνω = \frac{γ}{α} \rightarrow \begin{cases} γ = α \cdot συνω \\ α = \dfrac{γ}{συνω} \end{cases}$$

$$εφω = \frac{β}{γ} \rightarrow \begin{cases} β = γ \cdot εφω \\ γ = \dfrac{β}{εφω} \end{cases}$$

Όταν αυξάνεται η γωνία:

- Αυξάνονται η εφαπτομένη της και το ημίτονό της.
- Μειώνεται το συνημίτονό της.

Όταν μειώνεται η γωνία:

- Αυξάνεται το συνημίτονό της.
- Μειώνονται η εφαπτομένη της και το ημίτονό της.

Η **μέγιστη τιμή** που μπορεί να πάρει το ημίτονο μιας γωνίας **είναι 1**.

Το ίδιο ισχύει και για το συνημίτονο.

Δηλαδή:

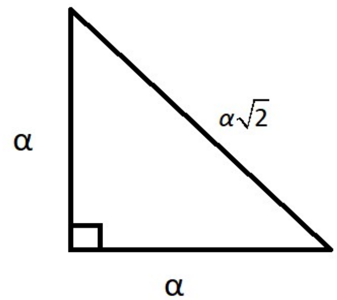
Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύει ότι:

$ημω < 1$ και $συνω < 1$, γιατί η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

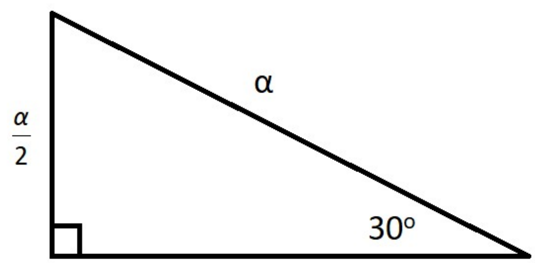
Επίσης:

$εφω = \frac{ημω}{συνω}$.

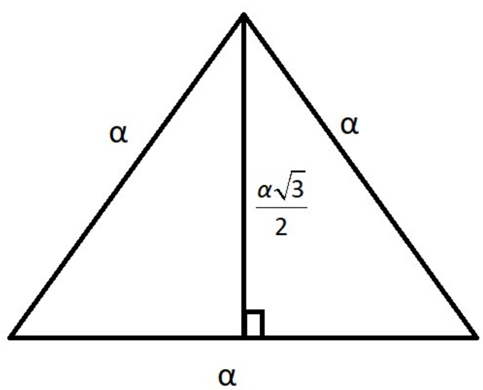
<Θ1> Αν ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους α, τότε το μήκος της υποτείνουσας είναι $\alpha\sqrt{2}$



<Θ2> Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μία γωνία 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά έχει το μισό μήκος της υποτείνουσας.



<Θ3> Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.



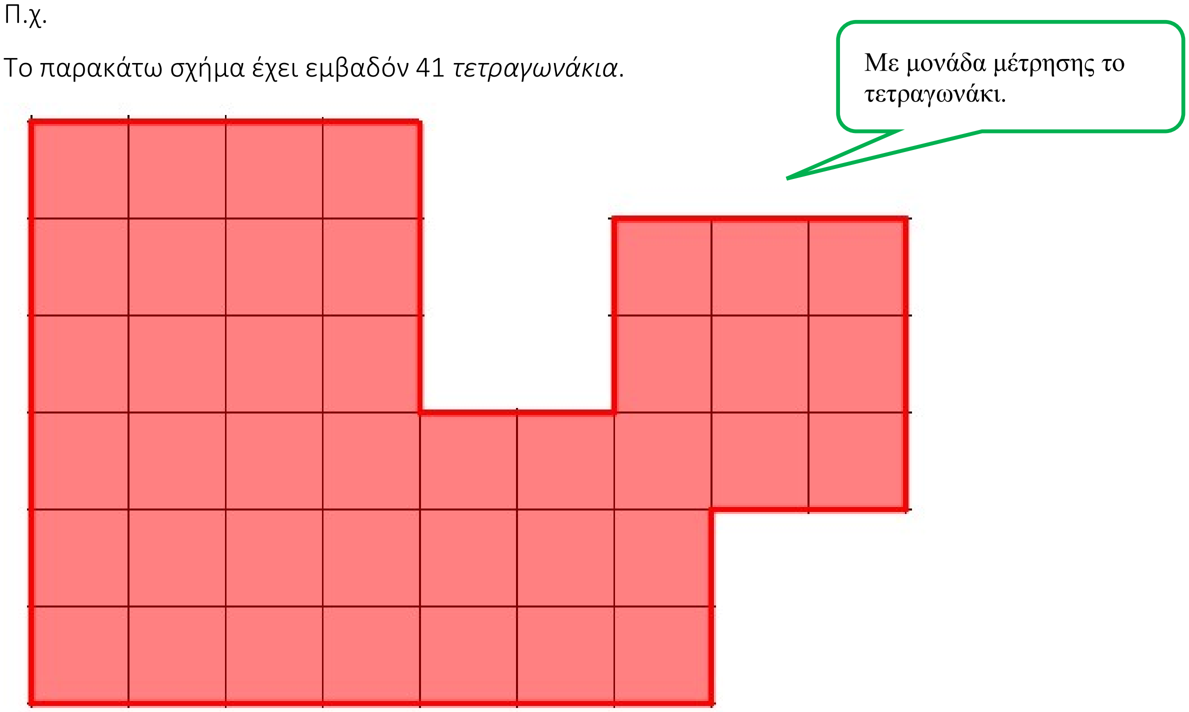
<Θ4> Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

ΕΜΒΑΔΑ

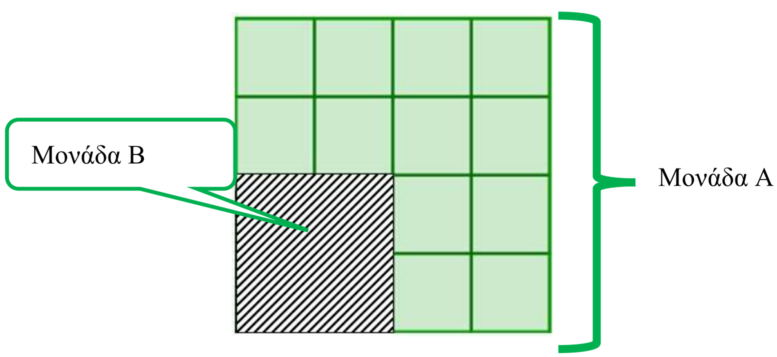
Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο, με αναφορά στη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Π.χ.

Το παρακάτω σχήμα έχει εμβαδόν 41 *τετραγωνάκια*.



Έχουμε δύο μονάδες μέτρησης εμβαδού, την Α και τη Β.



Η $A = 4 \cdot B$, δηλαδή η Α είναι τετραπλάσια από τη Β.
Τότε:
>> η μονάδα Α είναι 4 φορές μεγαλύτερη από την Β,
Και..
Αν το εμβαδόν ενός σχήματος είναι ίσο με 20 Α, τότε το ίδιο εμβαδόν μετρημένο σε Β είναι ίσο με $20 \cdot 4 = 80$ B,
αν το εμβαδόν ενός σχήματος είναι ίσο με 20 Β, τότε το ίδιο εμβαδόν μετρημένο σε Α είναι ίσο με $20 : 4 = 5$ A.

Για το ίδιο εμβαδόν ισχύει ότι
>> από «μικρή» μονάδα σε «μεγάλη» μονάδα, ο αριθμός μικραίνει,

>> από «μεγάλη» μονάδα σε «μικρή» μονάδα, ο αριθμός μεγαλώνει.

Μονάδες μέτρησης εμβαδού

Ονομασία	Σύμβολο	Μετατροπή	Εμβαδόν 100 φορές μεγαλύτερο από την αμέσως μικρότερη μονάδα μέτρησης εμβαδού
Τετραγωνικό μέτρο	m^2	$1\,m^2 = 10^2\ dm^2$	
Τετραγωνικό Δεκατόμετρο	dm^2	$1\,dm^2 = 10^2\ cm^2$	
Τετραγωνικό εκατοστό	cm^2	$1\,cm^2 = 10^2\,mm^2$	
Τετραγωνικό χιλιοστό	mm^2		

Τετραγωνικό χιλιόμετρο	Km^2	$1\,Km^2 = 10^3$ στρ.
Στρέμμα	στρ.	

Πίνακας 4α

$1\ m^2$		
$100\ dm^2$	$1\ dm^2$	
	$100\ cm^2$	$1\ cm^2$
		$100\ mm^2$

Πίνακας 4β

		$0{,}01\ m^2$
	$0{,}01\ dm^2$	$1\ dm^2$
$0{,}01\ cm^2$	$1\ cm^2$	
$1\ mm^2$		

Πίνακας 4γ

$1\ m^2$		
$10^2\ dm^2$	$1\ dm^2$	
	$10^2\ cm^2$	$1\ cm^2$
		$10^2\ mm^2$

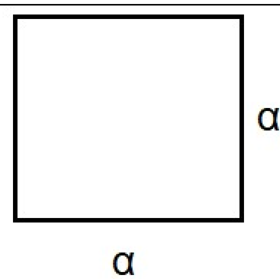
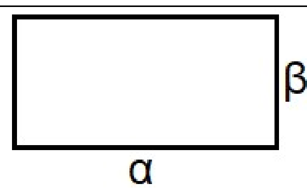
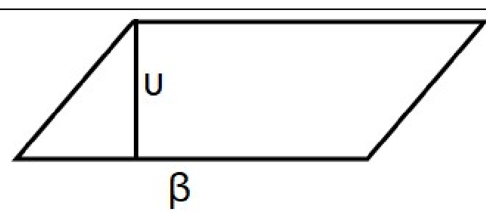
Πίνακας 4δ

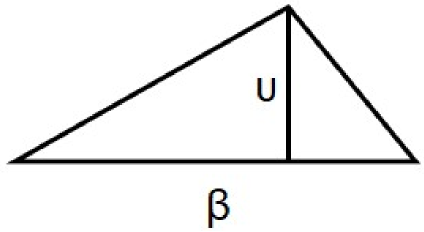
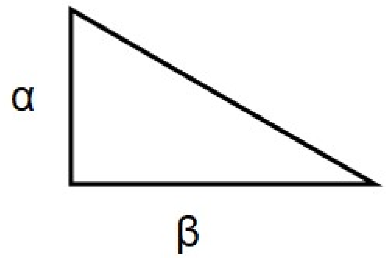
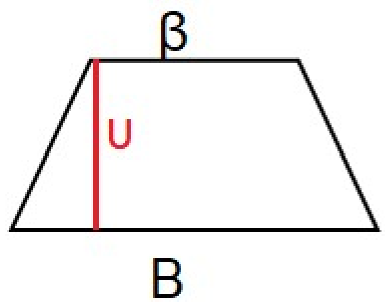
		$\frac{1}{100}\ m^2$
	$\frac{1}{100}\ dm^2$	$1\ dm^2$
$\frac{1}{100}\ cm^2$	$1\ cm^2$	
$1\ mm^2$		

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΜΟΝΑΔΩΝ		
×100 ↓	m^2	↑ :100
	dm^2	
×100 ↓		↑ :100
	cm^2	
×100 ↓		↑ :100
	mm^2	

Σχολικό: σελίδες 119-120
Εμβαδόν τριγώνου, παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, τραπεζίου.
Να γνωρίζετε πώς τα βρίσκουμε!
Δηλαδή <u>μόνο</u> να εφαρμόζετε τον τύπο για κάθε σχήμα, όχι την απόδειξη του τύπου!

Χρήσιμα αποσπάσματα θεωρίας

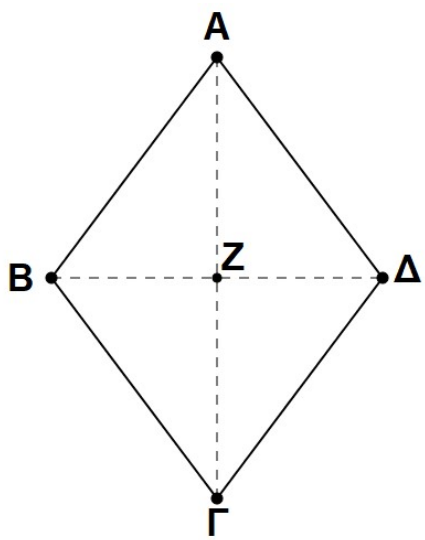
Ονομασία σχήματος	Σχήμα	Τύπος εμβαδού
Τετράγωνο		α^2
Ορθογώνιο		$\alpha \cdot \beta$
παραλληλόγραμμο		$\beta \cdot \upsilon$

Τρίγωνο		$\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$
Ειδική περίπτωση ορθογωνίου τριγώνου		$\frac{\alpha \cdot \beta}{2}$
Τραπέζιο		$\frac{(\mathrm{B}+\beta)\cdot \upsilon}{2}$

Εμβαδόν Ρόμβου

$$E = \frac{\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$$

Το εμβαδόν του ρόμβου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των διαγωνίων του.



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΠΘ: Ισχύει σε ένα τρίγωνο που **ξέρουμε** ότι είναι ορθογώνιο.

Διατύπωση: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των καθέτων.»

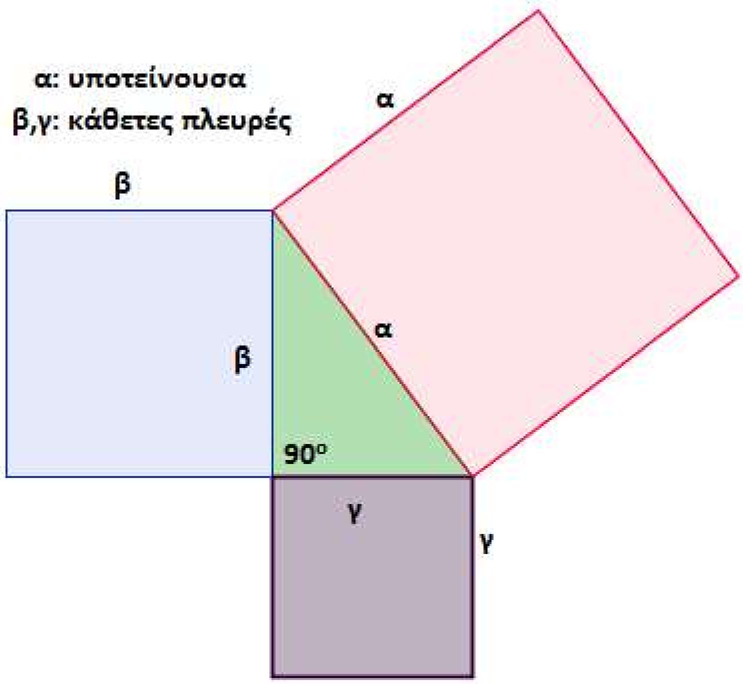
Γενικά γράφουμε:

$$\begin{pmatrix}\text{εμβαδόν τετραγώνου}\\ \text{υποτείνουσας}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{άθροισμα των εμβαδών των}\\ \text{τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών}\end{pmatrix}$$

ή

$$(\text{υποτείνουσα})^2=(\text{μια κάθετη})^2+(\text{άλλη κάθετη})^2$$

Στο παρακάτω τρίγωνο είναι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.



ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

ΑΠΘ: «Αν μια τριάδα θετικών αριθμών α, β και γ έχει την ιδιότητα:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

τότε μπορεί να σχεδιαστεί ορθογώνιο που τα μήκη των πλευρών του να είναι ίσα με τους α, β και γ.»

ΚΥΚΛΟΣ

$\boxed{1}$ Μήκος κύκλου.

Δίνεται κύκλος με διάμετρο δ και ακτίνα ρ.

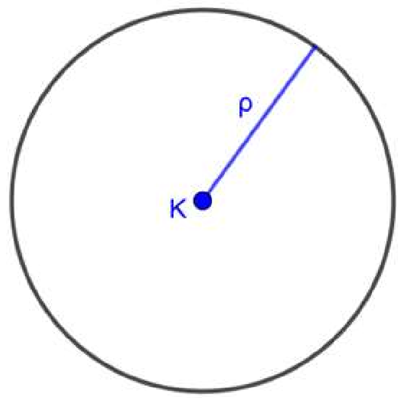
Το μήκος L του κύκλου και η διάμετρός του είναι ανάλογα ποσά με σταθερό λόγο π.

Άρα $\dfrac{L}{\delta} = \pi \approx 3{,}14$.

Αλλιώς $\dfrac{L}{2\rho} = \pi$ ή $\dfrac{L}{\rho} = 2\pi$ (με «μισό» χιαστί).

Άρα $\dfrac{L}{\rho} = 2\pi \approx 6{,}28$ καθώς $\pi \approx 3{,}14$.

Δηλαδή: Το μήκος L του κύκλου και η ακτίνα του είναι ανάλογα ποσά με σταθερό λόγο 2π.



Το μήκος L του κύκλου είναι ίσο με $L = 2\pi \cdot \rho$ για οποιονδήποτε κύκλο.

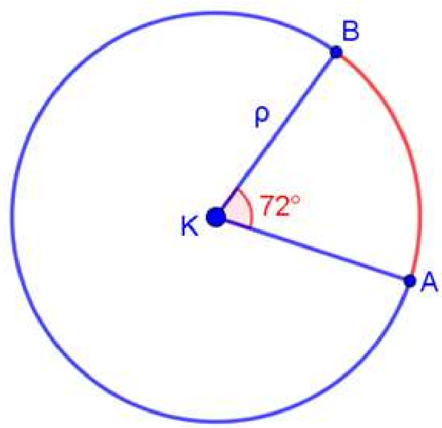
π.χ. αν ρ = 3 cm, τότε $L = 2\pi \cdot \rho = 2\pi \cdot 3 \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84$ cm.

Ή, χωρίς αντικατάσταση του π:

$$L = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \quad cm$$

$\boxed{2}$ Μήκος τόξου.

Δίνεται κύκλος ακτίνας ρ = 3 cm. Όπως βρήκαμε ο κύκλος θα έχει μήκος $L \approx 18{,}84$ ή, χωρίς αντικατάσταση του π θα είναι 6π.



Πώς μπορούμε να βρούμε το μήκος του (κόκκινου) τόξου ΑΒ;

Στο σχήμα, ο κυκλικός τομέας ΚΑΒ είναι αυτό το μέρος του κύκλου που περικλείεται μεταξύ του τόξου ΑΒ και των ακτίνων ΚΑ και ΚΒ.

Είναι ίσο με το $\frac{1}{5}$ του κύκλου, καθώς $360^o : 72^o = 5$ ή

$$\frac{72^o}{360^o} = \frac{1}{5}$$

Άρα το μήκος του τόξου είναι περίπου $18{,}84 : 5 = 3{,}768$ cm, ή χωρίς αντικατάσταση του π:

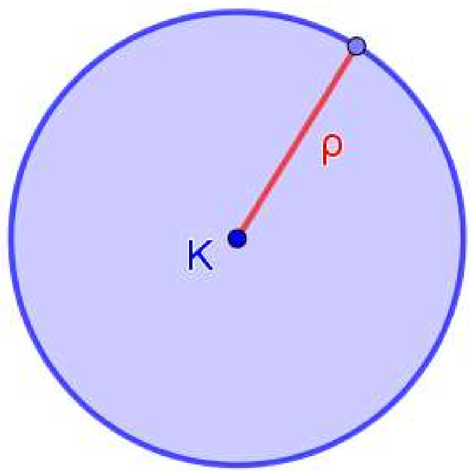
$$\frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}{5} = \frac{6\pi}{5}\ \ cm$$

$\boxed{3}$ Εμβαδόν κύκλου ή κυκλικού δίσκου.

Το εσωτερικό του κύκλου (όπως του παρακάτω, που είναι χρωματισμένο) μαζί με τον κύκλου (δηλαδή τη «γραμμή») ονομάζεται **κυκλικός δίσκος**.

Όταν λέμε «εμβαδόν κύκλου», εννοούμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
Εδώ, για να βρίσκουμε το εμβαδόν ενός κύκλου, αν γνωρίζουμε την ακτίνα του θα χρησιμοποιούμε τον τύπο

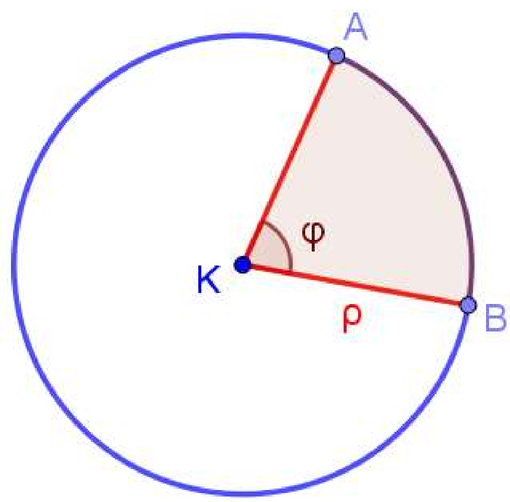
$E = \pi\rho^2$, όπου ρ: ακτίνα



Αν ρ = 3:

$$E = \pi \cdot \rho^2 \to E = \pi \cdot 3^2 \to E = \pi \cdot 9 \approx 3{,}14 \cdot 9 = 28{,}26$$

$\boxed{4}$ Κυκλικός τομέας



Στο παραπάνω σχήμα, βλέπουμε:

- → Τον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.
- → Την επίκεντρη γωνία φ.
- → Το τόξο ΑΒ, που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία φ.
- → Τον **κυκλικό τομέα** ΚΑΒ, της γωνία φ.

Ο κυκλικός τομέας είναι ένα επίπεδο σχήμα, κομμάτι του κύκλου μεταξύ δύο ακτίνων του και του αντίστοιχου τόξου.
<u>Δεν</u> είναι <u>ευθύγραμμο</u> σχήμα, αφού η μία γραμμή από αυτές που το σχηματίζουν είναι τόξο.

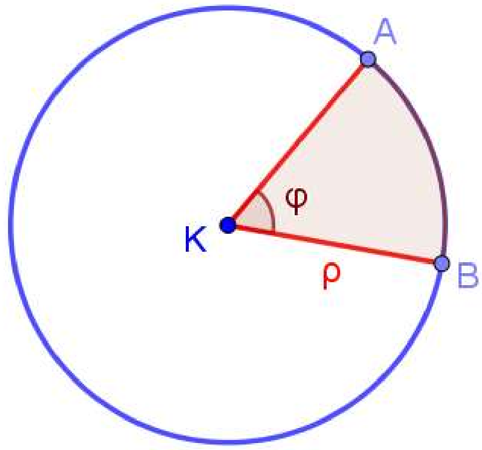
Σαν επίπεδο σχήμα έχει εμβαδόν.

| 5 | Εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι **ανάλογο** της επίκεντρης γωνίας του.

Στο παραπάνω σχήμα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΑΒ είναι ανάλογο της γωνίας φ.

Πώς το βρίσκουμε;
<u>Π.χ</u>
Παρακάτω φαίνεται ένας κύκλος ακτίνας ρ = 3 και ο κυκλικός τομέας ΚΑΒ, με την επίκεντρη γωνία $\varphi = 60^o$.



Για να βρούμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα κάνουμε το εξής.

Οι 60^o, χωράνε 6 φορές στις 360^o , εφόσον $360^o : 60^o = 6$.
Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα θα είναι το $\frac{1}{6}$ του εμβαδού του κύκλου.

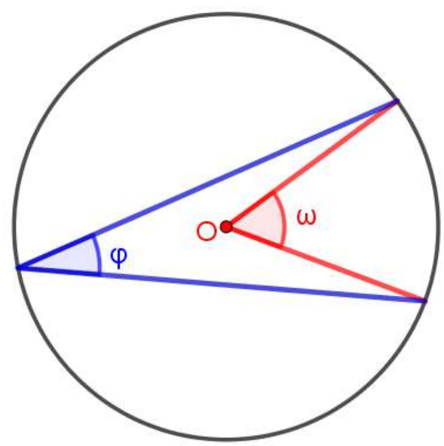
Άρα $28,26 : 6 = 4,71$ ή $\frac{9\pi}{6}$ (χωρίς αντικατάσταση του π).

Επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες

Η **επίκεντρη** γωνία ω έχει ως κορυφή το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της είναι ακτίνες του κύκλου.

Η **εγγεγραμμένη** γωνία φ έχει ως πλευρές της δύο χορδές του κύκλου και ως κορυφή της ένα σημείο του κύκλου.

Ισχύει $\omega = 2\varphi$
Η ω είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της εγγεγραμμένης ω, γιατί έχουν **κοινό τόξο**.



ΑΡΑ
α) Επίκεντρη ονομάζουμε τη γωνία που η κορυφή της είναι στο κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της είναι ακτίνες του κύκλου.

β) Εγγεγραμμένη ονομάζουμε τη γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι χορδές του κύκλου.

Το μέτρο μιας εγγεγραμμένη γωνίας είναι ίσο με το μισό του μέτρου της αντίστοιχης επίκεντρης (που βαίνει στο ίδιο τόξο).

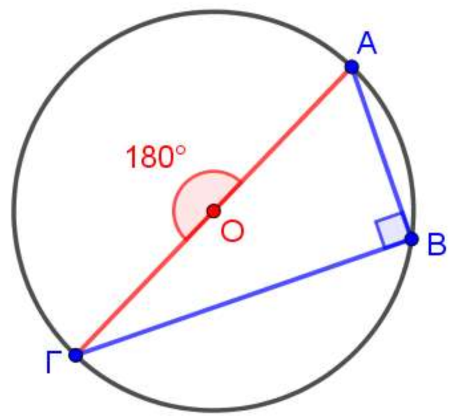
Ημικύκλιο: ένα τόξο κύκλου με μέτρο 180^o.
Διάμετρος ημικυκλίου: η διάμετρος του κύκλου που ανήκει το ημικύκλιο.

Γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο

Η επίκεντρη γωνία ΑΟΓ είναι ευθεία, δηλαδή 180^o.

Τότε η αντίστοιχη εγγεγραμμένη είναι ίση με $180^o : 2 = 90^o$.

Το ΑΓ είναι ημικύκλιο τόξο.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **εγγεγραμμένο στον κύκλο**, γιατί οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.
Ο κύκλος είναι **περιγεγραμμένος στο τρίγωνο**.



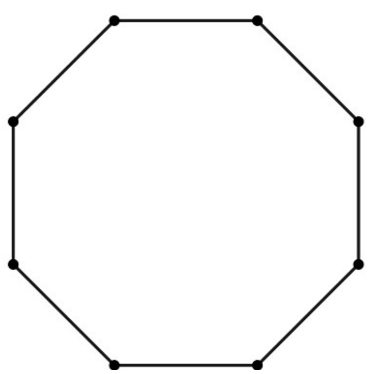
Άρα
η εγγεγραμμένη γωνία που **βαίνει** σε ημικύκλιο είναι ορθή και
το τρίγωνο που είναι **εγγεγραμμένο σε κύκλο** και έχει ως πλευρά τη διάμετρο του κύκλου είναι ορθογώνιο.

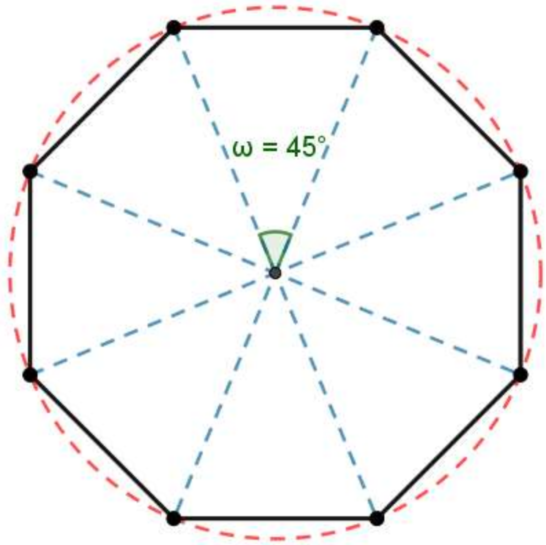
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

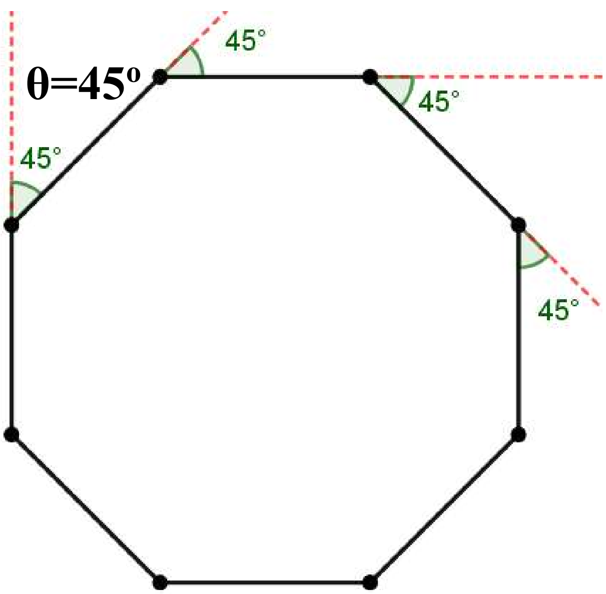
Τι είναι κανονικό πολύγωνο

Κανονικό ονομάζεται το κυρτό πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες του ίσες.

Π.χ. κανονικό οκτάγωνο:







A. Εξωτερική γωνία κανονικού πολυγώνου (θ).
Η γωνία με πλευρές την προέκταση της πλευράς ενός κανονικού πολυγώνου και την διαδοχική πλευρά, ονομάζεται **εξωτερική γωνία** του κανονικού πολυγώνου και θα τη συμβολίσουμε ως $\boldsymbol{\hat{\theta}_{\nu}}$.
Είναι $\hat{\theta}_{\nu} = \frac{360^{o}}{\nu}$, για κανονικό ν-γωνο.
Στο παραπάνω παράδειγμα $\hat{\theta}_{8} = 45^{o}$. [Το 8 σημαίνει ότι πρόκειται για κανονικό οκτάγωνο ή 8-γωνο].

B. Κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου (ω).
Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται με το γράμμα ω και συγκεκριμένα ω_{ν}.
Η $\hat{\theta}_{\nu}$έχει ίσο μέτρο με **την κεντρική γωνία $\boldsymbol{\hat{\omega}_{\nu}}$** του πολυγώνου. Άρα $\boldsymbol{\hat{\omega}_{\nu} = \frac{360^{o}}{\nu}}$.

Στο παραπάνω παράδειγμα, στο κανονικό 8-γωνο είναι $\widehat{\omega}_8 = \frac{360^o}{8}$.

Γ. Γωνία κανονικού πολυγώνου (φ).

Η γωνία $\widehat{\varphi}_\nu$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι η κάθε κυρτή γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών πλευρών του.

Η $\widehat{\varphi}_\nu$ είναι παραπληρωματικών των $\widehat{\theta}_\nu$ και $\widehat{\omega}_\nu$. Δηλαδή $\boldsymbol{\widehat{\varphi}_\nu = 180^o - \widehat{\omega}_\nu}$.

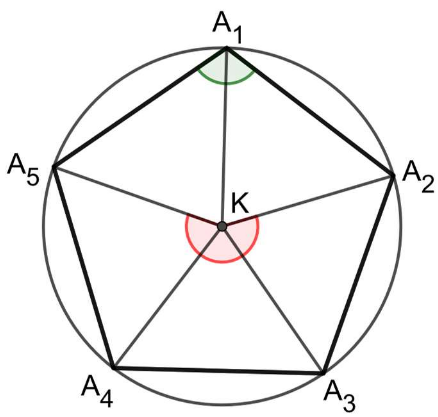
Άρα:

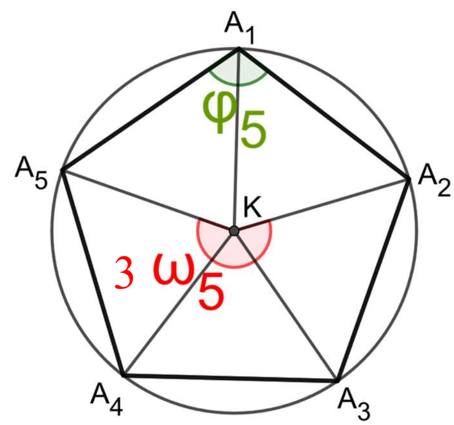
Η **γωνία $\boldsymbol{\widehat{\varphi}_8}$ του κανονικού 8-γώνου** είναι ίση με $\widehat{\varphi}_8 = 180^o - 45^o = 135^o$.

Παράδειγμα

Παρακάτω φαίνεται ένα εγγεγραμμένο κανονικό πεντάγωνο.

Έχουμε $\omega_5 = \frac{360^o}{5} = 72^o$ και $\varphi_5 = 180^o - \omega_5 = 180^o - 72^o = 108^o$.





ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέτρα θέσης

Οι αριθμοί που αποτελούν ένα δείγμα λέγονται τιμές του δείγματος.

Συχνότητα μίας τιμής είναι ο αριθμός που δείχνει «πόσες φορές» εμφανίζεται η κάθε τιμή στο δείγμα.
Συχνότητα μιας τιμής ονομάζουμε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ίσες με αυτή την τιμή.

Οι τιμές απαντούν στην ερώτηση «τι» ή «ποιοι».

Οι συχνότητες απαντούν στην ερώτηση «πόσα».

Μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων τιμών ονομάζουμε έναν αριθμό που ισούται με το πηλίκο:

$$\frac{άθροισμα\ τιμών}{πλήθος\ τιμών}$$

Η μέση τιμή ενός δείγματος συμβολίζεται με $\bar{x}$.

Π.χ. Αν έχουμε το δείγμα 8 παρατηρήσεων, δηλαδή των 0, 11, 5, 16, 17, 20, 1, -4, τότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{0+11+5+16+17+20+1+(-4)}{8} = 8{,}25$$

Η διάμεσος ενός δείγματος συμβολίζεται με δ.

Πρακτικά, διάμεσο ονομάζουμε:

- Την μεσαία παρατήρηση, αν αυτές τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά, όταν το πλήθος τους είναι περιττό.
- Την μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων αν αυτές τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά, όταν το πλήθος τους είναι άρτιο.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν τοποθετήσουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις, τότε:

-4, 1, 0, $\boxed{5, 11}$, 16, 17, 20

Άρα $\delta = \frac{5+11}{2} = 8$.

Σε ένα άλλο παράδειγμα με περιττό πλήθος παρατηρήσεων έχουμε:

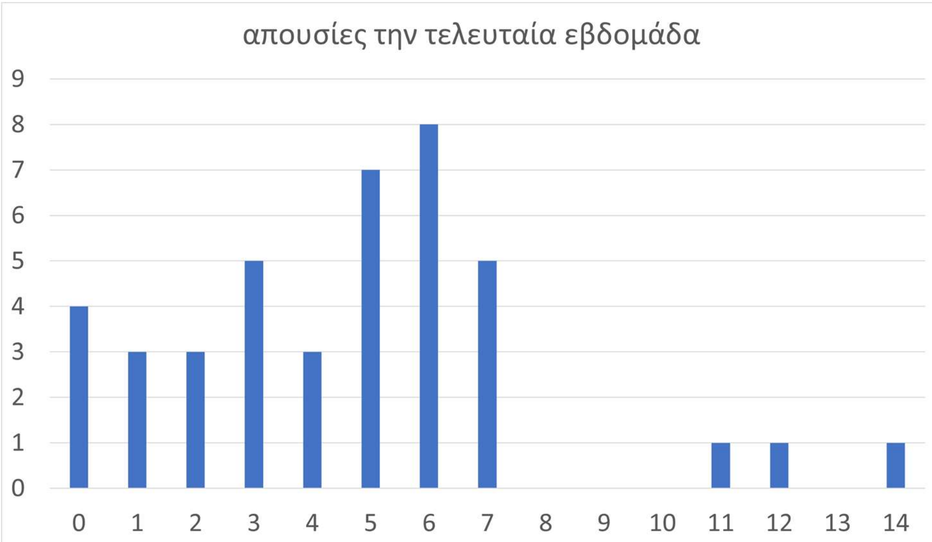
-2, 1, 3, 5, 5, 6, **7**, 8, 10, 13, 13, 20, 21

Άρα $\delta = 7$.

Γραφικές παραστάσεις

Έγινε μια έρευνα για τις απουσίες των παιδιών ενός σχολείου την τελευταία εβδομάδα.

Τα δεδομένα παρουσιάζονται με ραβγόγραμμα.



Ο οριζόντιος άξονας (χ) μας δείχνει τις τιμές και ο κατακόρυφος άξονας (ψ) μας δείχνει τις συχνότητες.

Από το ραβδόγραμμα μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα:

Απουσίες (τιμές)	Συχνότητες
0	4
1	3
2	3
3	5
4	3
5	7
6	8
7	5
8	0
9	0
10	0
11	1
12	1
13	0
14	1

ΕΠΙΠΛΕΟΝ
(καλό είναι να τα γνωρίζετε, γενικότερα)

Ιδιότητες δυνάμεων - πράξεις

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ		
Δ1	$a^{\kappa} \cdot a^{\lambda} = a^{\kappa+\lambda}$	$3^4 \cdot 3^5 = 3^9$
Δ2	$a^{\kappa} : a^{\lambda} = a^{\kappa-\lambda}$ Όπου $a \neq 0$	$2^8 : 2^5 = 2^3$
Δ3	$a^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (a \cdot \beta)^{\nu}$	$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4$
Δ4	$a^{\mu} : \beta^{\mu} = (a : \beta)^{\mu}$ Όπου $\beta \neq 0$	$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5$
Δ5	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^4 = 2^{12}$
Δ7	$a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}$ Όπου $a \neq 0$	$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$, $5^2 = 5^{-(-2)} = \frac{1}{5^{-2}}$
Δ8	$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^{\nu}$ Όπου $a, \beta \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ $\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^{-(-7)} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-7}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Προσοχή!

- Για να βγάλουμε τις παρενθέσεις κάνουμε επιμεριστική ιδιότητα.
- Στην επιμεριστική ιδιότητα προσέχουμε τα πρόσημα, ειδικά όταν μπροστά από την παρένθεση έχουμε πλην.
- Όταν έχουμε εξισώσεις με κλάσματα, προσέχουμε ιδιαιτέρως τα κλάσματα που έχουν πλην, όπως:

$$\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{4} = \frac{1-x}{12}$$