ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

του Παν. Λ. Θεοδωρόπουλου

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ένας σχετικά νέος κλάδος των Μαθηματικών, ο οποίος παρουσιάζει πολλά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά στοιχεία. Επειδή η ιδιαιτερότητα αυτή, όπως είναι φυσικό, εμφανίζεται και στις ασκήσεις, κρίθηκε σκόπιμο να γραφτεί η παρούσα εργασία με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου να εμπεδώσουν έννοιες και διαδικασίες του κλάδου αυτού των Μαθηματικών.

Εισαγωγή: Η πιθανότητα (Probability) είναι μία συνάρτηση P σύμφωνα με την οποία υποσύνολα (**ενδεχόμενα)** του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης αντιστοιχίζονται σε πραγματικούς αριθμούς του διαστήματος [0, 1]. Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της έννοιας της πιθανότητας, που είναι δεκτός σήμερα, είναι ο **αξιωματικός ορισμός,** ο οποίος δόθηκε από τον Kolmogorov το 1933. Ο γενικός αξιωματικός ορισμός στηρίζεται στη Θεωρία Μέτρου και ο ορισμός του σχολικού βιβλίου είναι μία περίπτωση του ορισμού αυτού. Μία δε ειδική περίπτωση του αξιωματικού ορισμού του βιβλίου (ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα) είναι ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Σε ένα πείραμα τύχης (π. τ.), ενώ δεν ισχύει ο **αιτιοκρατικός νόμος**, δηλαδή δε μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα, ισχύει ο νόμος της **στατιστικής τάξης (ομαλότητας),** που σημαίνει ότι αν εκτελεσθεί το π. τ. πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες, τότε η σχετική συχνότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου Α τείνει να σταθεροποιηθεί σε ένα αριθμό, P(A), που εκφράζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Α.

Στην εργασία αυτή τις ασκήσεις που λύνουμε, για καλύτερη εμπέδωση των διαδικασιών, τις ταξινομούμε σε τρεις κατηγορίες που είναι: 1) Ασκήσεις στις οποίες ζητείται ο **υπολογισμός της πιθανότητας** ενός ενδεχομένου. 2) Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η **απόδειξη ανισοτήτων** που περιέχουν πιθανότητες ενδεχομένων και 3) Γενικές **θεωρητικές** ασκήσεις.

Α΄ Υπολογισμός μιας πιθανότητας: Σε πολλές ασκήσεις Πιθανοτήτων ζητείται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Το ενδεχόμενο αυτό συνήθως διατυπώνεται με λόγια και μπορεί να παράγεται πρωτογενώς από το δειγματικό χώρο ή να παράγεται από άλλα ενδεχόμενα των οποίων γνωρίζουμε τις πιθανότητες. Στην πρώτη περίπτωση ο υπολογισμός της πιθανότητας του ενδεχομένου γίνεται άμεσα με τη βοήθεια των ορισμών, ενώ στη δεύτερη έμμεσα με τη βοήθεια των κανόνων.

Ι. Άμεσος υπολογισμός της πιθανότητας: Στην περίπτωση αυτή πρέπει πρώτα από όλα να κατανοήσουμε το πείραμα τύχης και να βρούμε ένα δειγματικό χώρο που το περιγράφει λαμβάνοντας υπόψη και το ενδεχόμενο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα. Κατόπιν βρίσκουμε το ενδεχόμενο με αναγραφή των στοιχείων του (ευνοϊκές περιπτώσεις) και τέλος υπολογίζουμε την πιθανότητά του, είτε με τον κλασικό ορισμό, αν τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, είτε με τον αξιωματικό ορισμό, αν τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Παραστατικά η όλη διαδικασία αποδίδεται με το παρακάτω σχήμα:

Πείραμα τύχης - Δειγματικός χώρος	→	Εύρεση του ενδεχομένου με αναγραφή	→	Υπολογισμός της πιθανότητας

Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητά με τα παραδείγματα που ακολουθούν.

1. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.

Λύση

(i) Έστω Α το ενδεχόμενο: «Ο φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3».
Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θεωρητικά είναι όλο το ΙΝ, οπότε το Α θα είναι το σύνολο των πολλαπλασίων του 3. Παρατηρούμε όμως ότι και τα δύο αυτά σύνολα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων, πράγμα που δημιουργεί πρόβλημα στον υπολογισμό της πιθανότητας. Γι' αυτό λοιπόν, επειδή μας ενδιαφέρει εάν ο αριθμός που επιλέγεται διαιρείται με το 3 και όχι ο αριθμός καθαυτός, ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης μπορούμε να θεωρήσουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού αυτού με το 3. Έτσι ο δειγματικός χώρος του π. τ. είναι το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2\}$ και το ενδεχόμενο Α το σύνολο $A = \{0\}$.
Επειδή η επιλογή γίνεται με τυχαίο τρόπο και λόγω της περιοδικότητας των φυσικών αριθμών ως προς τα υπόλοιπα της διαίρεσής τους με το 3, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, οπότε έχουμε:

$$P(A) = 1/3.$$

(ii) Όμοια με το (i). Εδώ είναι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$και αν Β είναι το ενδεχόμενο: «Ο φυσικός αριθμός διαιρείται με το 7», τότε $B = \{0\}$, οπότε

$$P(B) = 1/7.$$

(iii) Τώρα ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cap B$. Δε μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενεχομένου αυτού με τη βοήθεια των προηγούμενων δειγματικών χώρων, επειδή, όπως προκύπτει από τα (i) και (ii), τα Α και Β δεν είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Πρέπει επομένως να βρούμε ένα κοινό δειγματικό χώρο του οποίου ενδεχόμενα να είναι τα Α και Β. Προς τούτο, κάθε φορά που επιλέγεται ένας φυσικός αριθμός, μπορούμε να σημειώνουμε με μορφή διατεταγμένου ζεύγους τα υπόλοιπα που αφήνει η διαίρεσή του με το 3 (πρώτο μέλος) και με το 7 (δεύτερο μέλος). Όλα αυτά τα διατεταγμένα ζεύγη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

με το 3 \ με το 7	0	1	2	3	4	5	6
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)

Ο κοινός δειγματικός χώρος Ω λοιπόν είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών του πίνακα αυτού με $N(\Omega) = 21$. Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω ενδεχόμενα Α και Β ως υποσύνολα του νέου δειγματικού χώρου είναι:
$A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6)\}$ & $B = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$
με $N(A) = 7$ και $N(B) = 3$, οπότε:

$P(A) = 7/21 = 1/3$ [δείτε και ερώτημα (i)] και
$P(B) = 3/21 = 1/7$ [δείτε και ερώτημα (ii)].

Τώρα έχουμε: $A\cap B = \{(0, 0)\}$, οπότε:

$$P(A\cap B) = 1/21.$$

2. Για ένα ευρωπαϊκό κύπελλο έχουν προκριθεί στις 8 ομάδες δύο ελληνικές. Σύμφωνα με την κλήρωση οι ομάδες αυτές, για την πρόκριση στην επόμενη φάση της διοργάνωσης, θα παίξουν με δύο ξένες ομάδες. Αν όλες οι ομάδες έχουν την ίδια πιθανότητα πρόκρισης, να βρείτε την πιθανότητα μία τουλάχιστον ελληνική ομάδα να προκριθεί στην επόμενη φάση της διοργάνωσης.

Λύση

Έστω $ε_1$ και $ε_2$ οι δύο ελληνικές ομάδες και $ξ_1$, $ξ_2$ οι δύο ξένες ομάδες που θα παίξουν αντίστοιχα με τις δύο ελληνικές. Το πείραμα τύχης εδώ είναι οι μεταξύ τους αγώνες. Να σημειώσουμε ότι κάθε αγώνας έχει το χαρακτηριστικό στοιχείο ενός πειράματος τύχης, που είναι η αδυναμία μας να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Έστω Α λοιπόν το ενδεχόμενο: «Μία τουλάχιστον ελληνική ομάδα προκρίνεται στην επόμενη φάση». Το τελικό αποτέλεσμα από τους δύο αγώνες είναι η πρόκριση δύο ομάδων στην επόμενη φάση, οπότε ο δειγματικός χώρος, που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα πρόκρισης, είναι:

$$Ω = \{(ε_1, ξ_2),\ (ε_1, ε_2), (ξ_1, ε_2), (ξ_1, ξ_2)\}.$$

Αφού όλες οι ομάδες έχουν την ίδια πιθανότητα πρόκρισης, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, οπότε το καθένα έχει πιθανότητα ίση με 1/4. Το ενδεχόμενο Α τώρα με αναγραφή των στοιχείων του είναι: $A = \{(ε_1, ξ_2),\ (ε_1, ε_2), (ξ_1, ε_2)\}$. Επομένως

$$P(A) = 3/4.$$

<u>**Σημείωση**</u>: Αν κάποιος θεωρήσει ως αποτέλεσμα του π. τ. τον αριθμό των ελληνικών ομάδων που θα προκριθούν στην επόμενη φάση (καμία, μία ή δύο) τότε ο δειγματικός χώρος είναι: Ω = {0ε, 1ε, 2ε}. Αυτός ο δειγματικός χώρος όμως θέλει προσοχή γιατί τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, αφού το αποτέλεσμα 1ε προκύπτει με δύο τρόπους. Γι' αυτό λοιπόν συνιστούμε να χρησιμοποιείτε τον πρώτο δειγματικό χώρο, που είναι πιο αναλυτικός και με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

3. Δίνεται η τυχαία εξίσωση: $x^2 + κx + λ = 0$, όπου οι αριθμοί κ και λ ορίζονται αντίστοιχα με τη βοήθεια δύο διαδοχικών ρίψεων ενός «αμερόληπτου» ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση αυτή να έχει ρητές ρίζες.

Λύση

Την παραπάνω εξίσωση την χαρακτηρίζουμε ως τυχαία, επειδή οι αριθμοί **κ** και **λ** ορίζονται με τυχαίο τρόπο και συγκεκριμένα με τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Έστω Α το ενδεχόμενο: «Η εξίσωση αυτή έχει ρητές ρίζες». Εδώ το πείραμα τύχης είναι οι δύο διαδοχικές ρίψεις του ζαριού όπου το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης ορίζει το κ και της δεύτερης το λ. Επομένως ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών των αποτελεσμάτων των δύο ρίψεων. Είναι N(Ω) = 36 (δείτε σχολικό βιβλίο, σελ. 152, εφαρμογή 1). Για να έχει η εξίσωση ρητές ρίζες (μία διπλή ή δύο διαφορετικές) πρέπει η διακρίνουσα, $κ^2$-4λ, της εξίσωσης να είναι ίση με το τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού. Στην περίπτωση αυτή προφανώς θα ισχύει $0 \le Δ \le 25$.
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται όλα τα ζεύγη που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.

Δ	0	1	4	9	16	25
(κ, λ)	(2, 1) (4, 4)	(3, 2) (5, 6)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	-

Επομένως το ενδεχόμενο Α με αναγραφή των στοιχείων του είναι:

$$A = \{(2, 1), (4, 4), (3, 2), (5, 6), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}.$$

Παρατηρούμε ότι N(A) = 7, οπότε

$$P(A) = 7/36,$$

αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, επειδή το ζάρι είναι αμερόληπτο.

<u>ΙΙ. Έμμεσος υπολογισμός της πιθανότητας:</u> Εδώ πρέπει, αν το ενδεχόμενο δεν είναι διατυπωμένο με μαθηματικό τρόπο, να το διατυπώνουμε πρώτα με μαθηματικό τρόπο και κατόπιν να υπολογίζουμε την πιθανότητά του με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, δηλαδή να ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:

Λεκτική διατύπωση του ενδεχομένου	⟶	Μαθηματική διατύπωση του ενδεχομένου	⟶	Υπολογισμός της πιθανότητας

Για τη μαθηματική διατύπωση ενός ενδεχομένου καλό είναι να το αναλύουμε έτσι που να είναι πιο φανερός ο μαθηματικός τρόπος έκφρασής του. Αν χρειασθεί δε να το αναδιατυπώνουμε χρησιμοποιώντας τις λογικές πράξεις: (i) **Άρνηση** (**όχι, δεν**) που αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου, (ii) **Σύζευξη** (**και**) που αντιστοιχεί στην τομή συνόλων και (iii) **Διάζευξη** (**ή**) που αντιστοιχεί στην ένωση συνόλων. Ας δούμε καλύτερα το επόμενο παράδειγμα.

4. Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η.Υ.) και το 25% και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
(i) να έχει ένα μόνο από τα δύο
(ii) να μην έχει κανένα από τα δύο και
(iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

<u>Λύση</u>

Έστω Α το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής έχει κινητό τηλέφωνο» και Β το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής έχει Η.Υ.». Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε: $P(A) = 0{,}6$ $P(B) = 0{,}4$ και $P(A\cap B) = 0{,}25$. Τώρα έχουμε:

(i) Το ενδεχόμενο: «Έχει ένα μόνο από τα δύο» μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: «**Έχει** κινητό **και όχι** Η.Υ. **ή έχει** Η.Υ. **και όχι** κινητό», του οποίου η μαθηματική έκφραση είναι:

$$(A\cap B')\cup(B\cap A') = (A-B)\cup(B-A).$$

Επειδή τώρα τα ενδεχόμενα Α-Β και Β-Α είναι ασυμβίβαστα, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(A-B)\cup(B-A)] &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \\ &= 0{,}6 + 0{,}4 - 2\cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

(ii) Το ενδεχόμενο: «Δεν έχει κανένα από τα δύο» σημαίνει «**όχι** κινητό **και όχι** Η.Υ.», που με μαθηματική γλώσσα αποδίδεται ως εξής: $A'\cap B'$. Επειδή όμως δεν είναι προφανής ο υπολογισμός της πιθανότητας του ενδεχομένου αυτού, μπορούμε να σκεφθούμε ως εξής: Αν είχε τουλάχιστον ένα από τα δύο, τότε θα πραγματοποιούταν η ένωση, $A\cup B$, των ενδεχομένων αυτών. Τώρα όμως που δεν έχει κανένα σημαίνει ότι πραγματοποιείται το συμπληρωματικό της ένωσης, δηλαδή το ενδεχόμενο: $(A\cup B)'$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ισχύει: $A'\cap B' = (A\cup B)'$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A'\cap B') = P[(A\cup B)'] &= 1 - P(A\cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) \\ &= 1 - 0{,}6 - 0{,}4 + 0{,}25 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

(iii) Για τη μαθηματική διατύπωση του ενδεχομένου: «Έχει το πολύ ένα» σκεπτόμαστε ως εξής: Το ενδεχόμενο: «Έχει το πολύ ένα» σημαίνει ότι έχει ένα μόνο ή κανένα, όχι και τα δύο. Αν είχε και τα δύο, τότε θα πραγματοποιούταν η τομή, $A \cap B$, των ενδεχομένων αυτών. Τώρα όμως που δεν τα έχει και τα δύο σημαίνει ότι πραγματοποιείται το συμπληρωματικό της τομής, δηλαδή το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$.
Αξίζει να σημειωθεί ότι το παραπάνω ενδεχόμενο είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο: «Ένα τουλάχιστον από τα δύο δεν το έχει» δηλαδή «**Δεν** έχει κινητό **ή δεν** έχει Η.Υ.», που είναι το ενδεχόμενο $A' \cup B'$, δηλαδή ισχύει: $A' \cup B' = (A \cap B)'$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(A' \cup B') = P[(A \cap B)'] &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - 0{,}25 \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

5. Έστω τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{1}{3}$ **,** $P(B) = \frac{1}{4}$ **και** $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$**.**

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα της τομής, ΑÇΒ, των ενδεχομένων Α και Β.
β. Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ασυμβίβαστα;
γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο το Α.

<u>Λύση</u>

α. Από τον προσθετικό νόμο, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ισοδύναμα έχουμε:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}.$$

β. Επειδή $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq 0$ είναι $A \cap B \neq \varPhi$, οπότε τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ. Πραγματοποιείται μόνο το Α σημαίνει: «Πραγματοποιείται το Α **και όχι** το Β», που με μαθηματικό τρόπο εκφράζεται ως εξής: $A \cap B'$ ή $A - B$. Επομένως σύμφωνα με τον $5^{ο}$ κανόνα έχουμε:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

<u>Β΄ Ασκήσεις με ανισότητες:</u> Στην κατηγορία αυτή θα δούμε ασκήσεις που αναφέρονται σε ανισοτικές σχέσεις που περιέχουν πιθανότητες ενδεχομένων, οι οποίες προκύπτουν με καθαρά πιθανοθεωρητικό τρόπο, δηλ. με τη βοήθεια των κανόνων και των σχέσεων της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Οι σχέσεις αυτές συνήθως περιέχουν ένωση και τομή μεταξύ ενδεχομένων. Έτσι θυμίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις: $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
από τις οποίες σύμφωνα με τον $4^{ο}$ κανόνα παίρνουμε:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \quad \& \quad P(A \cap B) \leq P(B) \qquad (1)$$

Ακόμη έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \qquad (2)$$

Τώρα από (1), (2) και επειδή $P(A\cap B) \geq 0$ παίρνουμε:

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A\cap B) \leq \min(P(A), P(B)) \qquad (3)$$

όπου max(α, β) παριστάνει τον μεγαλύτερο αριθμό από τους α και β, ενώ min(α, β) τον μικρότερο. Για παράδειγμα, max(4, 7) = 7 και min(6, 5) = 5.

Επίσης ισχύουν και οι σχέσεις $A \subseteq A\cup B$ και $B \subseteq A\cup B$ οπότε:

$$P(A) \leq P(A\cup B) \;\; \& \;\; P(B) \leq P(A\cup B) \quad (4).$$

Ακόμη από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων προκύπτει ότι:

$$P(A\cup B) \leq P(A) + P(B) \quad (5).$$

Τέλος από (4), (5) και επειδή $P(A\cup B) \leq 1$ έχουμε:

$$\max(P(A), P(B)) \leq P(A\cup B) \leq \min(P(A) + P(B), 1) \quad (6)$$

Βέβαια σε κάθε άσκηση πρέπει να αποδεικνύονται οι παραπάνω σχέσεις αφού δεν αναφέρονται στο βιβλίο. Χαρακτηριστικές είναι οι επόμενες ασκήσεις.

6. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{2}{5}$ **και** $P(B) = \frac{5}{8}$**, να αποδείξετε ότι:** $\frac{1}{40} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{5}$ **.**

<u>Λύση</u>

(Είναι φανερό ότι η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή της (3). Όμως, όπως αναφέραμε, πρέπει να γίνει πλήρης απόδειξη αφού δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).

Ως γνωστόν $A\cap B \subseteq A$ και $A\cap B \subseteq B$, οπότε, σύμφωνα με τον 4^o κανόνα και τα δεδομένα της άσκησης παίρνουμε:

$$P(A\cap B) \leq P(A) \quad \text{και} \quad P(A\cap B) \leq P(B)$$

Επομένως

$$P(A\cap B) \leq \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad P(A\cap B) \leq \frac{5}{8}$$

και επειδή $\frac{2}{5} \leq \frac{5}{8}$ έχουμε (ισχυρότερη συνθήκη):

$$P(A \cap B) \leq \frac{2}{5} \quad (1)$$

Επίσης από τη σχέση $P(A \cup B) \leq 1$ έχουμε:

$$P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leq 1 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A\cap B).$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες των A και B στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{8} - 1 \leq P(A \cap B) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{40} \leq P(A \cap B) \qquad (2)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις (1) και (2) τελικά παίρνουμε:

$$\frac{1}{40} \le P(A \cap B) \le \frac{2}{5}.$$

7. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{1}{3}$ **και** $P(B) = \frac{3}{8}$**, να αποδείξετε ότι:** $\frac{3}{8} \le P(A \cup B) \le \frac{17}{24}$ **.**

<u>Λύση</u>

(Και εδώ είναι φανερό ότι η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή της (6). Όμως πρέπει να γίνει πλήρης απόδειξη αφού δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).

Επειδή $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, σύμφωνα με τον 4^{o} κανόνα και τα δεδομένα της άσκησης παίρνουμε:

$$P(A) \le P(A \cup B) \quad \text{και} \quad P(B) \le P(A \cup B)$$

Επομένως

$$\frac{1}{3} \le P(A \cup B) \quad \text{και} \quad \frac{3}{8} \le P(A \cup B)$$

και επειδή $\frac{1}{3} \le \frac{3}{8}$ έχουμε (ισχυρότερη συνθήκη):

$$\frac{3}{8} \le P(A \cup B) \quad (1)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας στη σχέση $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$ τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β παίρνουμε:

$$P(A \cup B) \le \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) \le \frac{17}{24} \quad (2)$$

Τέλος από (1) και (2) τελικά παίρνουμε:

$$\frac{3}{8} \le P(A \cup B) \le \frac{17}{24}.$$

<u>Γ΄ Γενικές ασκήσεις:</u> Τέλος θα ασχοληθούμε με γενικές θεωρητικές ασκήσεις, οι οποίες λύνονται με εφαρμογή γνώσεων από τη Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς και από άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε να δώσουμε κάποια παρατήρηση ή οδηγία πέρα από το ότι πρέπει κανείς να γνωρίζει πολύ καλά τη θεωρία όλων των κλάδων των Μαθηματικών και να εξασκείται στη λύση σύνθετων προβλημάτων, που απαιτούν συνδυασμό γνώσεων από διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Ας δούμε λοιπόν μερικά παραδείγματα.

8. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$\mathbf{P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B).}$$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in IR.}$$

α. Να δείξετε ότι P(AÇB) ¹ P(AÈB).

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x = \frac{P(A)+P(B)}{2}.$$

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι

f(P(A)) = f(P(B)).

(Εξετάσεις 2002)

<u>**Λύση**</u>

α. Έχουμε:

$$P(A\cup B) \neq P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \neq P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B) \quad \text{που ισχύει (Υπόθεση).}$$

Άρα ισχύει και η αρχική.

β. Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f\,'(x) = 3[x - P(A\cup B)]^2 - 3[x - P(A\cap B)]^2 = 3[(x - P(A\cup B))^2 - (x - P(A\cap B))^2]$$

$$= 3[x - P(A\cup B) + x - P(A\cap B)][x - P(A\cup B) - x + P(A\cap B)]$$

$$= 3[2x - P(A\cup B) - P(A\cap B)][\,P(A\cap B) - P(A\cup B)]$$

Τώρα έχουμε:

$$f\,'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; [2x - P(A\cup B) - P(A\cap B)][\,P(A\cap B) - P(A\cup B)] = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$2x - P(A\cup B) - P(A\cap B = 0 \;\{\text{αφού από (α) } P(A\cup B) - P(A\cap B) \neq 0\} \Leftrightarrow$$

$$2x - P(A) - P(B) + P(A\cap B - P(A\cap B = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

Επειδή $P(A\cap B) - P(A\cup B) \leq 0$, αφού $P(A\cap B) \leq P(A\cup B)$ γιατί $A\cap B \subseteq A\cup B$, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	-∞	$\frac{P(A)+P(B)}{2}$	+∞
f΄	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

γ. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα τότε:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{και} \quad P(A\cap B) = 0,$$

οπότε ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = [x - P(A) - P(B)]^3 - x^3.$$

Για x = P(A) έχουμε:

$$f(P(A)) = [P(A) - P(A) - P(B)]^3 - [P(A)]^3 = -[P(B)]^3 - [P(A)]^3 \quad (1)$$

Επίσης για x = P(B) παίρνουμε:

$$f(P(B)) = [P(B) - P(A) - P(B)]^3 - [P(B)]^3 = -[P(A)]^3 - [P(B)]^3 \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2) (δεύτερα μέλη ίσα) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(P(A)) = f(P(B)).$$

9. Αν A και B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$P(A) = \lambda^2$ και $P(B) = 7\lambda^2 – 6\lambda + 2$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} \le \lambda \le \frac{1}{2}$.

<u>Λύση</u>

Καταρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in$ IR είναι $\lambda^2 \ge 0$ και $7\lambda^2 – 6\lambda + 2 > 0$ ($\Delta < 0$).
Αφού τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \lambda^2 + (7\lambda^2 – 6\lambda + 2) = 8\lambda^2 – 6\lambda + 2 \quad (1).$$

Επειδή τώρα η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ανήκει στο διάστημα [0, 1] πρέπει να ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\lambda^2 \le 1 \ (2), \quad 7\lambda^2 – 6\lambda + 2 \le 1 \ (3) \quad \text{και} \quad 8\lambda^2 – 6\lambda + 2 \le 1 \ (4).$$

Τέλος, λόγω της (1), παρατηρούμε ότι αν ισχύει η (4), τότε θα ισχύουν οι (2) και (3). Επομένως αρκεί να λύσουμε μόνο την ανίσωση (4). Έχουμε λοιπόν:

$$8\lambda^2 – 6\lambda + 2 \le 1 \Leftrightarrow 8\lambda^2 – 6\lambda + 1 \le 0 \Leftrightarrow 8(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \lambda \le \frac{1}{2}.$$

10. α. Να αποδείξετε ότι για κάθε x Î IR ισχύει:

e^x ³ x + 1.

β. Αν Α, Β δύο μεταβλητά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$$

να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} \le P(A')P(B') < \frac{\sqrt{e}}{e}$**.**

<u>Λύση</u>

α. Παρατηρούμε ότι η σχέση $e^x \ge x + 1$ είναι ισοδύναμη με την $e^x - x - 1 \ge 0$.
Επομένως για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ανισότητα μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x – 1$ και να βρούμε την ελάχιστη τιμή της. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = e^x – 1$.
Εύκολα βρίσκουμε ότι $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ αν $x < 0$ και $f'(x) > 0$ αν $x > 0$, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	-∞	0	+∞
f΄	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f για x = 0 παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι το $f(0) = e^0 - 0 – 1 = 0$.
Άρα για κάθε $x \in$ IR ισχύει $f(x) \ge f(0)$ ή $e^x - x – 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge x + 1$ (1).

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} P(A')P(B') &= [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 – [P(A) + P(B)] + P(A)P(B) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} + P(A)P(B) \geq \frac{1}{2} \quad (2), \text{ αφού } P(A)P(B) \geq 0.$$

Αν τώρα, αντικαταστήσουμε το x στην (1) διαδοχικά με $-P(A)$ και με $-P(B)$ παίρνουμε:

$$e^{-P(A)} \geq -P(A) + 1 \Leftrightarrow e^{-P(A)} \geq 1 - P(A) \quad (3)$$

και $$e^{-P(B)} \geq -P(B) + 1 \Leftrightarrow e^{-P(B)} \geq 1 - P(B) \quad (4)$$

Επειδή $1 – P(A) \geq 0$ και $1 - P(B) \geq 0$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις (3) και (4) οπότε παίρνουμε:

$$e^{-P(A)}\, e^{-P(B)} \geq [1 - P(A)][1 - P(B)] \Leftrightarrow e^{-P(A)\ -P(B)} \geq P(A')P(B')$$

$$\Leftrightarrow e^{-[P(A)+P(B)]} \geq P(A')P(B')$$

$$\Leftrightarrow e^{-1/2} \geq P(A')P(B')$$

$$\Leftrightarrow \quad P(A')P(B') \leq \frac{\sqrt{e}}{e} \quad (5)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι το ″ = ″ δεν ισχύει ποτέ στην (5) (γιατί;), ενώ στη (2) ισχύει όταν $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$. Άρα έχουμε:

$$\frac{1}{2} \leq P(A')P(B') < \frac{\sqrt{e}}{e}.$$