

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 2
ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

(1) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 3 + 23 + 19$$

$$B = 8 + 13 + 45 - 7$$

$$\Gamma = 3 + 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = 3 + 23 + 19 = (3 + 23) + 19 = 26 + 19 = 45$$

$$B = 8 + 13 + 45 - 7 = (8 + 13) + 45 - 7 = 21 + 45 - 7 = (21 + 45) - 7 = 66 - 7 = 59$$

$$\Gamma = 3 + 0 = 3$$

(2) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = 3 + 18 + 27$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = 3 + 18 + 27 = 3 + 27 + 18 = (3 + 27) + 18 = 30 + 18 = 48$$

Για να προσθέσουμε τρεις ή και περισσότερους αριθμούς προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους δυο πρώτους, μετά το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον τρίτο και συνεχίζουμε.. προσέχοντας να βάζουμε μέσα σε παρένθεση τους αριθμούς που θέλουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε

Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα μπορούμε να υπολογίσουμε πιο εύκολα τα αθροίσματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ

(3) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 3 \cdot 6 \cdot 10$$

$$B = 382 \cdot 1$$

$$\Gamma = 25 \cdot 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = 3 \cdot 6 \cdot 10 = (3 \cdot 6) \cdot 10 = 18 \cdot 10 = 180$$

$$B = 382 \cdot 1 = 382$$

$$\Gamma = 25 \cdot 0 = 0$$

Για να πολλαπλασιάσουμε τρεις ή και περισσότερους αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τους δυο πρώτους, μετά το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον τρίτο και συνεχίζουμε.. προσέχοντας να βάζουμε μέσα σε παρένθεση τους αριθμούς που θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε

ΠΡΟΣΟΧΗ : $\alpha \cdot 1 = \alpha$
 $\alpha \cdot 0 = 0$

(4) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 64 \cdot 10$$

$$B = 389 \cdot 100$$

$$\Gamma = 97 \cdot 1000$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = 64 \cdot 100 = 640$$

$$B = 389 \cdot 100 = 38900$$

$$\Gamma = 97 \cdot 1000 = 97000$$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό επι 10, 100, 1000, γράφουμε δεξιά του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει το 10 ή το 100 ή το 1000,...

(5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

$$A = 5+5+5+5+5+5$$

$$B = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{6 \text{ φορές}} = 6 \cdot 5 = 30$$

$$B =$$

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{12 \text{ φορές}} = 12 \cdot 3 = 36$$

Το γινόμενο δυο φυσικών αριθμών είναι συντομογραφία ίδιων προσθετέων και αντίστροφα, αν έχουμε να προσθέσουμε πλήθος ίδιων προσθετέων είναι γινόμενο του πλήθους των προσθετέων επι τον προσθετέο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ / ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

(6) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = 3 \cdot 2 + 1$$

$$B = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 9$$

$$\Gamma = 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5$$

$$\Delta = 1 + 4 + 3 \cdot 5$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$B = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = 24 + 27 = 41$$

$$\Gamma = 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 32 - 15 = 7$$

$$\Delta = 1 + 4 + 3 \cdot 5 = 1 + 4 + 15 = 5 + 15 = 20$$

Όταν έχουμε να κάνουμε πράξεις που σημειώνονται πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις / αφαιρέσεις ,

πρώτα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς

και μετά τις προσθέσεις / αφαιρέσεις

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΕΣΗ : $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΦΑΙΡΕΣΗ : $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$

Προσοχή!

Η επιμεριστική ιδιότητα γράφεται και «ανάποδα»

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta - \gamma)$$

Το α πολλές φορές θα το λέμε και κοινό παράγοντα

(7) Να υπολογίσετε την παράσταση $32 \cdot (13 + 7)$ με δύο τρόπους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι 1^{ος} τρόπος : $32 \cdot (13 + 7) = 32 \cdot 20 = 640$ και

(Κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στην παρένθεση και μετά τον πολλαπλασιασμό)

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος } 32 \cdot (13 + 7) = 32 \cdot 13 + 32 \cdot 7 = 416 + 224 = 640$$

(Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα)

(8) Να υπολογίσετε τα γινόμενα

$\alpha = 3 \cdot 13$, $\beta = 45 \cdot 12$ $\gamma = 13 \cdot 1001$ $\delta = 28 \cdot 111$ και $\epsilon = 3 \cdot 98$ με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\text{Είναι } \alpha = 3 \cdot 13 = 3 \cdot (10 + 3) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 30 + 9 = 39$$

$$\beta = 45 \cdot 12 = 45(10 + 2) = 45 \cdot 10 + 45 \cdot 2 = 450 + 90 = 540$$

$$\gamma = 13 \cdot 1001 = 13 \cdot (1000 + 1) = 13 \cdot 1000 + 13 \cdot 1 = 13000 + 13 = 13013$$

$$\delta = 28 \cdot 111 = 28 \cdot (100 + 10 + 1) = 28 \cdot 100 + 28 \cdot 10 + 28 \cdot 1 = 2800 + 280 + 28 = 3108$$

$$\epsilon = 3 \cdot 98 = 3 \cdot (100 - 2) = 3 \cdot 100 - 3 \cdot 2 = 300 - 6 = 294$$

«Σπάμε» τον ένα παράγοντα σε 10 , 100, 1000 συν ότι μένει και εφαρμόζω επιμεριστική ιδιότητα»

- (9) Να υπολογίσετε την παράσταση $2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (3+7) = 2 \cdot 10 = 20$$

Βλέπουμε ότι το 2 είναι **κοινός παράγοντας** και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα»

- (10) Να υπολογίσετε την παράσταση $5 \cdot 13 + 5 \cdot 87$ με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

$$5 \cdot 13 + 5 \cdot 87 = 5 \cdot (13+87) = 5 \cdot 100 = 500$$

Βλέπουμε ότι το 5 είναι **κοινός παράγοντας** και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα»

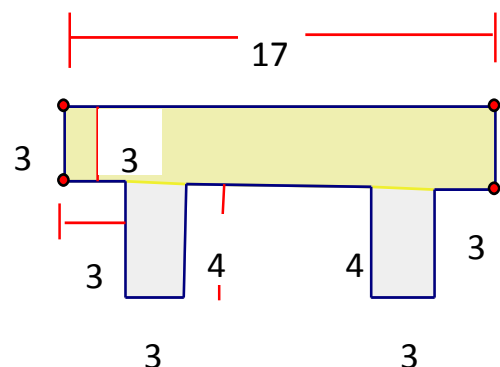
- (11) Να υπολογίσετε την παράσταση $13 \cdot 23 + 13 \cdot 7 + 13 \cdot 70$ με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας

$$13 \cdot 23 + 13 \cdot 7 + 13 \cdot 70 = 13 \cdot (23+7+70) = 13 \cdot 100 = 1300$$

Βλέπουμε ότι το 13 είναι **κοινός παράγοντας** και κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα» .

Η επιμεριστική ιδιότητα εφαρμόζεται και αν έχουμε περισσότερους προσθετέους στην παρένθεση

- (12) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του πάνω ορθογωνίου συν το εμβαδόν των δύο μικρών κάτω ορθογώνιων ποδιών.

$$\text{Οπότε } E = 3 \cdot 17 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot (17 + 4 + 4) = 3 \cdot 25 = 75$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ- ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

(1) Να γράψετε πιο γρήγορα τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = x+x+x+x+x \quad B = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \quad \Gamma = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \Delta = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$A = x+x+x+x+x = 5 \cdot x$$

$$B = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

$$\Gamma = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

$$\Delta = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$$

(2) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$$A = 2^3$$

$$B = 3^5$$

$$\Gamma = 1^6$$

$$\Delta = 7^1$$

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ φορές}}$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$1^n = 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$A = 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ φορές}} = 8$$

$$B = 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ φορές}} = 243$$

$$\Gamma = 1^6 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{6 \text{ φορές}} = 1$$

$$\Delta = 7^1 = 7$$

(3) Να βρείτε το τετράγωνο του 6 και τον κύβο του 5

α^2 : το τετράγωνο του α

α^3 : ο κύβος του α

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το τετράγωνο του 6 είναι το $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Ο κύβος του 5 είναι $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

(4) Να γράψετε τα παρακάτω γινόμενα σε μορφή δύναμης

(α) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

(β) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

(γ) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

(δ) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

(ε) $x \cdot x \cdot x$

(στ) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(α) \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{7 \text{ φορές}} = 5^7,$$

Γράφω την βάση ,
εδώ το 5 ,και βάζω
εκθέτη το πόσες
φορές εμφανίζεται

$$(β) 4^6 \cdot 6^4, \quad (γ) 1^8, \quad (δ) α^3, \quad (ε) x^3, \quad (στ) 2^5 \cdot α^3 \cdot 3^4$$

(5) Να γράψετε τις δυνάμεις του 10 : $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$10^2 = 10 \cdot 10 = \underline{100}$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$$

Γράφω το 1 και βάζω
τόσα μηδενικά όσα ο
εκθέτης

(6) Να γράψετε τον αριθμό 53.782 σε αναπτυγμένη μορφή με χρήση δυνάμεων του 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$53.782 = 5 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 = 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2$$

(7) Να υπολογίσετε το τετράγωνο του 6 και τον κύβο του 5 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\text{Το τετράγωνο του 6 είναι το } 6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

$$\text{Ο κύβος του 5 είναι } 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (προτεραιότητα πράξεων) είναι η ακόλουθη:
 - Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
 - Στη συνέχεια, εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
 - Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις, τότε με βάση την προηγούμενη σειρά εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.



(8) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (6-3)^2 + 2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{aligned}
 A &= (6-3)^2 + 2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 2 = \text{ (Πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)} \\
 &= 3^2 + 2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 2 \quad \text{ (Έπειτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις)} \\
 &= 9 + 2 \cdot 7 + 16 \cdot 2 \quad \text{ (Στην συνέχεια κάνουμε πολλαπλασιασμούς / διαιρέσεις)} \\
 &= 9 + 14 + 32 \quad \text{ (Και τέλος τις προσθέσεις και αφαιρέσεις)} \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

(9) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = (4 \cdot 3 - 2)^2 - 3 \cdot 6^2 + 8^2 : 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{aligned}
 B &= (2^2 \cdot 3 - 2)^2 - 3 \cdot 6^2 + 8^2 : 2 \quad \text{ (Πρώτα κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)} \\
 &= 3^2 + 2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 2 \quad \text{ (Έπειτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις)} \\
 &= 9 + 2 \cdot 7 + 16 \cdot 2 \quad \text{ (Στην συνέχεια κάνουμε πολλαπλασιασμούς / διαιρέσεις)} \\
 &= 9 + 14 + 32 \quad \text{ (Και τέλος τις προσθέσεις και αφαιρέσεις)} \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1 . 4

ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ - ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

(1) Να κάνεις τις ακόλουθες διαιρέσεις και τις δοκιμές τους

(α) $4002 : 69$

(β) $1445 : 17$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{array}{r} 4002 \overline{) 69} \\ -345 \\ \hline 552 \\ -552 \\ \hline 0 \end{array}$$

Δοκιμή

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 58 \\ \hline 552 \\ 345 + \\ \hline 4002 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1445 \overline{) 17} \\ -136 \\ \hline 085 \\ -85 \\ \hline 0 \end{array}$$

Δοκιμή

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 85 \\ \hline 136 + \\ \hline 1445 \end{array}$$

(2) Να υπολογίσεις

Πόσα δοχεία των 52 λίτρων θα χρειαστούν για 46.592 λίτρα κρασιού

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{array}{r} 46592 \overline{) 52} \\ -416 \\ \hline 499 \\ -468 \\ \hline 312 \\ -312 \\ \hline 0 \end{array}$$

Για να βρούμε πόσα
δοχεία χρειαζόμαστε,
θα διαιρέσουμε το
46592 με το 52

Επομένως θα χρειαστούμε 896 δοχεία των 52 λίτρων το
κάθε ένα

(3) Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες
παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις

(α) $140 = 40 \cdot 3 + 20$

(β) $950 = 26 \cdot 35 + 40$

(γ) $100 = 12 \cdot 8 + 4$

(δ) $300 = 18 \cdot 16 + 12$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$

$$0 \leq \upsilon < \delta$$

προσοχή , το υπόλοιπο είναι
μικρότερο του διαιρέτη και
μεγαλύτερο του 0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Επειδή $\upsilon = 20$, το οποίο είναι μικρότερο από το 40 και μεγαλύτερο του 3,
η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 40

(β) Επειδή $\upsilon = 40$, το οποίο είναι μεγαλύτερο και από το 35 και από το 26,
η ισότητα αυτή δεν είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης.

(γ) Επειδή $u = 4$, το οποίο είναι μικρότερο και από το 12 και από το 8, η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης, με διαιρέτη το 12 αλλά και με το 8.

(δ) Επειδή $u = 12$ το οποίο είναι μικρότερο και από το 18 και από το 16 η ισότητα αυτή είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης και με διαιρέτη το 18 και με διαιρέτη το 16

- (4) **Αν ένας αριθμός διαιρεθεί με το 12 δίνει πηλίκο 5 και υπόλοιπο 3. Ποιος είναι ο αριθμός ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο ζητούμενος αριθμός, σύμφωνα με την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, θα είναι ίσος με : $\Delta = 12 \cdot 5 + 3 = 60 + 3 = 63$

- (5) **Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τι μέρα θα είναι μετά από 198 ημέρες ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η επόμενη Τετάρτη θα είναι μετά από 7 ημέρες και από εκεί και πέρα κάθε 7 ημέρες θα είναι πάλι Τετάρτη.

Όμως η διαίρεση του 198 με το 7 δίνει πηλίκο 28 και υπόλοιπο 2 . Δηλαδή: $198 = 7 \cdot 28 + 2$. Αυτό σημαίνει ότι μετά από 198 ημέρες έχουν περάσει 28 εβδομάδες και 2 ημέρες . Επομένως θα είναι ημέρα Παρασκευή.

- (6) **Να βρείτε ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 7.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θα πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός αλλά μικρότερος του διαιρέτη, δηλαδή πρέπει $0 \leq u < 7$.

Άρα το υπόλοιπο u μπορεί να είναι 0,1,2,3,4,5,6.

- (7) Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4 δίνουν πηλίκο 10, με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γνωρίζουμε $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \delta$. Αφού ο διαιρέτης είναι το 4 το υπόλοιπο μπορεί να είναι ίσο με 0, 1, 2, 3. Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο είναι $\pi = 10$ άρα από την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα έχουμε:

αν $\upsilon = 0$, τότε: $\Delta = 4 \cdot 10 + 0 = 40$

αν $\upsilon = 1$, τότε: $\Delta = 4 \cdot 10 + 1 = 41$

αν $\upsilon = 2$, τότε: $\Delta = 4 \cdot 10 + 2 = 42$

αν $\upsilon = 3$, τότε: $\Delta = 4 \cdot 10 + 3 = 43$

Ανδρεσάκης Δημήτρης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5

ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ – ΕΚΠ - ΜΚΔ

- (1) Να γραφούν τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 5 ,6, και 10 . Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά τους πολλαπλάσια και το Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλάσια του 5 : 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60,

Πολλαπλάσια του 6 : 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66,

Πολλαπλάσια του 10: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100,.....

Άρα τα κοινά τους πολλαπλάσια είναι 0, 30, 60,.....

Και επομένως $ΕΚΠ(30,60,90) = 30$

Το ΕΚΠ είναι το μικρότερο, μη μηδενικό από τα κοινά πολλαπλάσια

Παρατηρούμε ότι το 5 διαιρεί όλα τα πολλαπλάσια του και όλα τα πολλαπλάσια του 5 διαιρούνται από το 5 .

Το ίδιο ισχύει για το 6 και για όλους γενικά τους φυσικούς αριθμούς

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του
- Κάθε φυσικός που διαιρείται από ένα άλλο είναι πολλαπλάσιό του

- (2) Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 8 διαιρεί τον αριθμό 4000

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο αριθμός 4000 είναι πολλαπλάσιο του 8 αφού $4000 : 8 = 500$

Δηλαδή το 8 είναι διαιρέτης του 4000

Αφού ο αριθμός 8 διαιρεί το 40, τότε διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του .

Όμως $4000 = 40 \cdot 100$, δηλαδή το 4000 είναι

πολλαπλάσιο του 40

Άρα, ο αριθμός 4000 διαιρείται με τον αριθμό 8 .

Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλο , τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του

- (3) Βρες τους διαιρέτες των αριθμών 32 , 48 , 80

Στην συνέχεια να βρεθούν οι κοινοί διαιρέτες και ο Μέγιστος Κοινός διαιρέτης πολλαπλάσιό τους .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Διαιρέτες του 32 : 1, 2, 4, 8, 16, 32

Διαιρέτες του 48 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Διαιρέτες του 12 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 24, 48

Οι κοινοί τους διαιρέτες είναι : 1, 2, 4, 8, 16

Και επομένως $\text{ΜΚΔ}(32, 48, 80) = 16$

Ο ΜΚΔ είναι ο
μεγαλύτερος από τους
κοινούς διαιρέτες

- (4) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 18, 45 και 79 είναι πρώτοι

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το 18 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Επομένως, είναι σύνθετος.

Το 45 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1, 3, 5, 15, 45

Επομένως, είναι σύνθετος.

Το 79 έχει διαιρέτες μόνο τους αριθμούς 1 και 79,
δηλαδή είναι πρώτος.

Ένας αριθμός λέγεται
πρώτος αν διαιρείτε
μόνο με τον εαυτό του
και τη μονάδα

- (5) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 12, 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 12 είναι 1, 2, 3, 4, 6, 12

Οι διαιρέτες του 25 είναι 1, 5, 25

Άρα $\text{Μ.Κ.Δ}(12, 25) = 1$ και επομένως οι 12, 25 είναι
πρώτοι μεταξύ τους

Οι αριθμοί α, β λέγονται
πρώτοι μεταξύ τους αν
 $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$

- (6) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 18, 24 είναι πρώτοι μεταξύ τους

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι διαιρέτες του 18 είναι 1, 2, 3, 6, 9, 18

Οι διαιρέτες του 24 είναι 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Άρα $\text{Μ.Κ.Δ}(18, 24) = 6$ και επομένως οι 18, 24 **Δεν** είναι πρώτοι μεταξύ
τους

- (7) Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος
κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο
πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ των δύο συναντήσεων
τους πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το πλήθος των ημερών που θα περάσουν για να ξανασυναντηθούν στον
κινηματογράφο πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 10, 12.
Επειδή όμως $\text{ΕΚΠ}(10, 12) = 60$, θα ξανασυναντηθούν για πρώτη φορά
μετά από 60 ημέρες.

Τότε θα είναι 9 Μαΐου διότι θα έχουν περάσει 21 ημέρες του Μαρτίου +

30ημέρες του Απριλίου + 9 ημέρες του Μαΐου = 60 ημέρες

Ο Γιάννης θα έχει πάει μέχρι τότε $60 : 10 = 6$ φορές, επομένως μόνος του θα έχει πάει 5 φορές. Και ο Νίκος θα έχει πάει $60 : 12 = 5$ φορές, άρα μόνος του 4 φορές

- (8) Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 4 χρόνια, η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 6 χρόνια. Αν το 2011 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, τότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το πιο μικρό διάστημα σε έτη που θα περάσει για να ξαναβγάλουν για πρώτη φορά και οι τρεις εταιρείες νέο μοντέλο πρέπει να είναι ίσο με το ΕΚΠ των αριθμών 4, 3 και 6. Επειδή όμως $\text{ΕΚΠ}(4, 3, 6) = 12$ και το 2011 έβγαλαν οι εταιρείες νέο μοντέλο, θα ξαναβγάλουν νέο μοντέλο το $2011 + 12 = 2023$

- (9) Συμπλήρωσε το κενό με κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός που θα σχηματισθεί να διαιρείται με το 9.

(α) 6...5 (β) 69...3 (γ) 601...

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 9. Άρα

(α) Επειδή $6 + 5 = 11$ και ο αμέσως μεγαλύτερος του 11 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 18, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 7. Τότε ο αριθμός είναι ο 674.

(β) Επειδή $6 + 9 + 3 = 18$ που διαιρείται με το 9 και ο αμέσως μεγαλύτερος του 18 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 27, στη θέση του κενού μπορεί να μπει το 0, τότε ο αριθμός είναι ο 6903, ή το 9 και τότε ο αριθμός είναι ο 6993.

(γ) Επειδή $6 + 1 = 7$ και ο αμέσως μεγαλύτερος του 7 αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το 9, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 2. Τότε ο αριθμός είναι ο 6012

- (10) Στη θέση να βάλεις ένα κατάλληλο ψηφίο ώστε:

α) Ο 5 6 να διαιρείται με το 3
β) Ο 3 4... να διαιρείται με το 2 και με το 3
γ) Ο 4 9 να διαιρείται με το 3 και με το 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 3. Άρα επειδή $6+5=11$ και οι αμέσως μεγαλύτεροι του 11 αριθμοί που διαιρούνται με το 3 είναι το 12 το 15 και το 18, στη θέση του κενού πρέπει να μπει το 1 ή το 4 ή το 7. Τότε ο αριθμός είναι ο 516 ή 546 ή 576

β) Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 όταν τελειώνει σε 0,2,4,6,8
Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό με το 3.

Άρα επειδή $3+4$, αν το τελευταίο ψηφίο είναι π.χ. 2 τότε αφού $3+4+2=9$, το δεύτερο ψηφίο θα πρέπει να είναι 0 ή 3 ή 6 ή 9

Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί 3042, 3342, 3642, 3942.

Αν το τελευταίο ψηφίο είναι 4 ή 6 ή 8 ή 0 προκύπτουν αντίστοιχα άλλοι αριθμοί

γ) Με ίδιο σκεπτικό όπως πριν προκύπτουν οι αριθμοί 4095, 4690 αφού, ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν τελειώνει σε 0 ή 5

(11) α αναλυθούν οι ακόλουθοι αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

(α) 78

(β) 348

(γ) 1.210

(δ) 2.344

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

78 | 2
39 | 3
13 | 13
1 |

348 | 2
174 | 2
87 | 87
1 |

1210 | 2
605 | 5
121 | 11
11 | 11

2344 | 2
1172 | 2
586 | 2
293 | 293

Άρα $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$, $348 = 2^2 \cdot 87$, $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$, $2344 = 2^3 \cdot 293$

(12) Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 84 και 120 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς, εδώ το 84 και 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.

Είναι

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad (\text{Οι κοινοί πρώτοι διαιρέτες είναι το 2 και το 3})$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad (\text{Η μικρότερη δύναμη του 2 είναι το 2 και του 3 το 1})$$

$$\text{ΜΚΔ} (84, 120) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

- (13) Να βρεθεί το ΕΚΠ των αριθμών 6 και 8 με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να βρούμε το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών, μπορούμε να αναλύσουμε τους αριθμούς, εδώ το 6 και το 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και ακολούθως: σχηματίζουμε το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του

Είναι

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3 \quad (\text{Η μεγαλύτερη δύναμη του 2 είναι το 3 και του 3 το 1})$$

$$\text{ΕΚΠ} (6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

- (14) Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορούμε να σχηματίσουμε από 48 λευκά άνθη, 80 ροζ και 112 κίτρινα ; Πόσα άνθη από κάθε χρώμα θα περιλαμβάνει κάθε ανθοδέσμη ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ο αριθμός των δεμάτων θα είναι ίσος με το ΜΚΔ των 48, 80, 112

$$\text{Είναι } 48 = 2^4 \cdot 3$$

$$80 = 2^4 \cdot 5$$

$$112 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\text{Άρα } \text{ΜΚΔ}(48, 80, 112) = 2^3 = 8$$

Επομένως γίνονται 4 όμοια δέματα, που το καθένα θα περιέχει

$$48 : 4 = 12 \text{ λευκά άνθη}$$

$$80 : 4 = 20 \text{ ρόζ και}$$

$$112 : 4 = 28 \text{ κίτρινα}$$