ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο ΟΡΙΑ

Κεφάλαιο 3ο ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Κεφάλαιο 4ο ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Κεφάλαιο 5ο ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Ανάλυση

Κεφάλαιο 1ο
Συναρτήσεις

1.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Μια διαδικασία μεταξύ δυο συνόλων Α και Β με την οποία ένα στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται ***σε ένα και μόνο*** στοιχείο του Β ονομάζεται συνάρτηση. Γράφουμε τότε f: $A \to B$. Για να συμβολίσουμε μια συνάρτηση χρησιμοποιούμε τα γράμματα f,g,h, φ , κτλ

- Αν $A \subseteq \Re$ και $B = \Re$ τότε η συνάρτηση f λέγεται *πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής* .

- Αν $f : A \to \Re$,μια συνάρτηση $x \in A$ και το x αντιστοιχίζεται στο Α τότε συμβολίζουμε $y = f(x)$
    - Το y λέγεται εικόνα μέσω της f του x ή ***τιμή της f*** στο x
    - Το x ονομάζεται ***ανεξάρτητη*** μεταβλητή .
    - Το y ονομάζεται ***εξαρτημένη*** μεταβλητή .

- Αν $f : A \to \Re$ μια συνάρτηση , επειδή κάθε $x \in A$ πρέπει να έχει μια ακριβώς τιμή στο $\Re$, ***πεδίο ορισμού (Π.Ο.) της f*** ονομάζουμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\Re$ για το οποίο το f(x) έχει νόημα πραγματικού αριθμού και το συμβολίζουμε με D_f. Για την εύρεση του Π.Ο μιας f μας χρησιμεύει ο παρακάτω πίνακας

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f (D(f))

Πολυωνυμικές	$f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + a_1 x + ... + a_0$	$D(f) = \Re$
Ρητές	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D(f) = \{x \in \Re / Q(x) \neq 0\}$
Άρρητες	$f(x) = \sqrt[v]{P(x)}$,όπου P(x) πολυώνυμο του x $f(x) = \sqrt[v]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	$D(f) = \{x \in \Re / P(x) \geq 0\}$ $D(f) = \{x \in \Re / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ και $Q(x) \neq 0\}$
Εκθετικές	$f(x) = p(x)^{s(x)}$	$D(f) = \{x \in \Re / p(x) > 0, p(x) \neq 1\}$
Λογαριθμικές	$k(x) = \log_{s(x)} f(x)$	$D(k) = \{x \in \Re / s(x) > 0, s(x) \neq 1, f(x) > 0\}$
Τριγωνομετρικές	f(x) = ημx , f(x) = συνx f(x) = εφx f(x) = σφx	$D(f) = \Re$ $D(f) = \{x \in \Re / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$ $D(f) = \{x \in \Re / x \neq k\pi, k \in Z\}$
Πολλαπλού τύπου	Τότε το ΠΟ της f θα είναι ή	ένωση των Π.Ο των κλάδων της f
Συνδυασμένες	Για την εύρεση του Π.Ο μιας συνάρτησης της οποίας ο τύπος αποτελεί συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων	λαμβάνουμε υπόψη όσες από αυτές χρειάζονται και το ΠΟ προκύπτει από την τομή όλων των επιμέρους ΠΟ της κάθε περίπτωσης

- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές που παίρνει η f για όλα τα $x \in A$, λέγεται ***σύνολο τιμών της f*** και συμβολίζεται με f(A) η *R(f)*. Είναι δηλαδή
  f(A) = { y ∈ ℜ / υπάρχει κάποιο x∈A με y = f (x) }

- Έστω μια συνάρτηση f : A - > ℜ . Αν
  - για κάθε $x \in A$ και το $-x \in A$
  - $f(-x) = f(x)$

  τότε η συνάρτηση f λέγεται ***άρτια***

- Έστω μια συνάρτηση f : A - > ℜ . Αν
  - για κάθε $x \in A$ και το $-x \in A$
  - $f(-x) = -f(x)$

  τότε η συνάρτηση f λέγεται ***περιττή***

- Έστω μια συνάρτηση f : A - > ℜ και T > 0. Αν
  - για κάθε $x \in A$ και το $x+T \in A$
  - $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

  τότε η συνάρτηση f λέγεται ***περιοδική με περίοδο Τ***

Ασκήσεις Α Ομάδας

1.1.1. Αν $f(x) = x^2+2x$ να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$, $f(-4)$, $f(\frac{1}{2})$.

1.1.2. Αν $f(\theta) = 3\cdot\text{συν}\theta - 2\cdot\text{ημ}\theta$ να βρείτε τα $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{3\pi}{2})$.

1.1.3. Αν $f(t) = \ln t+\ln t^2$ να βρείτε τα $f(e)$, $f(1)$, $f(e^2)$.

1.1.4. Αν $f(t) = e^x - e^{2x}$ να βρείτε τα $f(\ln 2)$, $f(0)$, $f(\ln 4)$.

1.1.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε τις τιμές $f(t)$, $f(xt)$, $f(x + h)$, όπου $x, t, h \in R$

1.1.6. Αν $f(x) = x^3 +\lambda^2x^2 +x - 4$ να βρεθεί το $\lambda \in \Re$ λ αν $f(-1) = 3$.

1.1.7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x < 1, x \neq 0 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$ Να βρεθούν τα f(0),f(1), f(-2),f(5) , καθώς και το πεδίο ορισμού της .

1.1.8. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ β) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2-1}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^4-x^3}{x^3-x^2}$ δ) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

ε) $f(x) = \dfrac{x-3}{5x^2-3x+1}$ στ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-1} + \dfrac{1}{x-3}$

1.1.9. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x-3}$ β) $f(x) = \sqrt{3+x}$

γ) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ δ) $f(x) = \sqrt{10-x^2}$

ε) $f(x) = \sqrt{x^2-7x+12}$ στ) $f(x) = \sqrt{12-x^2-x}$

1.1.10. Όμοια για τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = \ln(2-x)$ β) $f(x) = \ln(x-3)$

γ) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{3-x}\right)$ δ) $f(x) = \log x^2$

ε) $f(x) = \ln(x^2+x-2)$ στ) $f(x) = \log_x(2x^2-1)$

ζ) $f(x) = 2^x$ η) $f(x) = (2-x)^x$

θ) $f(x) = (1-x)^x$

1.1.11. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{3-|x|}$ β) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-5}$

γ) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x-4}}$ δ) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2} + \sqrt{7-2x}$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{1-x}$ στ) $f(x) = \sqrt[3]{2-|x|}$

ζ) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-x^2+x-1}$ η) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

θ) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ ι) $f(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|}$

1.1.12. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(\chi) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-3}}$ β) $f(\chi) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2-9)}{(x^2-4)(x^2+1)}}$

γ) $f(\chi) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{|x^2+5|}$ δ) $f(\chi) = \sqrt{x^3-7x+6}$

ε) $f(\chi) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+3}}$ στ) $f(\chi) = \sqrt{3-|x-2|} + \ln\dfrac{2-x}{3+x}$

1.1.13. Όμοια για τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = (2x-3)^{1/x}$ β) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-2x-3)}{\sqrt{25-x^2}}$

γ) $f(x) = (1-\dfrac{1}{x})^x$ δ) $f(x) = \dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}$

ε) $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$ στ) $f(x) = \log(2-\log x)$

ζ) $f(x) = (x+\dfrac{1}{x})^x$ η) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+4x-x^2}}{\ln x}$

θ) $f(x) = (\ln x)^{\eta\mu x}$ ι) $f(x) = \ln\dfrac{x+2}{5-x} - 4\ln\dfrac{x-1}{x-3}$

1.1.14. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$ β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \dfrac{1}{|3x-8|-|x|}$ δ) $f(x) = \dfrac{5}{|x-3|-1}$

ε) $f(x) = \log(x^2+x-2) + \log\dfrac{x+3}{3-x}$ στ) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\eta\mu x-1} + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi x-1}$, $x \in [0, 2\pi]$

ζ) $f(x) = \sqrt{e^x-1} + \sqrt{1-\ln x}$

1.1.15. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε εάν είναι οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές

α) $f(x) = x^2+2$ β) $f(x) = 2x^3+7$ γ) $f(x) = e^{x^2}\sigma\upsilon\nu 2x$

δ) $f(x) = \ln(\dfrac{1-x}{1+x})$ ε) $f(x) = |x+1|+|x-1|$ στ) $f(x) = x^3+2\eta\mu x$

ζ) $f(x) = 4|x-1|$ η) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

1.1.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

α) Να δείξετε ότι είναι περιττή

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της

1.1.17. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ είναι άρτια

β) Να δείξετε ότι η $h(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ είναι περιττή

γ) Η f γράφεται σαν άθροισμα μια άρτιας και μιας περιττής

δ) Να γράψετε την συνάρτηση $K(x) = x^2 - 2x - 3$ ημx+1 ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

1.1.18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

1.1.19. Αν $f(x)= 2^x$ να δείξετε ότι $f(x+3) - f(x-1) = \dfrac{15}{2} f(x)$

1.1.20. Αν $f(x)= x^2-4x+6$ να δείξετε ότι $f(2-x) = f(x+2)$

1.1.21. Αν $f(x)= \dfrac{x-1}{x+1}$ να δείξετε ότι $f(\dfrac{1}{x}) = -f(x)$

1.1.22. Αν $f(x+1) = 2x^2 - 3x$ να βρεθούν τα $f(x)$, $f(2x)$, $f(2x+1)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1.1.23. Δίνεται ότι για την συνάρτηση f ισχύει $f(x\,y) = f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re^*$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(1)=0$ β) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$, για $x\neq 0$

γ) $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, για $x, y \neq 0$ δ) $f(x^2)= 2\cdot f(x)$ για $x\neq 0$

1.1.24. Δίνεται ότι για την συνάρτηση f ισχύει $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ ή 1

1.1.25. Δίνεται ότι για την συνάρτηση f ισχύει $f(x+y) = f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(0)=0$ β) $f(-x) = -f(x)$ γ) f περιττή

δ) $f(x-y)=f(x)-f(y)$ ε) $f(\nu x)=\nu f(x)$

1.1.26. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\Re\text{->}\Re$ με την ιδιότητα

$$f(1-x) - f(x) = x + 2$$

1.1.27. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = kx^3+(k^2+3k+1)x^2+(2k^2-k+2)x-3k^2-3k-2$

διέρχεται ,καθώς το k διατρέχει το $\Re$, από σταθερό σημείο.

1.1.28. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f: \Re\text{->}\Re$ με την ιδιότητα

$$f(x)+x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$$

1.1.29. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x) + xf(-x) = x-1$ για κάθε x ,να βρεθεί ο τύπος της.

1.1.30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{ax+\beta-1}{x^2+1}$.Να βρείτε τους α και β ώστε η f(x) να έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$

1.1.31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \Re\to\Re$ με $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$ $\forall \chi,y\in\Re$. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια

1.1.32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \Re\to\Re$ με $f(x+y)\cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$ $\forall \chi,y\in\Re$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

1.1.33. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $f(x)+f(x+1)+f(x+2) = 0$ $\forall \chi \in \Re$. Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική

1.1.34. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $f(x) \cdot f(-x) = -f^2(x)$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

1.1.35. Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$ ώστε η $f(x) = \dfrac{ax+\beta}{x^2+1}$ να έχει σύνολο τιμών το [-2,2]

1.1.36. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $2 \cdot f(x) = f(-x) + \text{συν}2x$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι είναι άρτια και να βρεθεί ο τύπος της

1.1.37. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

Προβλήματα

1.1.38. Οι μηνιαίες αποδοχές δυο υπαλλήλων Α και Β δίνονται από τους τύπους $A(t)=\dfrac{25}{16}t^2+200$ και $B(t)=\dfrac{50}{16}t^2+150$ αντίστοιχα σε χιλιάδες δραχμές όπου $t \in [0,8]$ ο χρόνος σε έτη

α) Βρείτε για πόσο χρόνο ο Α έπαιρνε περισσότερα από τον Β

β) Βρείτε ποιο χρονικό διάστημα οι δυο έπαιρναν τα ίδια χρήματα και ποιο ήταν το ποσό αυτό

1.1.39. Μια αποθήκη έχει ύψος μικρότερο κατά 4 μέτρα από το πλάτος της και και πλάτος μικρότερο κατά 1 μέτρο από το ύψος της .Αν χ είναι το πλάτος της αποθήκης να εκφράσετε τον όγκο V ως συνάρτηση του χ . Ποιο το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

1.1.40. Να εκφραστεί το μήκος λ της χορδής ενός κύκλου ακτίνας 10 cm ως συνάρτηση της απόστασής της x από το κέντρο του κύκλου . Ποιο το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

1.1.41. Μια μπάλα πέφτει από την ταράτσα ενός κτιρίου . Το ύψος της σε μέτρα ύστερα από t sec δίνεται από τον τύπο $f(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 72$.

α) Σε ποίο ύψος θα φτάσει η μπάλα μετά από 2sec;

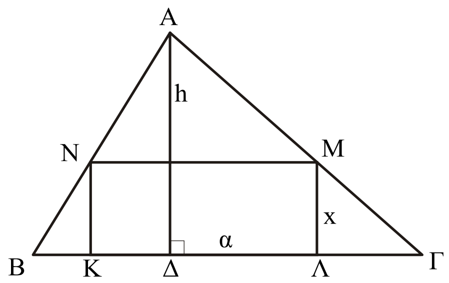
β) Ποίο το ύψος του κτιρίου ;

γ) Πότε θα φτάσει η μπάλα στο έδαφος ;

1.1.42. Η μια κάθετη πλευρά ενός ορθογωνίου είναι x και η περίμετρός του 10. Να εκφράσετε την υποτείνουσα σαν συνάρτηση του x .

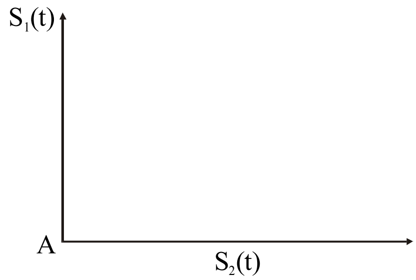
1.1.43. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 5 . Αν ΑΒ = x να εκφράσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του ορθογωνίου σαν συνάρτηση του x

1.1.44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α και ύψος ΑΔ = h. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο ΑΒΓ, όπως δείχνει το σχήμα α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x.



β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

1.1.45. Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με σταθερή ταχύτητα $υ_2$ = 80 km/h.



α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ σαν συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;

1.1.46. Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές: $\frac{1}{2}$ s, 1 s, 2 s, 3 s, $\frac{7}{2}$ s, 4 s.

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9}$ m;

δ) Να βρείτε το λόγο $\upsilon(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

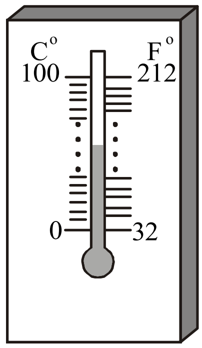
1.1.47. Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$. Το ημερήσιο κόστος K (x) σε χιλιάδες μονάδες "εύρο" για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμή ματος παραγωγής.

β) Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια "εύρο";

1.1.48. Το εισιτήριο του τρένου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.
α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.
β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

1.1.49. Στο θερμόμετρο του σχήματος μπορούμε να έχουμε τη θερμοκρασία ενός χώρου σε βαθμούς Κελσίου (C), αλλά και σε βαθμούς Φαρενάιτ (F). Θεωρούμε δεδομένο ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές της θερμοκρασίας σε C με τις τιμές σε F είναι γραμμική (η γραφική της παράσταση είναι ευθεία).



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς C σε βαθμούς F.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς F σε βαθμούς C

.γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό και στις δύο κλίμακες.

1.1.50. Σε πείραμα σχετικό με την εκπαίδευση των ζώων, χρησιμοποιήθηκε ένας ποντικός, τον οποίο ανάγκασαν να διασχίσει πολλές φορές κάποιο λαβύρινθο σ' ένα εργαστήριο. Ο χρόνος σε λεπτά, που ο ποντικός χρειάζεται για να διασχίσει το λαβύρινθο, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 4 + \frac{14}{x}$, όπου x ο αριθμός των δοκιμών.

α) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο ποντικός κατά την 7η δοκιμή;
β) Από ποια δοκιμή και μετά θα χρειαστεί 5 λεπτά ή και λιγότερο;
γ) Θα μπορέσει ποτέ να κάνει λιγότερο από 4 λεπτά

1.1.51. ; Από μετρήσεις διαπιστώθηκε ότι η καρδιά της γυναίκας μπορεί να φθάσει τους 216 το πολύ σφυγμούς ανά λεπτό σε ηλικία 5 ετών και τους 196 το πολύ σε ηλικία 25 ετών. Αν ο μέγιστος αριθμός των σφυγμών ως συνάρτηση της ηλικίας είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, τότε:
α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
β) να υπολογίσετε το μέγιστο αριθμό των σφυγμών ανά λεπτό στα 37 χρόνια μιας γυναίκας.

1.1.52. Σε x έτη από τώρα, ο πληθυσμός μιας κοινότητας θα είναι

$f(x) = 20 - \dfrac{6}{x+1}$ χιλιάδες. Να βρείτε:

α) πόσος θα είναι ο πληθυσμός σε 7 χρόνια από τώρα
β) πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός κατά τη διάρκεια του 7ου χρόνου
γ) τι θα συμβεί, αν το x αυξάνεται “απεριόριστα”;

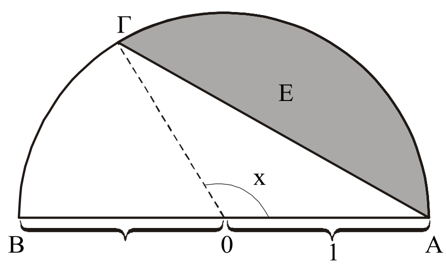
1.1.53. Για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ο τύπος που δίνει το μήκος ℓ μιας μεταλλικής ράβδου, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t °F, είναι:

$$\ell - \ell_0 = \alpha t_0 (t - t_0)$$

όπου: ℓ_0 είναι το αρχικό μήκος της ράβδου σε θερμοκρασία t_0 °F και α σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου.

α) Αν το αρχικό μήκος της ράβδου είναι 100 cm σε θερμοκρασία 60 °F και $\alpha = 10^{-5}$, να γράψετε την εξίσωση που δίνει το μήκος ℓ της ράβδου ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t °F.
β) Σε ποια θερμοκρασία το μήκος της ράβδου είναι ίσο με 100, 012 cm;

1.1.54. α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση της γωνίας x rad όπου $0 \le x \le \pi$ το εμβαδόν Ε του διπλανού κυκλικού τμήματος.
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του μεικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας x rad, όπου $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$.



1.1.55. Σε τρεις ασθενείς έχει δοθεί αντιπυρετικό φάρμακο και οι θερμοκρασίες τους σε βαθμούς C, ως συναρτήσεις του χρόνου σε ώρες, δίνονται από τους παρακάτω τύπους, οι οποίοι ισχύουν μέχρι την αποκατάσταση της φυσιολογικής θερμοκρασίας:

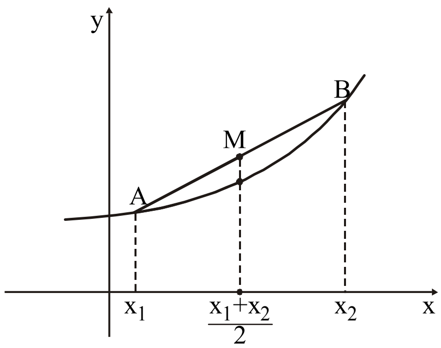
$f_1(x) = 40 - \frac{3}{2}x$ $f_2(x) = 39 - x$ $f_3(x) = 38 - \frac{1}{2}x$

Σε τέταρτο ασθενή έχει δοθεί διαφορετικό αντιπυρετικό, και η συνάρτηση της θερμοκρασίας του ως προς το χρόνο είναι η: $f_4(x) = f_1^{-1}(x) + 12$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή x, κατά την οποία οι θερμοκρασίες των τριών πρώτων ασθενών συμπίπτουν.

β) Ποιο αντιπυρετικό είναι πιο αποτελεσματικό έως τη δεδομένη αυτή στιγμή;

1.1.56. α) Το μέσο Μ μιας χορδής ΑΒ της καμπύλης μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας ανισότητας την παραπάνω πρόταση.



β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

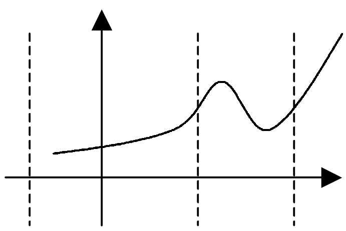
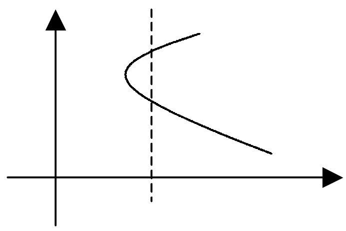
γ) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x) = e^x$.

1.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν $f : A \to \Re$,μια συνάρτηση και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων . Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ με $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ με $x \in A$, λέγεται ***γραφική παράσταση της f*** και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

- Για να είναι η γραφική παράσταση μιας γραμμής του επιπέδου , γραφική παράσταση συνάρτησης θα πρέπει : *κάθε ευθεία κάθετη στον xx΄ (παράλληλη στον yy') να την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο*

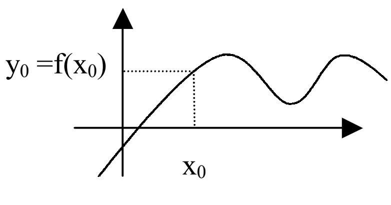
-  

γραφική παράσταση συνάρτησης

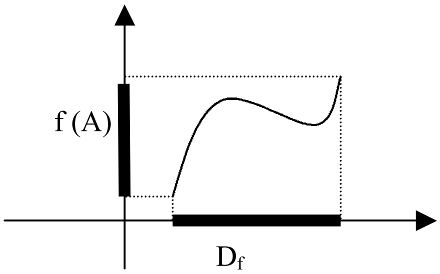
ΟΧΙ γραφική παράσταση συνάρτησης

- Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$ σαν γραμμή του επιπέδου έχει εξίσωση $y = f(x)$

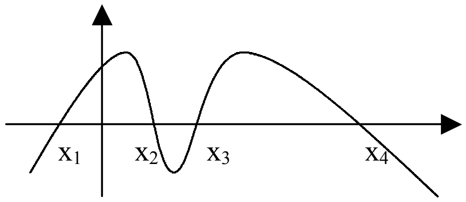
- Έστω η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$. τότε το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην C_f αν και μόνο αν $y_0 = f(x_0)$



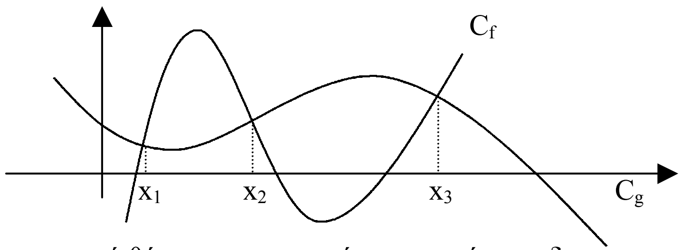
- Αν μας δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$ τότε
    - Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των τετμημένων της C_f (η προβολή της C_f στον xx')
    - Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων της C_f (η προβολή της C_f στον yy')



- Τα σημεία στα οποία η C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$ τέμνει τον xx' βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$, $x \in A$. Άν $x_1 , x_2 ,\ldots, x_v$ οι λύσεις της $f(x) = 0$ τότε τα σημεία τα ζητούμενα θα είναι τα $(x_1,0)$, $(x_2, 0)$,…., $(x_v, 0)$

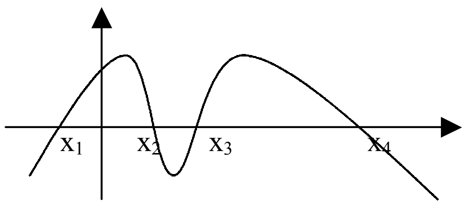


- Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων $f : A \to \Re$ και $g : B \to \Re$ βρίσκονται από την λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, $x \in A \cap B$. Άν $x_1 , x_2 ,\ldots, x_v$ οι λύσεις της $f(x) = g(x)$ τότε τα σημεία τα ζητούμενα θα είναι τα $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$,…, $(x_v, f(x_v))$



- Για να βρούμε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων $f : A \to \Re$ και $g : B \to \Re$ μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $\delta(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$.
  Αν $\delta(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta \subseteq A \cap B$ τότε η C_f βρίσκεται ψηλότερα από την C_g στο Δ
  Αν $\delta(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta \subseteq A \cap B$ τότε η C_g βρίσκεται ψηλότερα από την C_f στο Δ

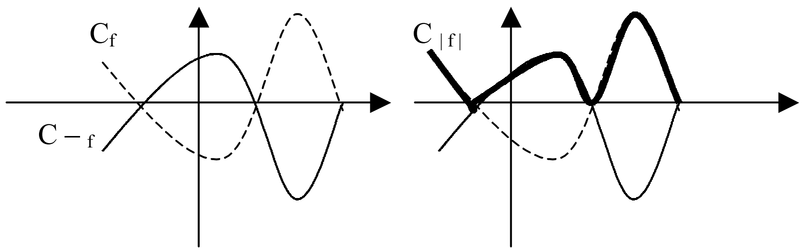
- Για να βρούμε πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω (αντ. κάτω) από τον αξονα xx΄ λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ (αντ. $f(x) < 0$)



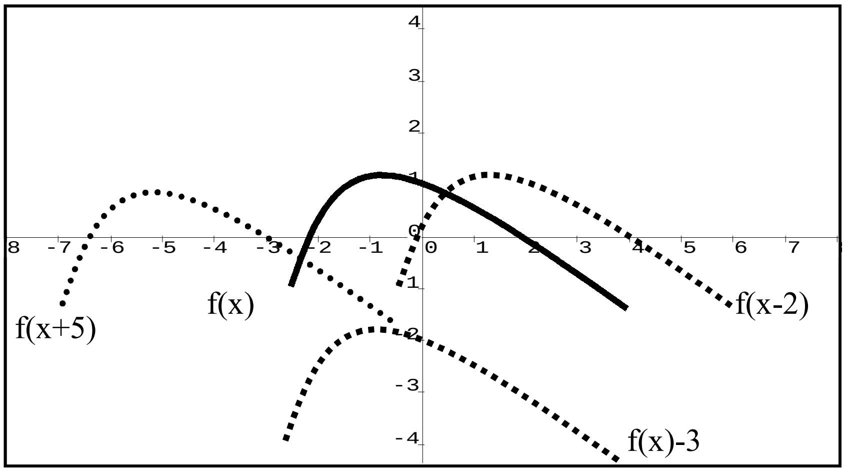
$f(x) > 0$ για $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$, $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty , x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4 , +\infty)$

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον yy' , ενώ η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

- Έστω η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$. τότε
  η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική με την C_f ως προς τον άξονα xx'
  η γραφική παράσταση της $| f |$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον xx' και από τα συμμετρικά ως προς xx' των τμημάτων της f που βρίσκονται κάτω από τον xx'.



- Έστω η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης $f : A \to \Re$. τότε
    - Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x + \alpha)$ προκύπτει με την μεταφορά της C_f κατά
        - $|\alpha|$ μονάδες δεξιά αν $\alpha < 0$
        - α μονάδες αριστερά αν $\alpha > 0$
    - Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) + \kappa$ προκύπτει με την μεταφορά της C_f κατά
        - $|\kappa|$ μονάδες κάτω αν $\kappa < 0$
        - κ μονάδες πάνω αν $\kappa > 0$



Ασκήσεις Α Ομάδας

1.2.1. Αν $f(x) = x^2 + \lambda^2 x + 6$ να βρεθεί το $\lambda \in \Re$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(2 , 28).

1.2.2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ημx +συν2x +1 . Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω σημεία Α (0,2) , Β($\frac{\pi}{2}$,1) , Γ (π ,3) , Δ ($-\frac{\pi}{2}$, − 1) ανήκουν στην γραφική παράσταση της f .

1.2.3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διέρχεται από τα σημεία (0, 3), (−1, 0) και (−2, −1).

1.2.4. Να βρεθούν τα κοινά σημεία κάθε μιας συνάρτησης με τους άξονες

α) $f(x) = x^2 - 1$ β) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ γ) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^2, x > 1 \\ 3x, x \le 1 \end{cases}$ ε) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ στ) $f(x) = x^3 - 7x + 6$

ζ) $f(x) = x - \sqrt{x-1}$ η) $f(x) = 2 - \ln(x+1)$

1.2.5. Για ποιες τιμές του $\chi \in \Re$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx΄ όταν

α) $f(x) = -x^2 - x + 2$ β) $f(x) = -x^2 + 9$ γ) $f(x) = 4e^x - 2$

δ) $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$ ε) $f(x) = x^3 - x$ στ) $f(x) = 3(x-2)^3$

z) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ η) $f(x) = e^x - 1$ θ) $f(x) = \sqrt{36 - x^2} - 3$

1.2.6. Να βρεθούν οι τιμές του χ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g , όταν

α) $f(x) = x^3 + 3x - 1$ και $g(x) = 2x - 1$ β) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ και $g(x) = x^2 + 2x - 1$

γ) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 12 - x$ δ) $f(x) = 10$ και $g(x) = |x| - 2$

1.2.7. Δίνονται οι $f(x) = x^3-5x$ $g(x)= x^2+x-2$, $h(x) = \frac{2}{x}$

α) Να βρεθούν τα κοινά σημεία κάθε μιάς συνάρτησης με τους άξονες

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_h , C_g

1.2.8. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f , C_g όταν $f(x) = 2x^2-5x+4$, $g(x) = \frac{-11}{x}$

1.2.9. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων και κατόπι η σχετική τους θέση

α) $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x)= x$ β) $f(x) = 3x-x^2$ και $g(x)= 3x^2-x^3$

γ) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ και $g(x)= \frac{3}{2}x-1$ δ) $f(x) = 2^x+3^x$ και $g(x)= 9^x-4^x$

1.2.10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$ β) $f_2(x) = 2f(x)$ γ) $f_3(x) = -f(x)$ δ) $f_4(x) = |f(x)|$

1.2.11. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = 2x + 3$ β) $f(x) = 3 - 4x$ γ) $f(x) = -2$

δ) $f(x) = |x|$ ε) $f(x) = |x-2|$

1.2.12. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = 2x^2$ β) $f(x) = -3x^2+3$ γ) $f(x) = 4(x-1)^2$

δ) $f(x) = |2x^2|$ ε) $f(x) = -(x+3)^2-1$ στ) $f(x) = |x^2-4|$

1.2.13. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = 3x^3$ β) $f(x) = -2x^3$ γ) $f(x) = |x^3|$

δ) $f(x) = 3x^3 - 2$ ε) $f(x) = -4(x+1)^3$ στ) $f(x) = |-x^3+8|$

1.2.14. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \frac{3}{x}$ β) $f(x) = \frac{3}{x}+2$ γ) $f(x) = \frac{-2}{x-1}$

δ) $f(x) = \frac{1}{x-1}-3$ ε) $f(x) = \frac{3}{x}$ στ) $f(x) = \left|\frac{2}{x-1}\right|$

1.2.15. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο $[0,2\pi]$

α) $f(x) = ημx$ β) $f(x) = ημ(x-2)$ γ) $f(x) = |συνx|$

δ) $f(x) = 3\,συνx + \frac{\pi}{2}$ ε) $f(x) = |συνx - \frac{\pi}{3}|$ στ) $f(x) = |εφ\,x| + \pi$

1.2.16. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = 2^x$, **β)** $f(x) = 2^{-x}$, **γ)** $f(x) = -2^x$,

δ) $f(x) = 2^{x-1}$ **ε)** $f(x) = -2^{x-1}$, **ζ)** $f(x) = 2^{x+1}$

η) $f(x) = 2^{-x-1}$. θ) $f(x) = |e^x - 1|$

1.2.17. Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \log_2 x$, **β)** $f(x) = -\log_2 x$, **γ)** $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$,

δ) $f(x) = \log_{1/2} x$ **ε)** $f(x) = \log_2(x+1) + 1$, **ζ)** $f(x) = \log_{1/2}(x-1) - 1$.

η) $f(x) = |\ln x|$ θ) $f(x) = |\ln x - 1|$

1.2.18. Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x}$ β) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ γ) $f(x) = \sqrt{|x|}$

δ) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ ε) $f(x) = \sqrt{x+2}$

1.2.19. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις και να βρείτε το σύνολο τιμών της f όταν

α) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 1 \\ -|x|, x < 1 \end{cases}$ β) $f(x) = 2x^2 - 4 + 3x$

γ) $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$ δ) $f(x) = \begin{cases} -2, x \geq 2 \\ 2-2x, 0 \leq x < 2 \\ 4x+2, x < 0 \end{cases}$

ε) $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$ ι) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

ια) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ιβ) $f(x) = 2^{x+3} - 3$

1.2.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda-1)x^2 + 2(\lambda-1)x + \lambda + 5$, $\lambda \neq 1$

Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε

α) Να τέμνει τον xx’ σε 2 σημεία

β) Να τέμνει τον xx’ σε 1 σημείο (να εφάπτεται) γ) Να μην τέμνει τον xx’

δ) Να αποδείξετε ότι όταν το λ διατρέχει το $\Re$-{2} τότε η C_f διέρχεται από σταθερό σημείο .

1.2.21. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = (\alpha-1)x^2 + 2bx + 3$ και $g(x) = \dfrac{a^2 - 1 - bx}{(b+2)x+1}$ να τέμνονται πάνω στην ευθεία x=1 και στον άξονα ψψ'

1.2.22. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 2x-3, x \geq 1 \\ x^2 + a, -1 < x < 1 \\ 2x+3, x \leq -1 \end{cases}$ αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

1.2.23. Να κατασκευάσετε την παραβολή $y=\alpha\chi^2$ άν είναι γνωστό ότι το σημείο της με τετμημένη 1 απέχει από την αρχή των αξόνων $\frac{1}{3}\sqrt{13}$ μονάδες

1.2.24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 13x^2 + bx + 1$

α) Να βρεθούν τα a,b ώστε τα σημεία (2,33) και (1,0) να ανήκουν στην γραφική της παράσταση

β) Να βρεθούν τα x για τα οποία η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την αρχή των αξόνων.

1.2.25. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1] \\ (x - 2\kappa)^2, & x \in [2\kappa - 1, 2\kappa + 1] \\ (x + 2\kappa)^2, & x \in [-2\kappa - 1, -2\kappa + 1] \end{cases} \quad , \text{ κ θετικός ακέραιος}$$

στο διάστημα [- 3, 5]. Τι παρατηρείτε;

Ασκήσεις Β Ομάδας

1.2.26. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

1.2.27. Μια περιττή συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ έχει την ιδιότητα

$$x^2 f(x) \leq x^3$$

α) να δείξετε ότι f(0)=0

β) να βρείτε τον τύπο της f

γ) να γίνει γραφική παράσταση της g(x) = |f(x-1)|

1.2.28. Μια συνάρτηση f: $(0,\infty) \to \Re$ έχει την ιδιότητα

$$f(\frac{x}{e}) \leq \ln x \leq f(x)-1$$

α) να βρείτε τον τυπο της f

β) να γίνει γραφική παράσταση της f(x)

1.2.29. Δίνεται η συνάρτηση f : $\Re^* \to \Re$ με την ιδιότητα

$$xf(x) = -x\cdot y\cdot f(x)\cdot f(y) \geq \frac{1}{4}.$$ Να βρείτε τον τύπο της f

1.2.30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$, $g(x) = 2^{x+2} - 8$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f,Cg και έπειτα να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την Cg

1.2.31. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} x-2, x \leq -1 \\ x+2, x \geq 1 \end{cases}$

α) να αποδείξετε ότι η f(x) είναι περιττή

β) να γίνει γραφική παράσταση της f(x)

1.2.32. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$ με 2f(x) = f(−x) +συν2x

α) Να δείξετε ότι είναι άρτια
β) Να βρεθεί ο τύπος της
γ) Να γίνει η γραφική της παράσταση

1.3 Ισότητα – Πράξεις Συναρτήσεων

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ***ίσες*** όταν
  - έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
  - $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$ (δηλαδή έχουν τον ίδιο τύπο)
- Αν $f : A \to \Re$ και $g: B \to \Re$ και $\Gamma \subseteq A \cap B$. Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Gamma$ τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις ***f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ***
- Προσοχή : Οι συναρτήσεις $f(x) = x+1$ και $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x - 1$, δεν είναι ίσες αφού $D_f = \Re$, ενώ $D_g = \Re - \{1\}$
- Αν $f : A \to \Re$ και $g: B \to \Re$ τότε ορίζονται οι παρακάτω πράξεις των συναρτήσεων
  - Η συνάρτηση f+g με πεδίο ορισμού το $\Gamma = A \cap B$ και τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
  - Η συνάρτηση f – g με πεδίο ορισμού το $\Gamma = A \cap B$ και τύπο $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
  - Η συνάρτηση f·g με πεδίο ορισμού το $\Gamma = A \cap B$ και τύπο $(f\cdot g)(x) = f(x)+g(x)$
  - Η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ με πεδίο ορισμού το $\Gamma = \{x \in A \cap B \setminus g(x) \neq 0\}$ και τύπο $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
  - Η συνάρτηση f^{ν} με πεδίο ορισμού το Α και τύπο $(f^{\nu})(x) = f(x)^{\nu}$
  - Η συνάρτηση $\lambda\cdot f$ με πεδίο ορισμού το Α και τύπο $(\lambda\cdot f)(x) = \lambda\cdot f(x)$

Ασκήσεις Α Ομάδας

1.3.1. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε εάν είναι ίσες οι συναρτήσεις και σε όσες δεν είναι να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο Ε στο οποίο αυτές είναι ίσες,

α) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ και $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ β) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ και $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

γ) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-|x|}$ και $g(x) = 1+\dfrac{1}{|x|}$ δ) $f(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$ και $g(x) = \dfrac{x-4}{x-3}$

ε) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ στ) $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2\ln|x|$

ζ) $f(x) = \sqrt{x-5}+\sqrt{|x-3|}$ και $g(x) = \sqrt{|x-5|}+\sqrt{x-3}$

1.3.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$	$f_2(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$	$f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$
$f_4(x) = x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$	$f_5(x) = \ln e^{x+1}$	$f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

1.3.3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$	$f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}}$	$f_5(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f_6(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

1.3.4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να ορίσετε και να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g, f^2 ($=f\cdot f$)

α) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ β) $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = \sqrt{x}+1$

γ) $f(x) = 1-\dfrac{1}{x}$ και $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ δ) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+4}$ και $g(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)(x+1)}$

ε) $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$ και $g(x) = \dfrac{4x}{x^2-2}$ στ) $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x<3 \\ 3x+2, & 3\le x<7 \end{cases}$ και $g(x) = \sqrt{x}$

ζ) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2\le x\le 4 \\ x, & 4< x\le 6 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x^2-2, & 0\le x\le 3 \\ 3x+2, & 4< x\le 7 \end{cases}$

1.3.5. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} \quad \text{είναι ίσες}$$

1.3.6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις: α) $f+g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$

1.3.7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \Re \to \Re$ και $g : \Re \to \Re$. Να αποδείξετε ότι

α) Αν f, g περιττές τότε f+g περιττή και f·g άρτια

β) Αν f, g άρτιες τότε f-g άρτια και αν $g \neq 0$ f / g άρτια

γ) Αν f άρτια και g περιττή τότε f·g περιττή

Ασκήσεις Β' Ομάδας

1.3.8. Αν f,g $A \to \Re$ και $f(x)>0$, $g(x)>0$ $\forall x \in \Re$ με $f^2(x) - g^2(x) = 0$ να δείξετε ότι $f = g$.

1.3.9. Αν f,g, h $\Re \to \Re^*_+$ και $f(x)>0$ με $f^3(x) + g^3(x) + h^3(x) = 3f(x)g(x)h(x)$ Να δείξετε ότι $f = g = h$

1.3.10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g: \Re \to \Re$ με την ιδιότητα $(f^2+g^2)(x) \le 2(f+g)(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι $f = g$

1.3.11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g: \Re \to \Re$ με την ιδιότητα $(f+g)^2 - (f-g)^2 - 4x^2 \ge 2(f+g)(x)\,[(f+g)(x) - 2x]$ να δείξετε ότι $f=g$

1.3.12. Να βρεθεί ο $a \in \Re$ ώστε οι

$$f(x) = \frac{2ax+1-a}{x+a+2}, \quad g(x) = \frac{(a^2-3)x+2a-8}{x+2a-1} \quad \text{να είναι ίσες}$$

1.3.13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{2x^2+2\alpha x+\alpha}{2(x^2-1)}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

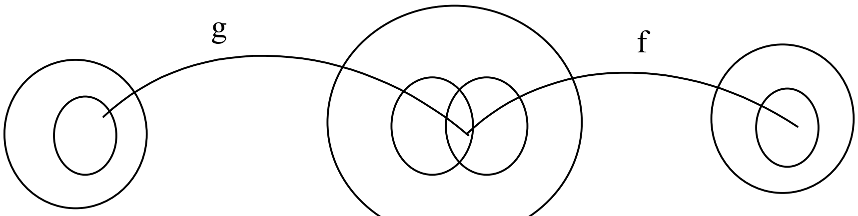
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g β) Για ποια τιμή του α ισχύει $f = g$;

1.4 Σύνθεση συναρτήσεων

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

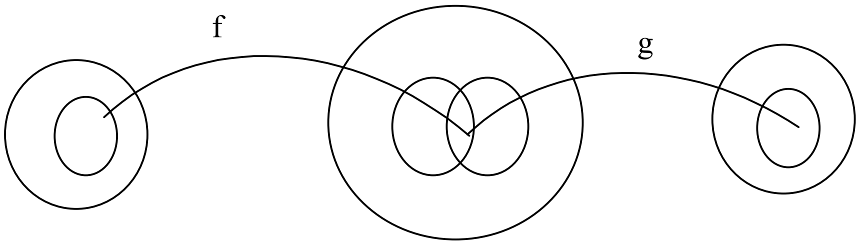
- Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα :

  α) Η σύνθεση $f \circ g$ είναι μια συνάρτηση με
  Πεδίο Ορισμού : $D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \,/\, f(x) \in D_f \}$
  Τύπο : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



  β) Η σύνθεση $g \circ f$ είναι μια συνάρτηση με
  Πεδίο Ορισμού : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$

  Τύπο : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



- Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ (εφόσον ορίζονται) δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες.
- Αν f, g, h τρείς συναρτήσεις τότε $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (εφόσον ορίζονται οι συνθέσεις)

Ασκήσεις Α Ομάδας

1.4.1. Να γραφούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δυο ή τριών συναρτήσεων

α) $f(x) =$ ημ(2x-1)β) $f(x) =$ 3 συν(1/x) γ) $f(x) =$ εφ($x^2 + 2x$)

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$ ε) $f(x) =$ ημ ($(x+1)^2 - 2$) στ) $f(x) = e^{x+\ln x}$

ζ) $f(x) =$ ημ (ln(x^2+4))

1.4.2. Έστω f(1) = 2 και g(2) =3 . να βρεθεί το (g o f)(1) .

1.4.3. Αν $f(x) = (ημx + συνx)^2 - ημ2x - 1$ και $g(0) = 1$ να βρείτε τον αριθμό $(g \circ f)$ (2001)

1.4.4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x+3$, $g(x)= 4x+9$. Να βρεθούν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετασθεί είναι ίσες

1.4.5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x-1$ $x \in [-3,3]$ και $g(x) = 5 - 2x$, $x \in [3,7]$. Να οριστούν οι συναρτήσει ς $f \circ g$ και $g \circ f$

1.4.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 3$ $x \in [-3,1]$ και $g(x) = x+1$, $x \in [-2,3]$. Να οριστούν οι συναρτήσει ς $f \circ g$ και $g \circ f$

1.4.7. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ να βρεθεί η $f \circ f$

1.4.8. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το (3,7) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$ όταν $g(x) = x^2 - x + 1$.

1.4.9. Αν $f(x+1) = 2x^2 - 3x$ $\forall χ \in \Re$ να βρείτε τα $f(x)$, $f(2x)$

1.4.10. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1]. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
α) $f(x^2)$ β) $f(x - 4)$ γ) $f(\ln x)$

1.4.11. Αν $D_f = (-2,2)$ να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α) $g(x) = f(2x)$ β) $h(x)= f(x^2-1)$ γ) $s(x) = f(1-\sqrt{x})$

1.4.12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(gof)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

1.4.13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ και $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, Να βρείτε τις $(g \circ f)$ και $(f \circ g)$

1.4.14. Να προσδιορίσετε τις $f \circ g$ και $g \circ f$ για κάθε ένα από τα παρακάτω ζευγη συναρτήσεων

α) $f(x) = 5χ+4$ και $g(x)= \sqrt{16-x^2}$ β) $f(x) = x-1$ και $g(x)= \dfrac{x}{1+|x|}$

γ) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ και $g(x)= \dfrac{x-2}{x+3}$ δ) $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x)= \dfrac{x}{x-2}$

Ασκήσεις Β' Ομάδας

1.4.15. Να βρεθεί η $g \circ f$ αν $g(x) = \sqrt{x}$ με $0 \leq \chi \leq 4$ και $f(x)= \begin{cases} 2x-1, 0 \leq x < 1 \\ x^2, 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

1.4.16. Να βρεθεί η $g \circ f$ αν $g(x) = |\chi-1|$ και $f(x)= \begin{cases} x^2, x \geq 1 \\ 2x+1, x < 1 \end{cases}$

1.4.17. Έστω f: $\Re \to \Re$ και g:$\Re \to \Re$ με $f(x) = 3x+2$ και $(g \circ f)(x) = x^2 - 4x+1$.Να βρεθεί ο τύπος της f.

1.4.18. Έστω f: $\Re \to \Re$ και g:$\Re \to \Re$ με $g(x) = x - 2$ και $(f \circ g)(x) = x^2+x+1$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

1.4.19. Έστω f: $\Re \to \Re$ και g:$\Re \to \Re$ με $f(x) = x+3$ και $(f \circ g)(x) = e^{x+1}+3$.Να βρεθεί ο τύπος της g.

1.4.20. Έστω f:$\Re \to \Re$. Αν για οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση g είναι $g \circ f = f \circ g$ να δείξετε ότι η f είναι ταυτοτική ($I : \Re \to \Re$ με $I(x) = x$)

1.4.21. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = \ln(x)$ να ορίσετε την $h \circ (f \circ g)$

1.4.22. Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = ημx$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$ να ορίσετε την $(f \circ g) \circ h$

1.4.23. Αν $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$, $g(x) = ημx$ να προσδιορίστε τις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$

1.4.24. Άν $f(x) = αx+β$, $g(x) = 2x-1$ να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α, β ώστε $g \circ f = f \circ g$

1.4.25. Έστω f:$\Re \to \Re$ και g:$\Re \to \Re$. Να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις

α) Αν f,g περιττές τότε $f \circ g$, $g \circ f$ περιττές

β) Αν f άρτια και g περιττή τοτε $f \circ g$ άρτια

γ) Αν f άρτια τότε $g \circ f$ άρτια

δ) Αν f περιττή και $g \circ f$ περιττή τότε g περιττή

1.4.26. Έστω f:$\Re \to \Re$ με $(f \circ f \circ f)(x) = -x$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

1.4.27. Έστω f:$\Re \to \Re$ με $(f \circ f)(x) = x^2-x+1$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι η $f(1)=1$

1.4.28. Έστω f:$\Re \to \Re$ με $(f \circ f \circ f)(x) = x^2-3x+4$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι η $f(2)=2$

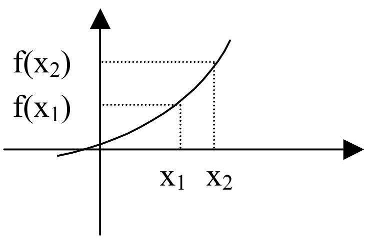
1.4.29. Έστω f:$\Re \to \Re$ με $(f \circ f \circ f)(x) = 3x - 2$ $\forall x \in \Re$. Να δείξετε ότι η $f(1)=1$

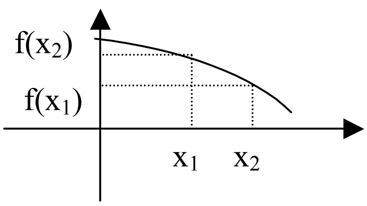
1.4.30. Ποια καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(f(f(x)))$, αν $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

1.5 Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο Δ λέγεται
  - **γνησίως αύξουσα στο Δ** όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ $x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1) <f(x_2)$
  - **γνησίως φθίνουσα στο Δ** όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ $x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1) >f(x_2)$
  - **αύξουσα στο Δ** όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ $x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - **φθίνουσα στο Δ** όταν για κάθε $x_1,x_2 \in A$ $x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$





- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ ή γνησίως φθίνουσα στο Δ λέγεται ***γνησίως μονότονη*** στο Δ

- ***Αν η f: A→ℜ είναι γνησίως μονότονη στο Α τότε η εξίσωση f(x) = 0 <u>έχει το πολύ μια</u> ρίζα στο Α (απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή !)***

- Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 αλλά να μην είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$ (Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(x) = \frac{1}{x}$)

- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στα (α,β] και [β, γ) τότε είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο (α,γ) .

- Για να μελετήσω μια συνάρτηση f :A->ℜ ως προς τα ακρότατα (στο παρών στάδιο) ξεκινώ με $x_1 ,x_2 \in A$,$x_1 <x_2$ και προσπαθώ στα 2 μέλη να κατασκευάσω την συνάρτηση.

- ***Στην επίλυση εξισώσεων της μορφής f(x) = k , k∈ℜ*** θέτω g(x) = f(x) - k και εξετάζω αν η g(x) είναι γνησίως μονότονη . Αν είναι τότε βρίσκω μια ρίζα της g(x) " με το μάτι " έστω x_0 η οποία είναι και μοναδική αφού γ γνησίως μονότονη . Οπότε είναι $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - k = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = k \Leftrightarrow x_0 = \ldots$.

- ***Στην επίλυση ανισώσεων της μορφής f (A(x)) > k , κ∈ℜ*** με f γνησίως μονότονη και $\kappa = f(x_0)$ είναι
  $f(A(x)) > k \Leftrightarrow f(A(x)) > f(x_0)$, f γν αυξ. $\Rightarrow A(x) > x_0 \Rightarrow \ldots$
  $f(A(x)) > k \Leftrightarrow f(A(x)) > f(x_0)$, f γν φθ. $\Rightarrow A(x) < x_0 \Rightarrow \ldots$

- Αν ζητείται εύρεση μονοτονίας σε δίκλαδη συνάρτηση πρώτα εξετάζω κάθε κλάδο χωριστά και έπειτα παίρνω x_1 από τον ένα κλάδο και x_2 από τον δεύτερο κλάδο και εξετάζω την μονοτονία .

- Για τις πράξεις με μονότονες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , ισχύουν τα ακόλουθα (***χρειάζονται απόδειξη !***)

    - Αν f γνησίως. αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ - f γνησίως φθίνουσα. στο Δ
    - Αν f , g γνησίως. αύξουσες στο Δ $\Rightarrow$ f +g γνησίως. αύξουσα στο Δ
    - Αν f , g γνησίως φθίνουσες στο Δ $\Rightarrow$ f +g γνησίως φθίνουσα στο Δ
    - Αν f , g γνησίως. αύξουσες στο Δ και $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ $\Rightarrow$ $f \cdot g$ γνησίως. αύξουσα στο Δ
    - Αν f , g γνησίως φθίνουσες. στο Δ και $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ $\Rightarrow$ $f \cdot g$ γνησίως φθίνουσα. στο Δ

- Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \Re$

    - Λέμε ότι η f παρουσιάζει **μέγιστο** όταν υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
    - Λέμε ότι η f παρουσιάζει **ελάχιστο** όταν υπάρχει $x_0 \in A$ με $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

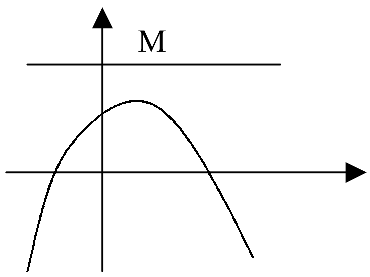
- Το ελάχιστο και το μέγιστο της f , αν υπάρχουν ονομάζονται ***ακρότατα*** της f ,και τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο (μέγιστο) **στο** x_0 **το** $f(x_0)$

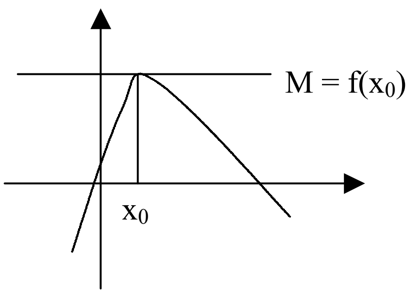
- Μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Παραδείγματα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f(x) = \frac{1}{x}$ και η $f(x) = x^3$)

- Αν μια για μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \Re$ τα m και M είναι το μέγιστο και το ελάχιστο αντίστοιχα το [m, M] είναι τα σύνολο τιμών της. Άρα ένας τρόπος για να βρίσκω τα ακρότατα συνάρτησης είναι να βρίσκω το σύνολο τιμών της..

- Για να μελετήσω μια συνάρτηση ως προς τα ακρότατα (στο παρών στάδιο) ξεκινώ από βασικές παραδοχές όπως $x^2 \geq 0$, $|x| \geq 0$, $f(x)^{2\nu} \geq 0$ και " κατασκευάζω" στο αριστερό μέλος την συνάρτηση.

- Αν για μια συνάρτηση $f : A \text{->} \Re$ ισχύει $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in A$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το M είναι μέγιστο της συνάρτησης f. Για να είναι μέγιστο πρέπει να υπάρχει $x_0 \in A$ με $M = f(x_0)$(ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για το ελάχιστο)





Ασκήσεις Α' Ομάδας

1.5.1. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις

α)	$f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha>0$	**β)**	$f(x) = \alpha x+\beta$, $\alpha<0$
γ)	$f(x) = \alpha x^3$, $\alpha<0$	**δ)**	$f(x) = \alpha x^3$, $\alpha<0$
ε)	$f(x) = \alpha x^2$, $\alpha > 0$	**στ)**	$f(x) = \alpha x^2$, $\alpha < 0$
ζ)	$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha > 0$	**η)**	$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha < 0$
ι)	$f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha >0$	**ια)**	$f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha < 0$
ιβ)	$f(x) = \alpha^x$, $1>\alpha >0$	**ιγ)**	$f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$
ιδ)	$f(x) = \log_\alpha x$, $1>\alpha >0$	**ιε)**	$f(x) = \log_\alpha x$, $\alpha > 1$

1.5.2. Μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και $f(3) - f(8) < 0$. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της .

1.5.3. Μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και $f(\frac{1}{2}) - f(\frac{3}{4}) > 0$. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της .

1.5.4. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = 4x+1$ και $g(x) = 2x^3-1$ είναι γνησίως αύξουσες

1.5.5. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = -4x+2$ και $g(x) = 5-2x^3$ είναι γνησίως φθίνουσες

1.5.6. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

α) $f(x) = 2x+3$ β) $f(x) = f(x) = \sqrt{x-2}$ γ) $f(x) = -2x-1$

δ) $f(x) = -\sqrt{x-2}$ ε) $f(x) = \sqrt{x} -1$ στ) $f(x) = 3\ln x - 2$

1.5.7. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^2 +2x+3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

1.5.8. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \frac{3}{x}+1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\Re^*$

1.5.9. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = (\frac{a-1}{a+2})^x$ να είναι

α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα

1.5.10. Να εξετάσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις

α) $f(x) = 2x^2$ β) $f(x) = -3x^2+2$ γ) $f(x) = 4$ ημx

δ) $f(x) = 2$ συν x -3 ε) $f(x) = e^x$ στ) $f(x) = |x|+1$

1.5.11. Να εξετάσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις

α) $f(x) = 2x^2 + 4$ β) $f(x) = 2- 4|x|$ γ) $f(x) = x^2 - 4$

δ) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ε) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ στ) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

ζ) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ η) $f(x) = -2x^2 + x - 1$

1.5.12. Να εξετάσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις
α) $f(x) = 2x - 1$, $x \in [2,8]$ β) $f(x) = 2\ln x + 5$, $x \in [1,e]$,
γ) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, $x \in [-1,2]$ δ) $f(x) = 3x + 1$, $x \in [-2,3)$

1.5.13. Μια συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[-2, 3] \cup (2, +\infty)$. Έχει ακρότατα και ποια;

1.5.14. Αν $|f(x)| \le 5$ τότε η f έχει ελάχιστο το -5 και μέγιστο το 5 ;

1.5.15. Έστω $f(x) = x^2 - 6x + 3$. Να αποδείξετε ότι το -6 είναι ελάχιστο της f

Ασκήσεις Β' Ομάδας

1.5.16. α) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$ είναι άρτια.
β) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο για $x = x_0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -x_0$.

1.5.17. α) Για κάθε $α > 0$, να δείξετε ότι $α + \dfrac{1}{α} \ge 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$.

1.5.18. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων fof και gog.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

1.5.19. Να αποδείξετε ότι
Αν f , g γνησίως. αύξουσες στο $\Re$ $\Rightarrow$ f og , gof γνησίως. αύξουσες στο $\Re$
Αν f γνησίως. αύξουσα στο $\Re$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\Re$
$\Rightarrow$ f og , gof γνησίως. φθίνουσες στο $\Re$

1.5.20. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in Δ$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

1.5.21. Έστω $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) να λυθεί η εξίσωση $x^5 + x^3 + 2x - 4 = 0$

1.5.22. Έστω $f(x) = 5^x$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) να λυθεί η ανίσωση $5^{x^2-x} < 5^{2x-2}$

1.5.23. Έστω $f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
β) να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

1.5.24. Έστω $f(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
β) να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$

1.5.25. Να λυθούν οι εξισώσεις
α) $x^9+x^7+x^5+x^3+x = 5$ β) $e^{x-1} + \ln x + x = 2$ γ) $3^x + 4^x = 5^x$

1.5.26. Να λυθούν οι ανισώσεις
α) $(\frac{1}{3})^{x^2-2} < (\frac{1}{3})^{x+3}$ β) $e^{x-1} + \ln x + x > 2$
γ) $3^x + 4^x < 5^x$ δ) $2^{3x-x^2} > 2^{6-2x} - 5x + 6$

1.5.27. Αν $f : \Re \to \Re$ είναι περιττή συνάρτηση και έχει ελάχιστο να αποδείξετε ότι έχει και μέγιστο .

1.5.28. Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$ έτσι ώστε η συνάρτηση $\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$ να έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 4

1.5.29. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων
α) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$ β) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 + 2x + 4}$

1.5.30. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 2, x \le 2 \\ x^2, x > 2 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα

1.5.31. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 1, x \le 1 \\ x^2 - 2x + 3, x > 1 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα

1.5.32. Αν η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ έχει την ιδιότητα $f(x+y) = f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι
α) $f(0) = 0$ β) f περιττή γ) f γνησίως αύξουσα

1.5.33. Αν η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ έχει την ιδιότητα
$f(x) + x \le x^2 + 1 \le f(x+1) - x$ για κάθε $x \in \Re$
α) Να βρεθεί ο τύπος της f
β) Να βρεθεί το ελάχιστο της f και που το παρουσιάζει αυτό .

1.5.34. Έστω $f: \Re \to \Re$ με $(f \circ f)(x) = x$ $\forall x \in \Re$ και f γνησίως αύξουσα .να αποδείξετε ότι $f(x) = x$

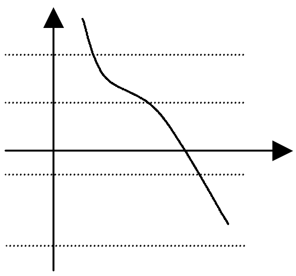
1.6 Συνάρτηση "1-1" , Αντίστροφη συνάρτηση

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

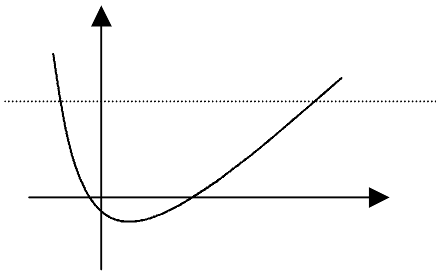
- Μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ λέγεται ***"1-1" (ένα προς ένα)*** όταν
  για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ***με*** $x_1 \neq x_2$ ***είναι*** $f(x_1) \neq f(x_2)$

- Μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ λέγεται "1-1" επίσης αν και μόνο αν
  για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ***με*** $f(x_1) = f(x_2)$ ***είναι*** $x_1 = x_2$

- ΄Αν μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι "1 –1" τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον yy' (δηλαδή της μορφής $y = k$) τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο .



συνάρτηση 1-1



συνάρτηση όχι 1-1

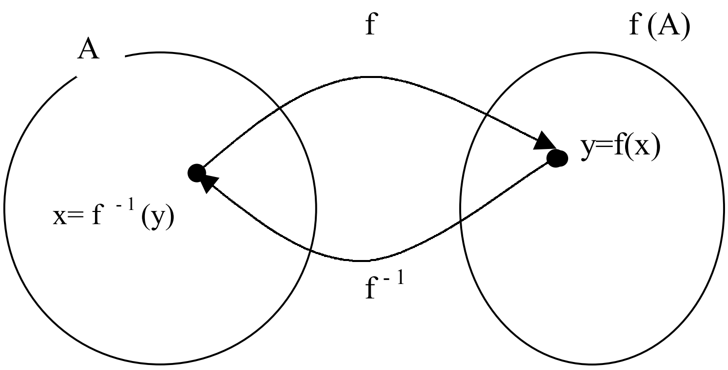
- ΄Αν μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι "1 –1" τότε η εξίσωση $y = f(x)$ με $y \in f(A)$ έχει μια μοναδική λύση .

- ***΄Αν μια συνάρτηση*** $f : A \to \Re$ ***είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και "1–1"***
  <u>Προσοχή : το αντίστροφο δεν ισχύει.(π.χ η $f(x) = 1/x$)</u>

- Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x+\beta$, $f(x) = \alpha x^3$, $f(x) = \alpha /x$,
  $f(x) = \alpha e^x + \beta$, $f(x) = \alpha \ln x+\beta$ είναι "1-1"

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν είναι "1-1"

- ΄Αν μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι "1 –1" τότε ορίζεται η συνάρτηση
  $f^{-1} : f(A) \to \Re$ ***από τη σχέση*** $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
  Η f^{-1} ***ονομάζεται αντίστροφη της f***



- Με βάση τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης για την αντίστροφη της συνάρτησης $f : A \to \Re$ έχουμε
  - $D_{f^{-1}} = f(A)$
  - Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού Α της f
  - Για κάθε $y \in f(A)$ είναι $\boldsymbol{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$
- ΄Αν μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι αντιστρέψιμη τότε
  - $f^{-1}(f(x)) = x \quad , x \in A$
  - $f(f^{-1}(y)) = y \quad , \quad y \in f(A)$
  - $(f^{-1})^{-1} = f$
- Αν $M(x,y) \in C_f \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x \Rightarrow N(y,x) \in C_{f^{-1}}$.

  Άρα οι C_f ***και είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x (την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου .)***
- $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$
- $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ μόνον όταν f είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρω την f^{-1} τότε
  - Δείχνω ότι η f είναι "1 –1" ή μονότονη
  - Λύνω την f(x) =y ως προς x και στην πορεία παίρνω περιορισμούς για το y., δηλαδή βρίσκω το f(A)
  - Στην σχέση που βρήκα παραπάνω για το x , αντικαθιστώ τα x με y και αυτός είναι ο τύπος της f^{-1} και $f^{-1} : f(A) \to A$
- Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ θέλουμε να αποδείξουμε ότι **<u>δεν</u>** είναι " 1 –1" , και άρα όχι αντιστρέψιμη , βρίσκω

  $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$

Ασκήσεις Α' Ομάδας

1.6.1. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1"

α) $f(x) = 2x - 1$ β) $f(x) = \frac{3}{x}$ γ) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

δ) $f(x) = x^3$ ε) $f(x) = -3\ln x + 1$ στ) $f(x) = 3e^{x-2} + 1$

1.6.2. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι "1-1"

α) $f(x) = (x-1)(x+6) + 2$ β) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

γ) $f(x) = x^4$ δ) $f(x) = x^2 - x + 6$

1.6.3. Να εξεταστεί εάν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1"

α) $f(x) = x^{10} + x^6 + x^4 + 2$ β) $f(x) = \ln(x+2) - 2$

γ) $f(x) = \sqrt{3-x} + 4$ δ) $f(x) = (x-1)^3 + x + 9$

ε) $f(x) = (x-2001)^5 (x-2005)^3 + 2000$

1.6.4. Αν $f(f(x)) = x - 2$ να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1"

1.6.5. Αν $f = x^{22} - x^{20} + x^2 + 1$ να αποδείξετε ότι η f δεν είναι "1-1"

1.6.6. Να ορισθεί (εφ'όσον ορίζεται) η αντίστροφη της συνάρτησης f όταν

α) $f(x) = x - 5$ β) $f(x) = \ln(x-1) - 3$

γ) $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$ δ) $f(x) = e^{x-1} + 9$

ε) $f(x) = \frac{5}{x}$ στ) $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$

z) $f(x) = |x| - 1$ η) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

1.6.7. Να ορισθεί (εφ'όσον όρίζεται) η αντίστροφη της συνάρτησης f όταν

α) $f(x) = \ln x - 1$ β) $f(x) = x|x|$ γ) $f(x) = 2 - \sqrt{4-x}$

δ) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ ε) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{1-x}}$ στ) $f(x) = \sqrt{x}$

1.6.8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1. β) Να βρείτε την f^{-1}.

Ασκήσεις Β' Ομάδας

1.6.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$

α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

β) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$

γ) να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$

1.6.10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x + 2$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι "1 –1"
β) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$
γ) να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x > 2$

1.6.11. Μια συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) + 3f(x) = x^3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

1.6.12. Η γραφική παράσταση μιας μονότονης συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(5, 9) και B(2,3)
α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
β) να λυθεί η εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x^2+2x)) = 9$

1.6.13. Η γραφική παράσταση μιας μονότονης συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(5, 9) και B(3 , 2)
α) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται .
β) να λυθεί η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2+x)) = 9$
γ) να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x)) < 2$

1.6.14. Έστω $f,g : \Re \to \Re$ συναρτήσεις "1-1 " .Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις fof , fog, gof, gog είναι "1-1"

1.6.15. Έστω $f : A \to \Re$ και g $f(A) \to \Re$. Αν η gof είναι "1-1" να αποδείξετε ότι
α) η f είναι "1-1" β) η g είναι "1-1"

1.6.16. Έστω $f,g : A \to \Re$ με $(g \circ f)(x) = x+1$, για κάθε $x \in \Re$. Να λυθεί η εξίσωση $g(4^x - 2^{x+1} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$

1.6.17. Να λυθεί η εξίσωση $(e^{x-1} + x - 3)^5 + (e^{x-1} + x - 3)^3 + e^{x-1} + x = 0$

1.6.18. Αν $f : \Re \to \Re$ είναι "1-1" να δείξετε ότι η $g(x) = \lambda f(2 - x^3) + \mu$ είναι "1-1"

1.6.19. Αν $f(f(x)) = f(x) + 2x - 2$ να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1"

1.6.20. Αν $f(f(x)) = f(x) + x$
α) να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" β) να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

1.6.21. Αν $f(f(x)) = x$ και f αντιστρέψιμη να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$

1.6.22. Δίνεται η $f : \Re \to \Re$ με $f(f(x)) = x^2 - x + 1$
α) να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$
β) να αποδείξετε ότι η $g(x) = x^2 - x f(x) + 1$ δεν είναι "1-1"

1.6.23. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - 2x$, $0<\alpha<1$ είναι "1-1"
β) Αν $0<\alpha<1$ να βρεθεί το $\lambda \in \Re$ ώστε $\alpha^{\lambda^2 - 6\lambda} - \alpha^{5\lambda - 30} = 2\lambda^2 - 22\lambda + 60$

1.6.24. Να ορισθεί (εφ'όσον ορίζεται) η αντίστροφη της συνάρτησης f όταν
α) $f(x) = \begin{cases} x-2, x \geq 3 \\ 3x-8, x<3 \end{cases}$ β) $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x - 1}$

1.6.25. Αν $f : \Re \to \Re$ και ορίζεται η $(f \circ f)^{-1}$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

1.6.26. Αν f ,g,h: $\Re \to \Re$, η f είναι "1-1" και fog = foh να αποδείξετε ότι g = h

1.6.27. Αν f(x) = 3x-5 και g(x) = 1-2x να ορίσετε τις $(fog)^{-1}$ και $g^{-1}of^{-1}$

1.6.28. Να βρεθούν τα λ, β ώστε η συνάρτηση f(x) = λx+β να είναι αντιστρέψιμη με $f^{1}=f$

1.6.29. Δίνεται η συνάρτηση f με $f^2(x) \bullet f(\alpha)\cdot f(\alpha - x)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται .

1.6.30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ = (0, + ∞).

Α. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε fog = h.

β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε φof = h.

Β. α) Να βρείτε τις f^{-1}, g^{-1} h^{-1} (αντίστροφες των f, g, h).

β) Να βρείτε τις $f^{-1}og^{-1}$ και $g^{-1}of^{-1}$.

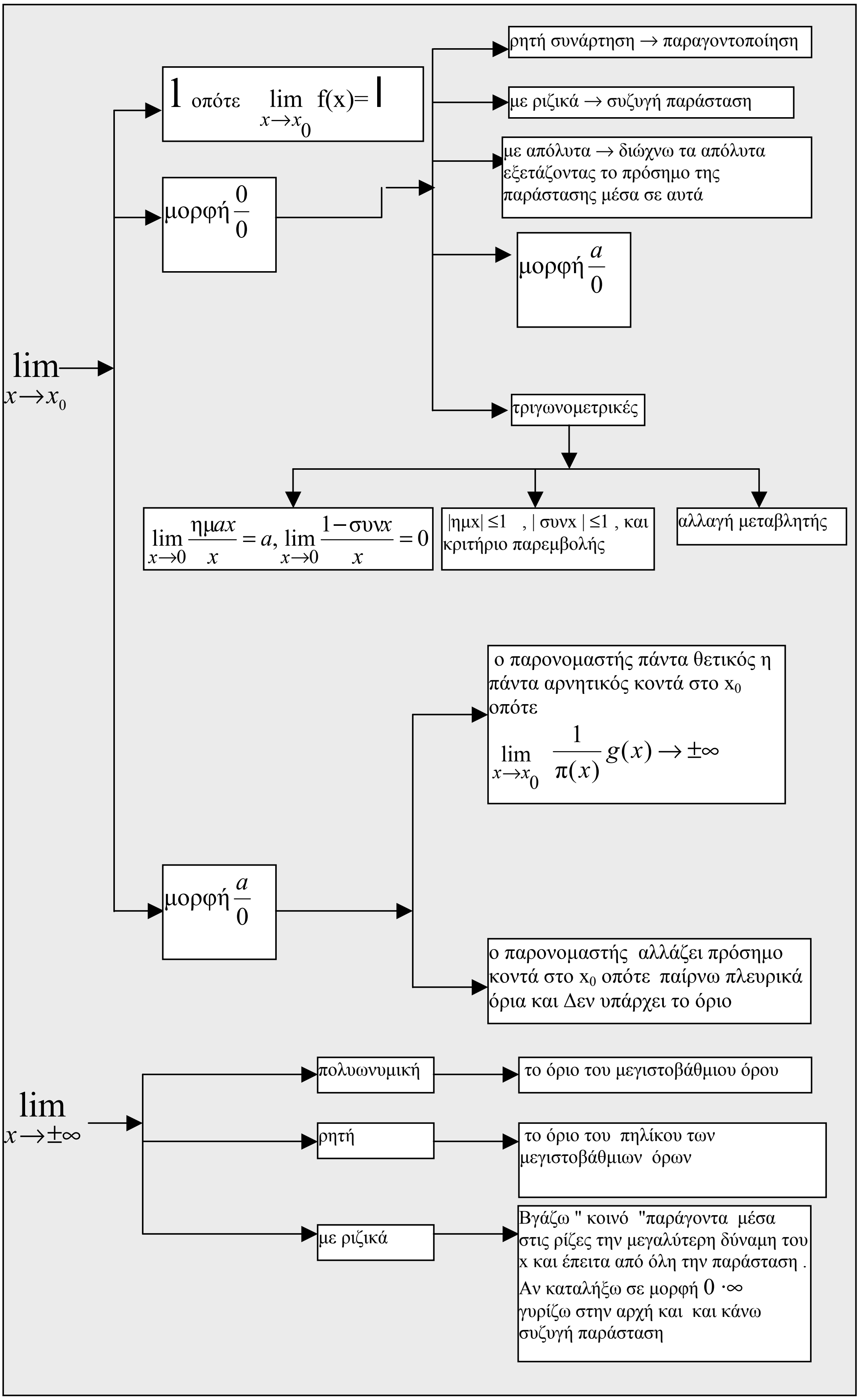
γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1}of^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

Ανάλυση

Κεφάλαιο 2ο

Όρια

ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΟΡΙΩΝ



ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΛΛΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΟΡΙΩΝ

- Ασκήσεις με κριτήριο παρεμβολής
  Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lambda$ τότε $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda$,
  όπου $\alpha \in \Re$ ή $\pm\infty$, $\lambda \in \Re$ ή $\pm\infty$

- Ασκήσεις με σχέση ορίου
  Όταν δίνεται μια σχέση ορίου μέσα στην οποία υπάρχει η συνάρτηση f(x) και ζητείται το όριο της f(x) τότε την σχέση την ονομάζω g(x) , λύνω ως προς f(x) και παίρνω όρια.

- Όριο κλαδωτής συνάρτησης
  Αν ζητείται το όριο στο x_0 και το x_0 σημείο αλλαγής τύπου τότε παίρνω πλευρικά όρια

- Παραμετρικές

  Α) παραμετρικές της μορφής $\frac{\alpha}{0}$

  Ζητείται το όριο της μορφής $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(\lambda, x)}{g(x)}$, κάνω το σπάσιμο $\lim_{x\to x_0} f(\lambda, x)\frac{1}{g(x)}$ και εξετάζω το όριο της $f(\lambda) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ

  - Αν $f(\lambda) \neq 0$ ($f(\lambda) > 0$ ή $f(\lambda) < 0$) τότε $\lim_{x\to x_0} h(x) = \pm\infty$ ή με

  πλευρικά όρια το $\lim_{x\to x_0} h(x)$ δεν υπάρχει

  - Αν $f(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = ..$ $\Rightarrow$ και αντικαθιστώ

  Β) παραμετρικές στο $\pm\infty$

  Ζητείται το όριο της μορφής $\lim_{x\to\pm\infty} h(\lambda, x)$ όπου η h(x) περιέχει ριζικά

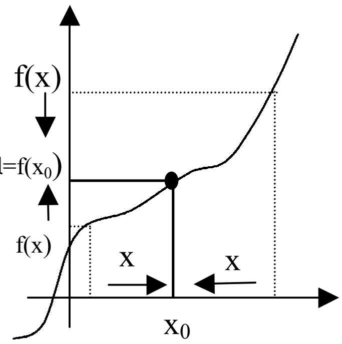
  Βγάζω κοινό παράγοντα την μεγαλύτερη δύναμη του x οπότε

  $$h(x) = \underbrace{x^k}_{\pm\infty} (\underbrace{\sqrt{\dots} \pm \sqrt{\dots}}_{g(\lambda)})$$

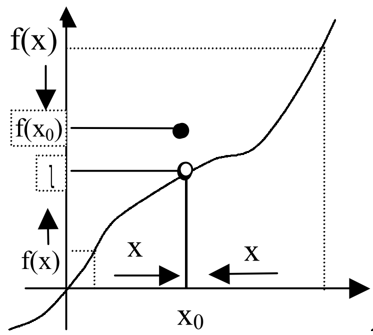
  - Αν $g(\lambda) \neq 0$ ($g(\lambda) > 0$ ή $g(\lambda) < 0$) $\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} h(\lambda, x) = \pm\infty$
  - Αν $g(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \dots \Rightarrow$ αντικαθιστώ και κάνω συζυγή παράσταση στην αρχική

2.1 Όριο συνάρτησης στο x_0

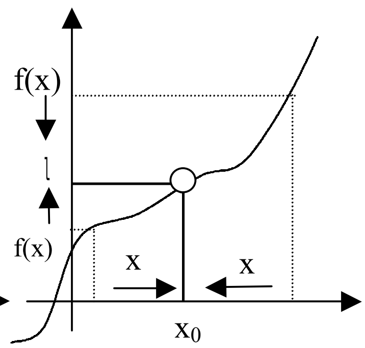
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον πραγματικό αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell}$$

και διαβάζουμε

  - ***το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 είναι ℓ ή***
  - ***το όριο της f(x) στο x_0 είναι ℓ***

- Όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ τότε μπορεί
  - $\ell = f(x_0)$ (σχήμα 1)
    δηλαδή το όριο το όριο της f(x) στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της f στο x $_0$. (*Τότε όπως θα δούμε η συνάρτηση θα λέγεται συνεχής στο x_0)*

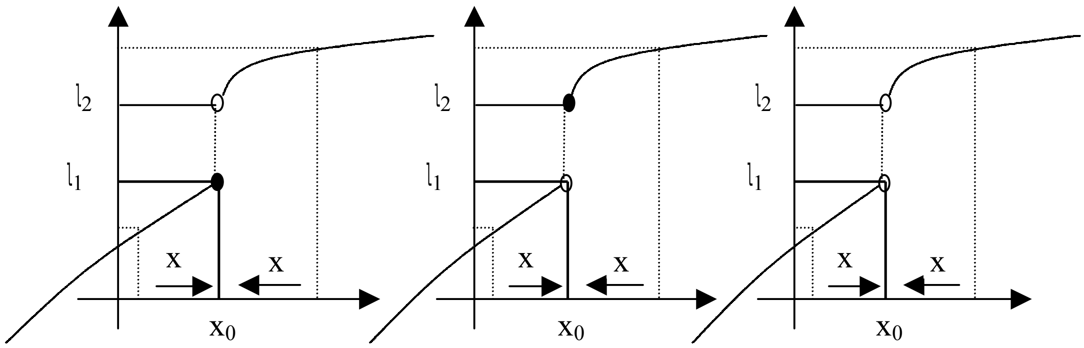
  - $\ell \neq f(x_0)$ (σχήμα 2)
    δηλαδή το όριο το όριο της f(x) στο x_0 δεν είναι ίσο με την τιμή της f στο x $_0$.

  - **Να μην ορίζεται η f στο x_0** (σχήμα 3)

- <u>Επομένως για να μιλήσουμε για όριο στο x_0 δεν είναι ανάγκη η συνάρτηση να ορίζεται στο x_0 αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται</u> **"κοντά "** <u>στο x_0</u> δηλαδή σε ένα διάστημα της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \text{ ή } (\alpha, x_0) \text{ ή } (x_0, \beta)$$

- Τι γίνεται όμως όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και η f ορίζεται μόνο σε ένα διάστημα της μορφής **(α, x_0)** ή **(x_0, β)** ή **η** f προσεγγίζει άλλον αριθμό καθώς το x κινείται προς το x_0 από μικρότερες τιμές άλλον αριθμό καθώς το x κινείται προς το x_0 από μικρότερες τιμές και
 Τότε μιλάμε για τα πλευρικά όρια
-



  - Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_1 καθώς το x τον πραγματικό αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές ($x<x_0$) τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$ και λέμε ότι

    το <u>αριστερό όριο </u>της f στο x_0 είναι ℓ_1

  - Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_2 καθώς το x τον πραγματικό αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές
    ($x > x_0$) τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ και λέμε ότι το <u>δεξί όριο </u>της

    f στο x_0 είναι ℓ_1

  - Το αριστερό και το δεξιό όριο της f(x) στο x_0 όταν υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί λέγονται πλευρικά όρια της f(x) στο x_0 .

  - Όταν τα πλευρικά όρια της f(x) στο x_0 υπάρχουν και είναι ίσα τότε υπάρχει και το όριο της f(x) στο x_0. Δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

  - Όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται δεξιά του x_0 (δηλ ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0) ,τότε οι έννοιες όριο στο x_0 και αριστερό όριο στο x_0 συμπίπτουν . (αντίστοιχα για το δεξιό όριο)

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$ τότε δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0

- Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 τότε αυτό είναι μοναδικό .
- Ισχύει ότι
  - $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ell$
  - $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(x_0 + h) = \ell$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} | f(x) |=0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} [- f(x)] = - \ell$

- Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} (kf(x)) = k\ell_1$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$, $\ell_2 \neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^\nu = \ell_1^\nu$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.
  - $\lim\limits_{x\to x_0} | f(x) | =| \ell_1 |$

- **<u>Πρόταση 1</u>**

Αν P(x) και Q(x) είναι πολυώνυμα τότε

- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x)\neq 0$ κοντά στο x_0.

- **Απροσδιόριστες μορφές** $\frac{0}{0}$

  Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ το οποίο καταλήγει σε μορφή $\frac{0}{0}$ τότε κάνουμε τα παρακάτω

  - Αν η f είναι της μορφής . f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με P(x) και Q(x) είναι πολυώνυμα και $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ τότε κάνοντας παραγοντοποίηση (σχήμα Horner, ταυτότητες ,…) προσπαθούμε να εμφανίσουμε σε αριθμητή και παρονομαστή παράγοντες κοινό παράγοντα το x-x_0 και να κάνουμε έτσι την λεγόμενη *άρση της απροσδιοριστίας*.

  - Αν η f(x) είναι ρητή όπου ο αριθμητής ή ο παρονομαστής περιέχει ριζικά . τότε κάνουμε χρήση των σχέσεων

    $$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\ , \qquad a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$$

    $$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \qquad a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

    $$a-b=\frac{a^v-b^v}{a^{v-1}+a^{v-2}b+...+ab^{v-2}+b^{v-1}}$$

    ανάλογα αν έχουμε ριζικά $2^{ης}$, $3^{ης}$ ή $v^{ης}$ τάξης .

- **Πρόταση 2**

  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

    Η παραπάνω πρόταση είναι χρήσιμη όταν έχουμε όρια με απόλυτες τιμές .

- **Πρόταση 3**

  Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και οι f ,g έχουν όριο στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- **Πρόταση 4 (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)**

  Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$

  τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Η πρόταση αυτή είναι πολύ σημαντική και η χρήση της γίνεται συχνά σε συνδυασμό με τις γνωστές ιδιότητες :

$|f(x)| \leq k \Leftrightarrow -k \leq f(x) \leq k$

$|$ημ(***ότι θέλεις***)$| \leq 1$, $|$συν(***ότι θέλεις***)$| \leq 1$,

- **<u>Τριγωνομετρικά όρια</u>**

  - Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει $|ημx| \leq |x|$
    - το ίσον ισχύει για x=0
    - αν $x > 0$ τότε $ημx > x$
    - αν $x < 0$ τότε $ημx < x$
  - $\lim\limits_{x \to x_0} ημ(x) = ημ(x_0)$
  - $\lim\limits_{x \to x_0} συν(x) = συν(x_0)$
  - $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{ημx}{x} = 1}$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{συνx - 1}{x} = 0}$

  Για τον υπολογισμό τριγωνομετρικών ορίων πολύ συχνά κάνουμε χρήση του κριτηρίου παρεμβολής

- **<u>'Οριο σύνθετης συνάρτησης</u>**

Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ κάνουμε τα εξής

Αν u=g(x)

- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$
- $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = \ell$
- $g(x) \neq u_0$, κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = \ell$

- **<u>'Οριο συνάρτησης με ριζικά</u>**

  - Στις ασκήσεις που περιέχονται x, $\sqrt{x}$ συνήθως θέτω $u = \sqrt{x}$ οπότε $x = u^2$.
  - Αν η άσκηση περιέχει ριζικά διαφόρων τάξεων π.χ . $\sqrt[k]{x}, \sqrt[\lambda]{x}, ...$ τότε θέτω $u = \sqrt[\nu]{x}$ όπου ν = ΕΚΠ (κ , λ ,…)

Ασκήσεις Α' Ομάδας

2.1.1. Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει όριο στο x_0 όταν:

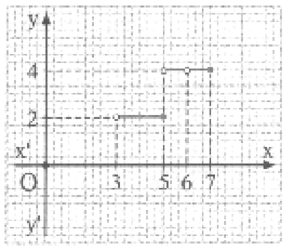
α) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 4$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda(3-2\lambda)$ με $\lambda \in R$,

β) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \kappa^2 + 3$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 2\kappa^2 - 5\kappa + 10$ με $\kappa \in R$.

2.1.2. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0, αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda^2 + 1$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda + 13$.

β) Για μία συνάρτηση f ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 3x_0^3 + 2x_0^2 + 10$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 5x_0^3 - 4x_0^2 + x_0 + 7$. Να βρείτε το όριο της f στο σημείο $x_0 \in R$, αν είναι γνωστό ότι αυτό υπάρχει.

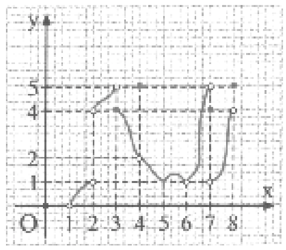
2.1.3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να βρείτε το $f(x_0)$ καθώς και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αν υπάρχουν, στην περίπτωση που το x_0 είναι ίσο με:



α) 3, **β)** 5, **γ)** 6,

δ) 7, **ε)** 8.

2.1.4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. Να βρείτε το $f(x_0)$ καθώς και το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αν υπάρχουν, στην περίπτωση που το x_0 είναι ίσο με:



α) 1, **β)** 2, **γ)** 3, **δ)** 4, **ε)** 5,

ζ) 6, **η)** 7, **θ)** 8.

2.1.5. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις και με την βοήθειά τους να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

α) $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 2, & x < 2 \end{cases}$ και $x_0 = 2$, **β)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{9}{x}, & x > 3 \end{cases}$ και $x_0 = 3$,

γ) $f(x) = -\dfrac{x}{|x|}$ και $x_0 = 0$, **δ)** $f(x) = x - |1 - x|$ και $x_0 = 1$,

ε) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{|1-x|}$ και $x_0 = 1$, **ζ)** $f(x) = \dfrac{2x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x}$ και $x_0 = 1$.

***

2.1.6. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-5x+1)$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2+2}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^0$, **δ)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x}{x}$,

ε) $\lim\limits_{x\to 1}(\varepsilon\varphi\pi x-\ln x+2x^2-7)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to -2}(3x+5)^\nu$, $\nu\in N^*$,

η) $\lim\limits_{x\to -2}\left(2x\eta\mu^2\dfrac{x}{2}+x\sigma\upsilon\nu x\right)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 2000}\left(3\eta\mu^2\dfrac{x}{5}+3\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{5}\right)$.

2.1.7. Οι συναρτήσεις f και έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f(x)\neq 5$ για κάθε $x\in R$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=5$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-2$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+|g(x)|}{f^2(x)-3f(x)+4}$, **β)** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3f^2(x)-14f(x)-5}{2f^2(x)-50}$.

2.1.8. Αν $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=4$ και $f(x)\neq 4$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)+x-2}{x-2}$, **β)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2f^2(x)-7f(x)-4}{f^2(x)-16}$,

γ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{3f(x)-12}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|f(x)|-4}{f^2(x)-16}$.

***

2.1.9. **α)** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ **β)** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3|x|}{|x|+3}$

2.1.10. Αν $f(x)=\begin{cases}6, & x\neq\pm 4\\ 5, & x=4\end{cases}$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to -4}f(x)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 6}f(x)$

2.1.11. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}4, & x\leq -1\\ 2x+6, & -1<x\leq 2\\ x^2, & 2<x<5\end{cases}$. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$,

ε) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$, **η)** $\lim\limits_{x\to 6}f(x)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to \frac{1-\sqrt{5}}{2}}f(x)$.

2.1.12. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία $x_0 = 2$ και $x_0 = -2$.

α) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & |x| < 2 \\ 3x^2 - 5x - 1, & |x| \geq 2 \end{cases}$, **β)** $g(x) = \begin{cases} 3x, & |x| \leq 2 \\ |x| - 8, & |x| > 2 \end{cases}$.

2.1.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \beta \\ 2(x + \alpha) + 1, & x > \beta \end{cases}$. Αν οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι, να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο αυτής της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = \beta$.

2.1.14. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 10, & x > 2 \\ x + 3\alpha, & x < 2 \end{cases}$, να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 2$.

2.1.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x + \alpha, & x > 2 \\ x + \alpha^2 - 2, & x < 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

2.1.16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x < -1 \\ \alpha^2 x + 3, & -1 \leq x < 0 \\ 3\alpha, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του α $\in R$ οποίες η συνάρτηση f έχει όριο στο -1 όχι όμως και στο 0.

2.1.17. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta, & x \geq 3 \\ x + \alpha, & x < 3 \end{cases}$, να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in R$, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 3$ και να ισούται με 8.

2.1.18. Αν $f(x) = \begin{cases} 3\alpha x + 1, & x < -1 \\ x + 2\beta, & -1 < x \leq 2 \\ 2x + 4\alpha & x > 2 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2.1.19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ στο σημείο $x_0 = 1$.

2.1.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x|x-1|}{2x^2-x-1}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια της f στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

***

2.1.21. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{2x-6}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$,

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+7x+6}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{8x^2-2}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$,

η) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+27}{2x^2+7x+3}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+4)^3-27}{(x+6)^2-25}$.

2.1.22. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{8}{x^2}}$, **β)** $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2}{9-x^2}-\dfrac{3x}{x^2-9}\right)$,

γ) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-20}{x^2-16}+\dfrac{2}{x-4}\right)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{3x^2-6}$,

ε) $\lim\limits_{x\to -\alpha}\dfrac{\alpha^4-x^4}{x^3+\alpha^3}$, $\alpha \neq 0$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$.

2.1.23. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2-4x-8}{x^3+1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{x^3-x^2+x-1}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^\nu-2^\nu}{x-2}$, $\nu \in N^*$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-(\nu+2)x+\nu+1}{x^2-1}$, $\nu \in N^*$.

***

2.1.24. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{16-x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{\sqrt{x+1}-2}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^2-9}}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}-1}$

η) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3x^2-243}{x-\sqrt{x}-6}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{2\sqrt{x}-\sqrt{8}}$, **ι)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+\sqrt{2x+6}}{1-\sqrt{x+2}}$,

κ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}}$, **ια)** $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sqrt{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x}}$.

2.1.25. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt[3]{x+12}-2}{x^2-16}$, **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}+x}{x+1}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{2-\sqrt[3]{7+\sqrt{x-4}}}$.

2.1.26. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x^2-3x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}-4x^2+3}{x-1}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

***

2.1.27. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-1|-|x+2|}{|3-x|+|x-2|}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(2|x|\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{2}-|x|\sigma\upsilon\nu x\right)$,

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-|x|}{x+|x|}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+|x|}{x-|x|}$.

2.1.28. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|-|x-2|}{|x-3|+|x+4|}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3|x-2|+|x^2-5|-1}{|x|-3}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|+|x^2-1|+4}{|x-2|+|x+2|}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|4-x^2|-|x^2+x-2|}{|x+3|+|x+1|}$.

2.1.29. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+|x|}{x-|x|}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-x}{x+|x|}$,

ε) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+|x+1|+1}{x-|x+1|+1}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|-x+2}{x+|x-2|-2}$.

2.1.30. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9-|3-x|+|x^2-3x|}{\sqrt{x-3}}$, **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-|x+1|}{\sqrt{-x-1}}$.

2.1.31. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|2-x|+2|x+3|-4x}{x-4}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|+2|x^2-1|-7}{x-2}$,

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^2-4|-|x^2+5x|+1}{3x^2-3}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-x+2|-2}{x-1}$,

ε) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3|x-2|+|2x-x^2|}{3x^2-12}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{|x^2-9|+2x+6}{x+3}$,

η) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x^3-3x^2+4|}{x^3+1}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x}$.

2.1.32. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{|x+3|}{2x+6}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-3|+5|1-x|-10}{x^2-9}$,

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3|x+1|-|x-2|+3}{4x+4}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-4x^2+3|x|}{x^4+4x^2-3|x|}$,

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}-3}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{|x-2|}$,

η) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{2\left|\eta\mu\dfrac{x}{2}\right|}$.

2.1.33. α) Αν $x^2 - x \le f(x) \le x$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και το f(0)

β) Αν $|\, f(x) - 3x+5 \,| \le x^2$, για κάθε $x\neq 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

γ) Αν $|\, f(x) \,| \le |x-1|$, για κάθε $x\neq 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2.1.34. α) Αν $|\, f(x) - 3x+5 \,| \le x^2$, για κάθε $x\neq 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) Αν $|\, f(x)\cdot x - \eta\mu\, 2x \,| \bullet x^2$, για κάθε $x\neq 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2.1.35. α) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\eta\mu^2\dfrac{1}{x}$ β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu^2\dfrac{1}{x}}{1+\eta\mu^2\dfrac{1}{x}}$

2.1.36. Να αποδείξετε ότι :

α) $\lim\limits_{x\to 0} x^5 ημ\dfrac{2}{x}$ **=0** **β)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 + xσυν\dfrac{1}{x}$ **= 0** **γ)** $\lim\limits_{x\to 0} x^4 συν\dfrac{3π}{2004x^2}$ **=0**

2.1.37. α) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $|f(x) - 2x| \le (x - 5)^2$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 10 = f(5)$.

β) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $|f(x) - λ| \le ρ(x - κ)$, όπου λ, κ, ρ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to κ} f(x) = λ = f(κ)$.

2.1.38. α) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $10x - 50 \le (x - 5)f(x) \le x^2 - 25$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

β) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{5x+6} \le (x - 2)f(x) + 4 \le \dfrac{5x+22}{8}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

γ) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $|ημx - xf(x)| \le |x - ημx|$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2.1.39. Αν η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ πληροί τη συνθήκη $| f(x) - x^2 συν\dfrac{1}{χ}| \le x^2 ημ^4 \dfrac{1}{χ}$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2.1.40. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $6x \le f(x) \le x^2 + 9$, για κάθε $x \in R$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-18}{x-18}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-18}{x-3}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-18}{\sqrt{x^2-5}-2}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-2x^2}{x-3}$.

2.1.41. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2\sqrt{3x} \le f(x) \le x + 3$, για κάθε $x \ge 0$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-6}{x-3}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|f(x)|-6}{x-3}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-2x}{x-3}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-x^2+3}{x^2-9}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2f^2(x)-72}{9-3x}$.

2.1.42. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-9)^4 ημ\left(\dfrac{1}{2x-6}\right)\right]$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\left[5x^2-(x^2-9)^4 ημ\left(\dfrac{1}{2x-6}\right)-2\right]$.

γ) $\lim\limits_{x\to-2}\left[(3x+6)\eta\mu\left(\dfrac{5}{x+2}\right)\right]$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-2}(3x+6)\left[5x^2-\eta\mu\left(\dfrac{5}{x+2}\right)+1\right]$.

***

2.1.43. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{x}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\alpha x}$

2.1.44. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3+2x^2+3x}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^4-3\eta\mu^4x}{8x^2\eta\mu^2x}$,

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu3x\cdot\eta\mu5x}{(x-x^3)^2}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu^3x^3}{x^8\eta\mu x}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu3x}{\sqrt{x}}$,

η) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu5x}{\sqrt{3x+4}-2}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu2x}{\eta\mu3x}$.

2.1.45. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to0}(x^2\sigma\varphi^2x)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\varepsilon\varphi3x}{2x}$,

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\eta\mu^2x-2x\varepsilon\varphi x}{4x^6+5x\eta\mu x}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi^2x-\eta\mu^2x}{x^4}$.

2.1.46. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$, **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu6x}{4x^2}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha x}{x^2}$,

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x-\varepsilon\varphi x}{x^3}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{1+x\eta\mu x}}{x^2}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu5x}{x}$,

η) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu3x-\sigma\upsilon\nu2x}{x^2}$.

2.1.47. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 2x}{x^2}$, **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x\sqrt{\sigma\upsilon\nu2x}}{x^2}$.

2.1.48. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu3\pi x}{\eta\mu4\pi x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\varepsilon\varphi\pi x}{x-5}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to\frac{\alpha}{2}}\left[(2x-\alpha)\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{\alpha}\right]$,

δ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu\alpha}{x-\alpha}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\eta\mu\pi x}{\sqrt{x+1}-2}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{\sqrt{2x+3}-3}$,

η) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\etaμ(\sqrt{x+3}-2)}{\etaμ(x-1)}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\etaμ(\etaμ^2 x)}{x^2}$.

***

2.1.49. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-5)=7$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2.1.50. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3x^2+2+x) = -4$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.1.51. α) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}(f(x)-3x^2+5) = 12$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

β) Αν ισχύουν $f(x)\neq \dfrac{5}{3}$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2f(x)-1}{5-3f(x)} = 4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

2.1.52. Αν $\lim\limits_{x\to 10}(3f(x)-2g(x)) = 7$ και $\lim\limits_{x\to 10}(3g(x)+7f(x)) = 1$, να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 10} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 10} g(x)$.

2.1.53. Αν $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 f(x)+3g(x)) = 4$ και $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x)\sqrt{x^2+3}) = 3$, να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

2.1.54. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2+1} = 3$ και $\lim\limits_{x\to 2}(g(x)|x+1|) = 15$, να βρείτε τα:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g^2(x)}{f(x)-5x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2g^2(x)+7x}-8}{\sqrt{2f(x)+3x}-x}$

2.1.55. Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0}(f^2(x)+g^2(x)) = 14$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f^2(x)-g^2(x)) = 6$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}(f^4(x)-g^4(x))$, **β)** $\lim\limits_{x\to x_0}(f^4(x)+g^4(x))$, **γ)** $\lim\limits_{x\to x_0}(3f^6(x)+5g^4(x))$.

2.1.56. α) Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x}{x^2-9} = 5$, να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-x-3}{x^2-9}$,

β) Αν $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{x^2-9} = 0$, να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{|f(x)|}{x^2-9} = 0$.

2.1.57. α) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{g(x)}=6$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)(2x^2-18)]=4$ και $\lim\limits_{x\to 3}[g(x)(\sqrt{x+1}-2)]=5$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

2.1.58. Δίνονται δύο συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού το R, για τις οποίες ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)ημ2x-x^2f(x)}{x^2}=5$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)ημ2x+x^2f(x)}{x^2}=-1$. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

2.1.59. Δίνεται συνάρτηση $f\colon R\to R$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)ημx+1-συν4x}{\sqrt{4+x^2}-2}=4$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

2.1.60. Αν $f\colon R\to R$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx\cdot f(x)+x^2}{5ημ^2x-3x^2}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)ημx+f^3(x)-x^2f(x)}{xf^2(x)+f(x)ημ^2x+x^3}$.

***

2.1.61. Αν $\lim\limits_{h\to 0}f(5+h)=10$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 5}(f(x)-2)$.

2.1.62. α) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=d\in R$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(αx)}{x}=α\cdot d$ για κάθε $α\in R^*$.

β) Αν $f\colon R\to R$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)+f(-2x)ημx}{x^2-3ημ^2x}$.

2.1.63. α) Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+4}{x-2}=1$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)=f(1-x)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

β) Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=4$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)=f(x-3)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

2.1.64. Δίνεται μία άρτια συνάρτηση f. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)$ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = d \in R$,

β) το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ αν $\lim\limits_{x\to -3}(f(x)+2x-5) = 4$,

γ) το $\lim\limits_{x\to -2}\left(f(x)+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$ αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

2.1.65. Δίνεται μία περιττή συνάρτηση f. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)$ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = d \in R$,

β) το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ αν $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3x+x^2) = 5$,

γ) το $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{6}{9-x^2}\right)$ αν $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 1$.

2.1.66. Έστω μία περιττή συνάρτηση f: R → R.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}(f(x-1)-f(1-x))$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

***

2.1.67. Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta}{x^2-4x+3}=2$

2.1.68. Να βρεθεί το α $\in \Re$ έτσι ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(a-1)x+5a+\sqrt{x^2+3x+6}}{x-2}$

να είναι πραγματικός αριθμός.

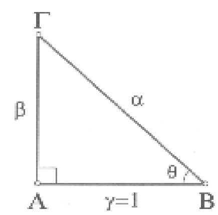
2.1.69. Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$ έτσι ώστε

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+\beta}{x-1}=4$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+\beta\sqrt{x}-2}{x-1}=-2$

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

2.1.70. Με βάση το διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$, **β)** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$, **γ)** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$.



2.1.71. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\kappa}-1}{x}=\kappa,\ \kappa\in N^*$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{\kappa}{\lambda}}-1}{x}=\dfrac{\kappa}{\lambda},\ \kappa,\lambda\in N^*$.

2.1.72. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+\eta\mu 3x+\ldots+\eta\mu\nu x}{x}=\dfrac{\nu^2+\nu}{2}$, $\nu\in N^*$,

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[4]{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}=\dfrac{1}{8}$

2.1.73. Αν $f(\lambda)$ είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)=(4-\lambda^2)x^3+(\lambda-2)x+\lambda+2$, να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{\lambda\to 2}f(\lambda)$.

2.1.74. Να υπολογιστούν, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\alpha^2-x^2}{|x|-\alpha}$, **β)** $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x-|\alpha|}{|x|-\alpha}$.

2.1.75. Να αποδείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $f: R\to R$, τέτοια ώστε να ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ και $\sqrt{|x|}\,f(x)-x=\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$.

2.1.76. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)\eta\mu y+f(y)\eta\mu x$ για κάθε $x, y\in R$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)$, όπου $\alpha\in R$.

2.1.77. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y\in R$.

α) να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

β) Αν $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)=f(\alpha)$ για κάποιο συγκεκριμένο $\alpha\in\Re$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $x_0\in\Re$

2.1.78. **α)** Αν κοντά στο x_0 ισχύει $|f(x)|\le g(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, τότε να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$, να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

δ) Αν κοντά στο x_0 είναι $f(x)\ge 0$ και $g(x)\ge 0$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=0$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f^2(x)+g^2(x)) = 0$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

2.1.79. Αν κοντά στο x_0 ισχύει $0 \le |g(x)| \le \Phi$, όπου $\Phi \in R$, και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = 0$.

2.1.80. α) Αν $\lim\limits_{x\to 3}(12f(x)-4f^2(x)) = 9$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

β) Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^2(x) + 4 \le x + 4f(x)$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2.1.81. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \le \sqrt{|x|}$, να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

2.1.82. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f^2(x)}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{g^2(x)}{x^2}\right) = 0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

2.1.83. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο R και ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

2.1.84. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{\sqrt[4]{x}-1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-4+x-4\sqrt{x}}{x^2-16}$,

γ) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-6x-16}{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}-2x-2}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$,

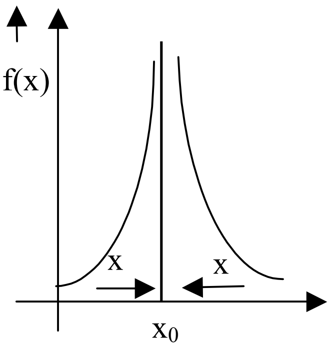
ε) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x-64}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$,

η) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x}-1)}-\dfrac{1}{4(\sqrt[4]{x}-1)}\right]$

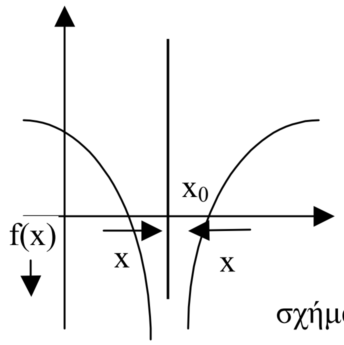
ι) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}$

2.2 Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο x_0

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ



σχήμα 1



σχήμα 2

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f μεγαλώνουν συνεχώς καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον πραγματικό αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

και διαβάζουμε
  - ***το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 είναι*** $+\infty$ ***ή***
  - ***το όριο της f(x) στο x_0 είναι*** $+\infty$

  (σχήμα 1)

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f μεγαλώνουν συνεχώς καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον πραγματικό αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

και διαβάζουμε
  - ***το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 είναι*** $+\infty$ ***ή***
  - ***το όριο της f(x) στο x_0 είναι*** $-\infty$

  (σχήμα 2)

- Για να μιλήσουμε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ δεν είναι ανάγκη η συνάρτηση να ορίζεται στο x_0 αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται **"κοντά "** στο x_0 δηλαδή σε ένα διάστημα της μορφής $\mathbf{(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)}$ ή $\mathbf{(\alpha, x_0)}$ ή $\mathbf{(x_0, \beta)}$

- Όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται δεξιά του x_0 (δηλ ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) ,τότε οι έννοιες όριο στο x_0 και αριστερό όριο στο x_0 συμπίπτουν . (αντίστοιχα για το δεξιό όριο)

- Όταν τα πλευρικά όρια της f(x) στο x_0 υπάρχουν και είναι ίσα τότε υπάρχει και το όριο της f(x) στο x_0. Δηλαδή :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

, αντίστοιχα για $-\infty$

- **Ιδιότητες**
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$, κοντά στο x_0
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$, κοντά στο x_0
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} [\,-f(x)\,] = -\infty$
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} [\,-f(x)\,] = +\infty$
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =0$ και $f(x) >0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

    $\boxed{\dfrac{1}{0+} \to +\infty}$
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =0$ και $f(x) <0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

    $\boxed{\dfrac{1}{0-} \to -\infty}$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ $\boxed{\dfrac{1}{\pm\infty} \to 0}$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = +\infty$
  - Αν $f(x) \le g(x)$, κοντά στο x_0 τότε
    - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$
    - Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +00$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$
- Για τον υπολογισμό των απείρων ορίων χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\alpha\in\Re$	$\alpha\in\Re$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**? ? ?**	**? ? ?**

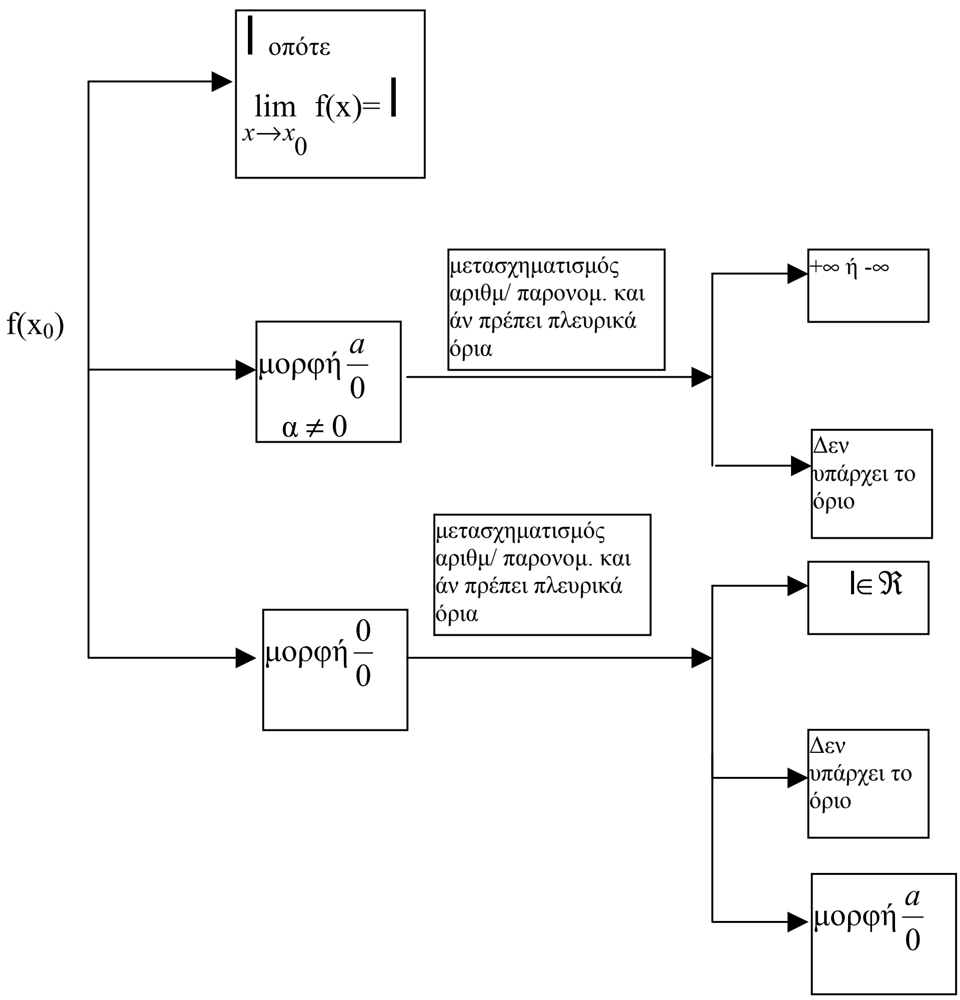
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	α>0	α>0	α<0	α<0	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**???**	**???**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Οι μορφές $+\infty - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, , 0^0, 1^\infty, \infty^0$ λέγονται <u>απροσδιόριστες μορφές</u> . Εάν ένα όριο έχει μια από τις παραπάνω μορφές αυτό δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι δεν υπάρχει αλλά για να το βρούμε (αν υπάρχει) πρέπει να μετασχηματίσουμε την συνάρτηση

- Όρια τα οποία καταλήγουν στην μορφή $\frac{a}{0}$, $\alpha \neq 0$ είτε δεν υπάρχουν είτε ισούνται με $+\infty$, ή $-\infty$. Σε αυτές τις περιπτώσεις εξετάζουμε το πρόσημο του παρονομαστή .

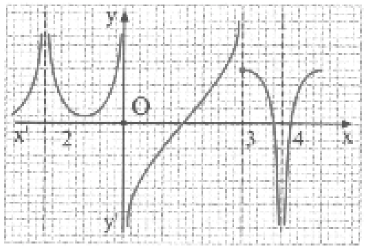
- Γενικός τρόπος αντιμετώπισης ορίων στο x_0

  Μου ζητούν το $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Βρίσκουμε το $f(x_0)$ οπότε



Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

2.2.1. Έστω f μία συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:



α) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$,

γ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,

ε) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

2.2.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση και να βρείτε από αυτή, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

2.2.3. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{|x|}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-2x}{2(x-1)^2}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x^2-4x+4}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x^2}{x^4-2x^2}$.

2.2.4. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{3-x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-5x+6}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+3|-4}{x^2-4}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-4|}{x^3-27}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

2.2.5. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-3x}{|x|-2}$, **β)** $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-2x^2+x}{|x|-1}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{x+4}{x-1}\right|$,

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x}{|x|-1}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-4x+1|-3|x-2|}{|x-1|-2}$.

2.2.6. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\text{συν}x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{1-\text{συν}x}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x}{1-\text{συν}^3x}$,

δ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x-2}{1-\text{ημ}x}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4x-5}{\text{ημ}x}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4}{\text{ημ}\pi x}$.

2.2.7. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0^-} \sigma\varphi x$, **β)** $\lim\limits_{x \to \pi^-} \sigma\varphi x$, **γ)** $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x$,

δ) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x$, **ε)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \dfrac{2\sigma\sigma\varphi - 3\eta\mu x}{1 - \varepsilon\varphi x}$.

2.2.8. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{3 - x}{\eta\mu x}$, **β)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{10 - 2x}{\sigma\upsilon\nu x}$, **γ)** $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x - 1}{\varepsilon\varphi x}$,

δ) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - x^2}{\sigma\varphi^3 x}$, **ε)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\eta\mu x + 1}{2\eta\mu^2 x - 1}$.

2.2.9. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 3}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}$, **β)** $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x + \sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{x^2 + 7} - 2}$,

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$, **δ)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \eta\mu^2 x}{\sqrt{2x^2 - x + 5} - \sqrt{x + 9}}$.

2.2.10. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 10}{x - 2\sqrt{2x} + 2}$, **β)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 1}{x - 5\sqrt{x} + 6}$,

γ) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{-4}{x\sqrt{x} + 27 - 3x - 9\sqrt{x}}$, **δ)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}$,

ε) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x + 7} - 5}{x\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} - 3x}$.

2.2.11. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$, **β)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}$,

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$, **δ)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^3}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^6}$,

ε) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(x - 2)^2}$, **ζ)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1} - 3}{(x - 2)^5}$,

η) $\lim\limits_{x \to 8^-} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{(x - 8)^2}$, **θ)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

2.2.12. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$, **β)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$, **γ)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|3x - 1| - |2x + 1|}{\sqrt{7x^2 + 9} - 3}$

2.2.13. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{|x|}\right)$, **β)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)$, **γ)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$,

δ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, **ε)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}\right)$, **ζ)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$,

η) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$.

2.2.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x^2-4}, & -2\neq x<2\\ \frac{\sqrt{x^2+1}-2}{x-3}, & 2\leq x\neq 3\end{cases}$. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα $\lim_{x\to 2}f(x)$ και $\lim_{x\to 3}f(x)$.

2.2.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}}{x+2}, & x>-2\\ \frac{-5}{(x+2)^3}, & x<-2\end{cases}$. Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x\to -2}f(x)$.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

***

2.2.16. Αν $\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{f(x)}=+\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}f(x)$

2.2.17. Αν $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x+3}=+\infty$, να βρεθεί το $\lim_{x\to 5}f(x)$

2.2.18. **α)** Αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=-\infty$ και $\lim_{x\to 1}f(x)=d\in R^*$, να αποδείξετε ότι $d<0$.

β) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=d\in R^*$ και $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$, να αποδείξετε ότι $d<0$.

2.2.19. Αν $\lim_{x\to 3}f(x)=+\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}(10\cdot f(x))$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{f(x)}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^2(x)-5f(x)}{3f^2(x)+10}$.

2.2.20. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^2(x)\cdot g(x) = -4$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, να βρείτε τα όρια: **α)** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g^2(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{|f(x)|}$.

2.2.21. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, εφόσον υπάρχει, αν:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-2}{f(x)} = +\infty$, **β)** $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)(x^2-3x+1)] = -\infty$,

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)|\eta\mu(\pi x)|\big) = -\infty$.

2.2.22. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, εφόσον υπάρχει, όταν:

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-x}{5x+4} = -\infty$, **β)** $\lim\limits_{x\to -2}[(3x+1)f(x)+5] = +\infty$,

γ) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{f(x)} = -\infty$.

2.2.23. Για την συνάρτηση f υποθέτουμε ότι έχει πεδίο ορισμού το R και ότι η C_f βρίσκεται ολόκληρη κάτω από τον άξονα xx'. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3}{f(x)} = 0$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f^2(x)-12}{3-f(x)}$.

2.2.24. Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to -3}\big(2f(x)-3g(x)\big) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -3}\big(3f(x)+2g(x)\big) = -1$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to -3}(f(x)\cdot g(x))$, **γ)** $\lim\limits_{x\to -3}\big(f^2(x)+g^2(x)\big)$.

2.2.25. Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(x+3h)\cdot f(x-h)\big)$, **β)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu(x-h))}{f(x-h)}$.

2.2.26. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\alpha^2 f(\alpha x)}{x} = +\infty$, όπου $\alpha < 0$.

***

2.2.27. α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = d \in R$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, να δείξετε ότι θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = d \in R$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)-d} = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = d \in R$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = d$.

2.2.28. α) Αν $\nu \in N^*$, να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^\nu - 32}{x-2} = 80$, τότε $\nu = 5$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες υπάρχει στο R το $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(\alpha+1)x^2+8x-\alpha}{12-3x^2}$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο.

γ) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+4\alpha x^2+\alpha^2 x-2}{x-2} = 9$.

2.2.29. α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x^2+\alpha}{x^2-4x+\alpha^2} = +\infty$.

β) Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-\kappa x-\lambda}$ να έχει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$.

2.2.30. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β για τις οποίες ισχύει:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1} = 4$, **β)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{\sqrt{4x^2-19}-9} = 7$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha}-\beta}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1$.

2.2.31. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+ax+1} = +\infty$ να βρεθεί η τιμή του α.

2.2.32. Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = 1$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f(x))^\nu - \alpha f(x)+\beta}{x-1} = 3$, $\nu \in N^*$.

2.2.33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x^2+\beta, & x \geq 1 \\ \dfrac{x^2+\alpha x-4}{x-1}, & x<1 \end{cases}$. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in R$ υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_0 = 1$ και είναι πραγματικός αριθμός.

2.2.34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-x}, & x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x>0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_0 = 0$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

2.2.35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x+4}{x^2-1}, & x<1 \\ \dfrac{\beta x^2+\gamma x+3}{x-1}, & x>1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_0 = 1$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

2.2.36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\alpha x+3}{x-3}, & x<3 \\ \dfrac{\beta x+\gamma}{x^2-3x}, & x>3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$, για τις οποίες υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_0 = 1$ και είναι πραγματικός αριθμός.

2.2.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^3-1}{x-1}, & x<1 \\ \gamma, & x=1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+8}-\delta}{\beta(x^3-1)}, & x>1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ και $\delta \in R^*$ για τις οποίες υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

***

2.2.38. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\lambda x^2 - 2}{|x-1|}$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\lambda x^2 + x - 6}{|x-2|}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in R$, για την οποία η συνάρτηση f να έχει όριο στο σημείο $x_0 = 2$ πραγματικό αριθμό.

2.2.39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2 + \lambda x - \lambda^2}{|x-1|}$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2.2.40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x - \lambda^2}{x^2 - 4x + 4}$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.2.41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\lambda x^2 + x + 2}{x^2 - 4}$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2.2.42. Αν $\alpha, \beta \in R$, να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{2x - 6 + \alpha}{|x-\alpha|}$, **β)** $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{x^2 - \alpha x + \beta - 1}{|x-\alpha|}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sqrt{|x+\beta|}}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}$.

2.2.43. Αν $\alpha, \beta \in R$, να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - \alpha x + \beta - 3}{x^2 - 4}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x - \beta}{x}$.

2.2.44. Αν $\alpha, \beta \in R$, να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\alpha x^2 - 2x + \beta}$, **β)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + \alpha}{|x-\beta|}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x + \beta - 1}{x^2 - \alpha}$,

δ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 + 5x - 2}{\beta x^2 - 4}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2} + \alpha}{x^2 - \beta}$.

2.2.45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x-\alpha| - |x+\alpha|}{x^3}$. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2.2.46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha}{|x| - \alpha}$. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)$.

2.2.47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{\beta^2 - x^2} - \beta}$. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in R^*$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2.2.48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\alpha x^2 + \beta x + 2}$.Να βρείτε τα α , $\beta \in \Re$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = +\infty$.

2.2.49. Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - f(x) + 3}$

2.2.50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{ax^2 + (\beta + 2)x + 4}{x^2 - 2x + 1}$.Να βρεθούν οι τιμές των α, β $\in \Re$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \in \Re$

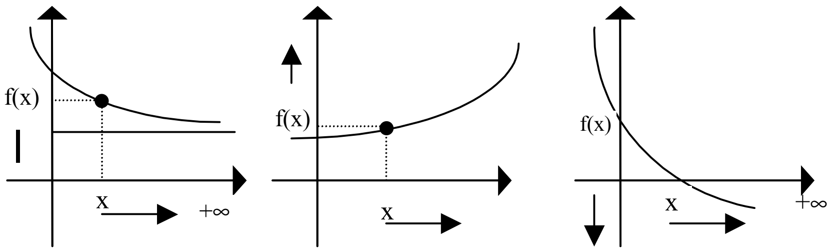
2.2.51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(\lambda^2 + 2)x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \mu^2}{(x-1)^2}$. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές των λ , μ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2.2.52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\lambda\, x^2 - \lambda^2 x + 12}{x^2 - 6x + 9}$. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του λ ,το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

2.3 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- **<u>'Οριο στο +∞</u>**

  Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, +∞)
  Τότε:



- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ καθώς το x μεγαλώνει συνεχώς , τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f αυξάνονται συνεχώς , καθώς το x μεγαλώνει συνεχώς , τότε γράφουμε

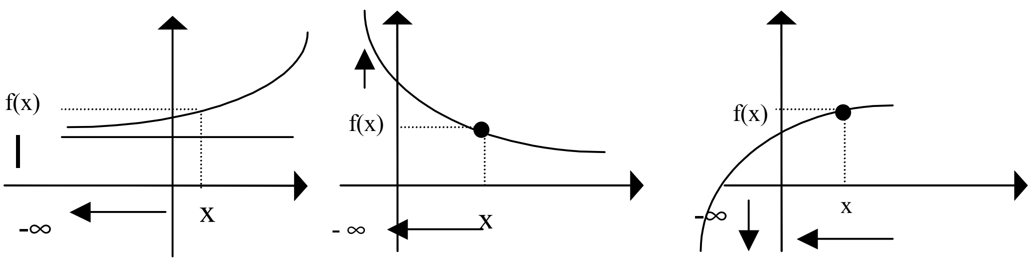
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f ελαττώνονται συνεχώς , καθώς το x μεγαλώνει συνεχώς , τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

- **<u>'Οριο στο – ∞</u>**

  Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (-∞, α)
  Τότε:



- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό ℓ καθώς το x ελαττώνεται συνεχώς , τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f αυξάνονται συνεχώς , καθώς το x ελαττώνεται συνεχώς , τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f ελαττώνονται συνεχώς , καθώς το x ελατώνεται συνεχώς , τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Ιδιότητες

1. Άν λ ***θετικός ρητός*** τότε

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \chi^{\lambda} = +\infty \ , \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} = 0}$$

πχ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x^4} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 0$

2. Άν λ ***θετικός ακέραιος*** τότε

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \chi^{\lambda} = \begin{cases} +\infty & \text{αν λ αρτιος} \\ -\infty & \text{αν λ περιττος} \end{cases} \quad \text{και } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} = 0}$$

π.χ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

3. ***Τό όριο κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης στο άπειρο ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της στο άπειρο***

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x\to\pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu) \quad \alpha_\nu \neq 0$$

π.χ $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^2+3x+8) = \lim\limits_{x\to+\infty} (5x^2) = 5\,(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-9x^3 + 7x^2 + 5x-19) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-9x^3) = (-9)\,(-\infty) = +\infty$

4. ***Τό όριο κάθε ρητής συνάρτησης στο άπειρο ισούται με με το όριο του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων της στο άπειρο***

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1} \chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \chi^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 \chi + \alpha_0}{\beta_\kappa \chi^\kappa + \beta_{\kappa-1} \chi^{\kappa-1} + \beta_{\kappa-2} \chi^{\kappa-2} + \ldots + \beta_1 \chi + \beta_0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\alpha_\nu \chi^\nu}{\beta_\kappa \chi^\kappa} \quad \alpha_\nu \beta_\kappa \neq 0$$

π.χ

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^2+5x}{3x^4-3x^2+2x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^2}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{3x^2} = \frac{7}{3}\,0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^5+5x}{3x^2-4x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^5}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{3} = -\frac{2}{3}(-\infty) = +\infty$$

5. ***Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα .***

6. ***Για το όριο στο ±∞ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του ορίου στο χ_0 με την διαφορά ότι εδώ το " κοντά στο χ_0 " αντικαθίσταται από διάστημα της μορφής (α, +∞) ή (-∞ ,α)***

7. Άν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$ τότε ∃ $\xi > 0$ τω $f(\xi) > 0$

   Άν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l < 0$ τότε ∃ $\xi > 0$ τω $f(\xi) < 0$

   Άν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε ∃ $\xi > 0$ τω $f(\xi) > 0$

   Άν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ τότε ∃ $\xi > 0$ τω $f(\xi) < 0$

   Άν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l > 0$ τότε ∃ $\xi < 0$ τω $f(\xi) > 0$

   Άν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l < 0$ τότε ∃ $\xi < 0$ τω $f(\xi) < 0$

   Άν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ τότε ∃ $\xi < 0$ τω $f(\xi) < 0$

   Άν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ τότε ∃ $\xi < 0$ τω $f(\xi) > 0$

8. ***Για την εύρεση του ορίου στο άπειρο κλάσματος με ρίζες βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του χ στα υπόριζα και έτσι το κλάσμα γράφεται σαν γινόμενο συναρτήσεων όπου η μία έχει όριο άπειρο και η άλλη πραγματικό αριθμό***

   Στην περίπτωση όμως που καταλήξουμε σε κάποια απροσδιόριστη μορφή τότε χρησιμοποιώ συζυγή παράσταση

9. ***Στις τριγωνομετρικές χρησιμοποιώ το κριτήριο παρεμβολής και τις βασικές τριγωνομετρικές που μάθαμε στο όριο στο χ_0 καθώς και τις:***

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ημx}{x} = 0$$

$\lim_{x\to\pm\infty} [ημ(\frac{1}{x})] = 0$ ($\frac{1}{x} = u$ άρα όταν $x \to \pm\infty$ τότε $u \to 0$ και άρα

$$\lim_{x\to\pm\infty} [ημ(\frac{1}{x})] = \lim_{u\to 0} (ημu) = ημ(0) = 0$$

9. Όρια Εκθετικής – Λογαριθμικής

   Αν α>1

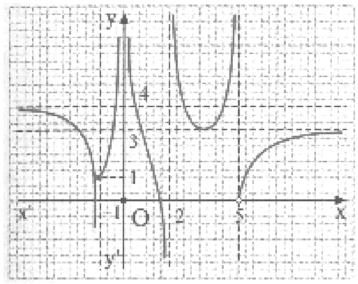
   $\lim_{x\to-\infty} α^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} α^x = +\infty$, $\lim_{x\to 0} \log_α x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \log_α x = +\infty$

   Αν 0 <α<1

   $\lim_{x\to-\infty} α^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} α^x = 0$, $\lim_{x\to 0} \log_α x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_α x = -\infty$

Ασκήσεις Α΄ Ομάδας

2.3.1. Έστω η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:



α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,
γ) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,
ε) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

2.3.2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$,
δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$, **ε)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-3}$,
η) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-4}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$, **ι)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3}$,
κ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{-4}}$, **κα)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{-5}}$, **κβ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/3}$, **κγ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1/3}$.

2.3.3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^4 + x^3 - x + 1)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} (-5x^7 + x^6 - x^4 + 2x + 7)$,
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - 2x^5 + x^3 - 8x^2 + 4)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^3 + 2x^2 + x + 3)$.

2.3.4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4 - 3x + 4}{5x^2 - 2x + 1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5 + x + 4}{3x^2 + x + 1}$,
γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^5 + x + 4}{3x^2 + x + 1}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3 + x^2 + 12}{-5x + 4}$,
ε) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{-100x^2 - 13x + 4}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 7}{4x^2 - 2x^3 - 7}$,
η) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x - 12x^2 + 1}{4x^2 - 2x}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{6x^2 + 5x^4 + 1}$.

2.3.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^5 + x^2 - 1}$. Να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης αυτής καθώς:

α) $x \to +\infty$, **β)** $x \to -\infty$, **γ)** $x \to 0$, **δ)** $x \to 1$, **ε)** $x \to -1$.

2.3.6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2 - 2x - 5}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 10x - 2}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{-5x^2+2x+4}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[4]{-3x^3+x+1}$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{5x^3-4x^2+1}{2x^2-7x^3-5}}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{-27x^4+x^3-1}{3x^3+x+2}}$,

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{-16x^4+x^3+2x}{1-4x^4}}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{-2x^3+x^2+12}{3x^4+x^2-12}}$.

2.3.7. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^4-3x^2+1}+2x-1)$,

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^4-3x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}-3x-2)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-2x)$,

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2-2x-4}+x)$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+2x-1}-\sqrt{4x^2-7x+4})$,

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9x^2-3x+1}-5x)$, **η)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2-3x+4}}{3x-2}$.

2.3.8. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-5x+3}-2x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2-10x+7}+3x)$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4-2x^2+x}-x^2)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^4+3}-\sqrt{9x^4+5})$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1})$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-3})$,

η) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+2x+\dfrac{5}{2})$, **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-2x}{\sqrt{9x^2-x+2}-5x+1}$,

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}-2x+1}{\sqrt{x^2+5}-x-4}$.

2.3.9. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+x-1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+3}+\sqrt{x^2-x+2})$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x-1}-\dfrac{x^2+x}{3x+2}\right)$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x}-\dfrac{x^2-4}{x-1}\right)$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-2x+5)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[4]{x^4+4x+2})$,

η) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}+2x)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}+2x}{x^2-1}$,

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}$.

2.3.10. Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}-3x+2$. Να βρεθούν τα όρια της f στο +∞ και -∞.

2.3.11. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2+5}-x^2}{x+4}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt[3]{x^3+2x}-x}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[\nu]{x^\nu+\nu}-x)$, $\nu\geq 2$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{16x^2+5x+3}-4x+1)$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x-2}+\sqrt{9x^2+2}}{\sqrt{x^2+2x}+x-3}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-x+3}{\sqrt{9x^2+x-2}-\sqrt{9x^2+2}}$.

2.3.12. Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών:

α) $\alpha_\nu = 4-5\nu^2+3\nu^5$, **β)** $\alpha_\nu=\dfrac{5\nu^4-3\nu+1}{\nu^3-5\nu-2\nu^4}$,

γ) $\alpha_\nu=\dfrac{\sqrt[3]{\nu^6+\nu^3}-\sqrt[3]{\nu^4}}{\sqrt[3]{\nu^5+\nu^2}+\nu}$, **δ)** $\alpha_\nu=\sqrt{3\nu^2-5\nu+2}-2\nu+5$,

ε) $\alpha_\nu=\sqrt{25\nu^2-10\nu+3}-5\nu$, **ζ)** $\alpha_\nu=\dfrac{\sqrt{\nu^3+1}-\nu\sqrt{\nu}}{\nu^3-\sqrt{\nu^6+\nu^4}}$.

***

2.3.13. Να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x+4|-|3-5x|}{|2x+1|+|x-2|}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+1}}{|x-3|}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x-5|-|9-x^2|+2}{3x^3-6}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|2x^2-1|-3|4-2x^2|+1}{|2-x|}$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x^3-x^2|-2x^3+1\right)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3|2-x|-|x^2-4|+1}{x^2-x+2}$,

η) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-|x^3-x+1|\right)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|3x^5-x+1|-1}{|1+x-x^5|+2x-3}$.

***

2.3.14. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

2.3.15. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{1}{\chi}=0$

2.3.16. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$

2.3.17. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\eta\mu x - \sqrt{x^3+2}}{x\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{x^3+1}}$

2.3.18. Αν $f(x) = (\sqrt{9+x^2} - 3)\eta\mu\dfrac{3}{x}$ Να βρεθούν τα όρια της f στο $+\infty$ και $-\infty$

2.3.19. Έστω $f : \Re \to \Re$ και για κάθε $x > 0$ είναι $|(2+x^4)f(x) - 3x^4| \le x^2+1$. Να βρεθεί το όριο της f στο $+\infty$.

2.3.20. Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\eta\mu x}{x^2+1} = 0$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \eta\mu x}{x^4}$

2.3.21. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\eta\mu^4\dfrac{1}{x}\right)$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)$. **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x+1}\right)$

ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$ **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\eta\mu\dfrac{1}{x}$

2.3.22. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-3)\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{1}{x+2}\right)$,

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}\right)\right]$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x} + 3x^2}{5x^2+x}$.

2.3.23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2+1}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x^2}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

2.3.24. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x + e^{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ δ) $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2)$

ε) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(3e^x+1)$

2.3.25. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$,

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-x}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\pi x$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\sqrt{2}} x$,

η) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{1/e} x$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\eta\mu\frac{\pi}{4}} x$, **ι)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\sqrt{x}$,

κ) $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\frac{\pi}{e}} \frac{1}{\sqrt{x}}$, **κα)** $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$.

2.3.26. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5^x - 4^x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} (3^x - 10^x)$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x\right]$, **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x\right]$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{6}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right]$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\left(\frac{2}{7}\right)^x - \left(\frac{3}{8}\right)^x\right]$,

η) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log x - \ln x)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 0} (\log_2 x - \log_3 x)$,

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{2}{3}} x)$, **κ)** $\lim\limits_{x\to 0} (\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{4}} x)$.

2.3.27. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}+3}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^{x+1}+3}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x+1}{\ln^2 x - \ln x + 1}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\ln^2 x}{4-\ln^2 x}$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}+2^x}{e^x+2^{x+3}}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}+2^x}{e^x+2^{x+3}}$,

η) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_\alpha x + 12}{\log_\beta x - 12}$, **θ)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x + \log x}{\ln x - \log x}$.

2.3.28. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+5x-1)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x-x^2+1\right]$,

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]$, **δ)** $\lim\limits_{x\to0}(2x-1+\log x)$,

ε) $\lim\limits_{x\to0}(\log_{\frac{2}{3}}x+5x^2-1)$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log_{\frac{2}{3}}x+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]$,

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2^x+x^{100}-7)$, **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^5+\sqrt{x}-10^x}{\log x-6x^7+4}$,

ι) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-2x^5+e^{-x}-1)$, **κ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x-x^5-5^{-x}+10^x}{3x^2-6x^3+\log(-x)}$.

2.3.29. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2+1}{x-2}}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{2-x^3}{x^2+x}}$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$, **ε)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{2x^3-x}{3x^2+2}}\cdot ημ\frac{1}{x}\right)$.

2.3.30. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1^+}\log(\ln x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\ln x}(\ln x^2)$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2\ln(x-1))$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln(3x)-\ln(x^2+1))$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\ln x-\ln(2x^2-x+1))$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+ημx)-2\ln x)$.

2.3.31. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-e^{x^3})$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x3^{\frac{3}{x}})$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5+e^{\frac{2-x^3}{x^2+1}})$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$, **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3\ln(2x)-x^2)$,

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(2+e^{x+3}))$, **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-\sqrt{x})$.

2.3.32. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{x-1}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{3x}\right)^x$

***

2.3.33. Δίνεται μία συνάρτηση f: R → R για την οποία ισχύει: $(x-1)f(x)+f(1-x)=x^2$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της f, **β)** το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,

γ) το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, **δ)** το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{3}{x}\right)$.

2.3.34. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$ όταν:

α) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+1}{x-2}$, **β)** $f(x)=\sqrt{9x^2-x}-3x$,

γ) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+2}}{x+1}$.

2.3.35. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)$ όταν:

α) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+2}{x+1}$, **β)** $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}+x$, **γ)** $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+3}}{x+1}$.

2.3.36. Έστω f: R → R μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=d\in R$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+2)-2f(x+1)+f(x))=0$.

2.3.37. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3(f(x))^2]$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(f(x))^2-2f(x)}{(f(x))^2+4f(x)+5}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2(f(x))^2-2f(x)+1}}{3f(x)+2}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4(f(x))^2+f(x)-2}-2f(x))$.

2.3.38. α) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}f(x)\right)=\dfrac{4}{5}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

β) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(2f(x)+x-\sqrt{x^2+x+1})=3$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2.3.39. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=-2$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2f(x))$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+f(x)}{x+2f(x)}$.

2.3.40. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x)-5)=2$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+f(x)}{f(x)-x^2}$.

2.3.41. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x-3)=0$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3f(x)-2x^4+4x^3+5)$,

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(x)+3x^3+1}{x^3f(x)-2x^4+4x^3+5}$.

2.3.42. Δίνεται μία περιττή συνάρτηση f: R → R, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((3x-1)f(x)+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=2$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(x))^2+\dfrac{1}{f(x)}}{\sqrt{(f(x))^2+f(x)}}$.

2.3.43. Δίνεται μία άρτια συνάρτηση f: R → R, τέτοια ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει: $\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+1}\le f(x)\le\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2+1}$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)$.

2.3.44. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ και για κάθε $x>\alpha\in R$ ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)>0$, να δείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f(x)+g(x)}=0$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}=0$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)+g^3(x)}{(f(x)+g(x))^2}=0$.

***

2.3.45. α) Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)f(x))=d\in R$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, για τις οποίες το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-x+1}-\alpha^2x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

2.3.46. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$, για τις οποίες:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\alpha x+\beta\right)=1$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}-(\alpha x-\beta)\right)=3$.

2.3.47. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+\alpha x}-\beta x)=2$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x-\beta)=0$,

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+\alpha x-2\beta)=1$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+\beta x+5}-\sqrt{\alpha x^2-7x+4})=502$

2.3.48. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+1}-\alpha x}{\sqrt{x^2+2x+3}+\beta x}=\dfrac{1}{6}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}-(\alpha x+\beta)\right)=0$.

2.3.49. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{9x^2+x}-\alpha x-\beta)=\dfrac{5}{6}$,

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+x}-\alpha x-\beta)=2$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\alpha\sqrt[3]{x}+3\beta)=2$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2++2x+3}+\sqrt{4x^2+4x+5}+\alpha x+\beta)=6$

2.3.50. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$ για τις οποίες:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^4+3x^2+2}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma))=4$,

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^4+3x^2+2}-\alpha x^2+\beta x-\gamma)=\dfrac{11}{4}$.

2.3.51. Να βρείτε τις τιμές του $\nu \in N$ για τις οποίες το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\nu+10}+1}{3x^{2\nu+4}-x^{12}+1}$ είναι πραγματικός μη μηδενικός αριθμός.

2.3.52. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(2\lambda-6)x^3-2\lambda x^2+x-2]$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2+2x+3}{4x+7}$,

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\lambda x^3+2x^2-3}{(\lambda-1)x^2+2}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda(x^2+x)-(2x^2+1)}{\lambda x^2-4x(x+2)+1}$.

2.3.53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^4+(\alpha^2-1)x^3+(\alpha+1)x^2+2}{(\beta+1)x^3+3x+4}$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in R$,

β) τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2.3.54. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές των $\alpha \in R$ και $\nu \in Z^*$, το όριο
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha x^2+x+1)^\nu}{x^{2\nu}+x^\nu+1}$.

2.3.55. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\nu \in N^*$, το
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x^\nu+\beta x^2+\gamma}{3x^5-x+1}$.

2.3.56. **α)** Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$, το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x)$.

β) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \geq 0$, το
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\alpha x^2+4x+3}-2x+1)$.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$, το $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^6+1}+\alpha x^2)$.

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in N^*$, το
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^\kappa+1}-\sqrt{x^\lambda+2})$.

2.3.57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x\eta\mu\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του α,

β) τις τιμές του α για τις οποίες $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2.3.58. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in R$, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\sqrt{4x^2+x+1}+\kappa x+1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\lambda x^2+3x+1}{2x-5}}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\kappa x^2+5x-2}{\lambda x^2-4}}$.

2.3.59. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta > 0$, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^{\frac{x^5+1}{x^2-4x+7}}$,

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^{\frac{x^5+1}{x^2+1}}$,

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x$, $(\alpha, \beta \neq 1)$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha^{x+1}+e^x}{\alpha^x+e^{x+1}}$.

2.3.60. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$ τα όρια:

α) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{\nu}\eta\mu\frac{1}{x}\right)$, **β)** $\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu^{\nu}\frac{1}{2x}\right)$.

***

2.3.61. Σε μία μονάδα καθαρισμού νερού με βιολογικό φίλτρο, ο λόγος των βλαβερών ουσιών που υπάρχουν στο νερό πριν την διαδικασία καθαρισμού προς τις βλαβερές ουσίες που υπάρχουν μετά τον καθαρισμό, δίνεται από την σχέση $\tau(x) = \frac{x+k}{x}$, όπου k μία σταθε-ρά και x ο ρυθμός ροής του νερού μέσα από το φίλτρο. Να βρείτε πόσο αποδοτική είναι η λειτουργία της συγκεκριμένης μονάδας για υψηλό ρυθμό ροής του νερού μέσα από το φίλτρο.

2.3.62. Το κόστος C (σε χιλιάδες δραχμές) ανά μονάδα παραγωγής, για να παραχθούν x μονά-δες ενός προϊόντος, δίνεται από την σχέση $C(x) = \frac{500+5x}{x}$. Να βρείτε το κόστος ανά μονάδα παραγωγής του προϊόντος σε μεγάλη κλίμακα.

2.3.63. Ο πληθυσμός $P(t)$ των ψαριών ενός ποταμού t έτη μετά από τον καθαρισμό του, δίνεται από την συνάρτηση $P(t) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2(t-1)^2+1}{(t-1)^2+1}\cdot P_0$, όπου P_0 ο αρχικός πληθυσμός των ψα-ριών. Να βρείτε και να ερμηνεύσετε τα όρια: $\lim_{t\to1}P(t)$, $\lim_{t\to2}P(t)$, $\lim_{t\to3}P(t)$, $\lim_{t\to+\infty}P(t)$.

2.3.64. Προεκτείνουμε την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου προς το Α και έστω Μ τυχόν σημείο στην προέκταση . Από το Μ φέρνουμε την εφαπτομένη στον κύκλο και έστω Τ το σημείο επαφής . Από το Τ φέρουμε την κάθετο στην ΟΑ και έστω Ν το ίχνος της καθέτου . Αν το Μ κινείται προς το Α να δείξετε ότι $AN \to AM$

2.3.65. Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός Ν (t) των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$N(t) = M(1 - e^{-0,5t})$$

όπου Μ ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Πώς το σκέφτηκε αυτό;

2.3.66. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \dfrac{16x + 36}{2x + 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \dfrac{12}{2x + 3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

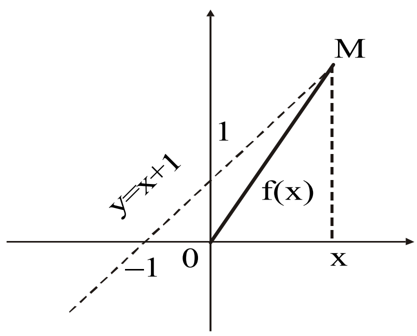
γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

2.3.67.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση y = x + 1 και το σημείο της Μ με τετμημένη x. Η απόσταση από το σημείο Ο δίνεται από τη συνάρτηση f (x) = (ΟΜ) για κάθε $x \in R$.

α) Για ποια τιμή του x ισχύει f (x) = 1;

β) Για ποια τιμή του x η απόσταση γίνεται ελάχιστη;



γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και να εξηγήσετε τα αποτελέσματα γεωμετρικά (στο σχήμα).

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

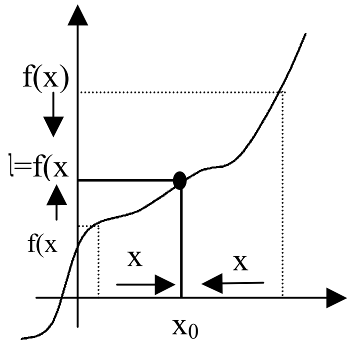
Ανάλυση

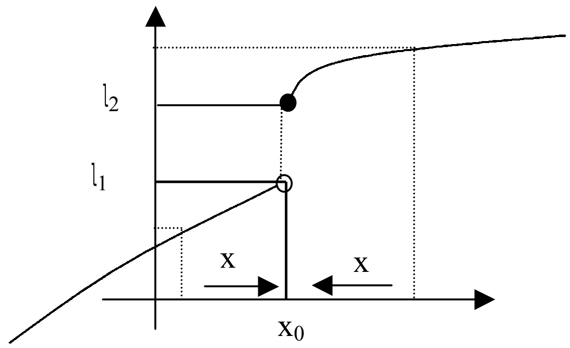
Κεφάλαιο 3ο

Συνέχεια Συνάρτησης

3.1 Συνέχεια Συνάρτησης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ





- Μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0**, του πεδίου ορισμού της αν
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
- Η f θα είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$ αν και μόνο αν
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- ΠΡΟΣΟΧΗ! **Για να μιλήσω για συνέχεια στο x_0 πρέπει το x_0 να είναι σημείο του πεδίου ορισμού της.**

- Για να μην είναι μια συνάρτηση f συνεχής θα πρέπει , είτε
  α) $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, ή
  β) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ δηλαδή να μη υπάρχει το όριο της f στο x_0.
  Τότε λέμε ότι η f είναι **α σ υ ν ε χ ή ς** στο x_0.

- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε λέγεται απλά **συνεχής συνάρτηση** και υπονοούμε στο πεδίο ορισμού της .

- Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς
  Πολυωνυμικές , ρητές , f(x) = ημx , f(x) = συνx , $f(x) = \alpha^x$, $f(x) = \log_\alpha x$

- Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $f-g$, f/g , $|f|$, $\sqrt[\nu]{f}$ είναι συνεχείς στο x_0 , με την προϋπόθεση ότι ορίζονται στο x_0.

- Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $g(x_0)$ τότε και η $g\circ f$, θα είναι συνεχής στο x_0

- Για να εξετάσουμε ή να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση η οποία εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει τύπο είναι συνεχής στο x_0 , εξετάζουμε ή αποδεικνύουμε αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Σε μερικές ασκήσεις δίνεται κάποια σχέση για την συνεχή στο x_0 συνάρτηση f και ζητείται το $f(x_0)$, $x_0 \in A_f$. Τότε λόγω συνέχειας αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

- Από τα όρια είναι χρήσιμο να θυμόμαστε τα εξής

Για μια συνεχή συνάρτηση f είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad [1]$$

όμως

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0), \qquad [2]$$

ακόμη

Αν $\lambda h = x - x_0$ τότε αν $x \to x_0$, $h \to 0$ οπότε η [1] γίνεται

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+\lambda h) = f(x_0) \qquad [3]$$

ακόμη

Αν $h = \dfrac{x}{x_0}$ τότε αν $x \to x_0$, $h \to 1$ οπότε η [1] γίνεται

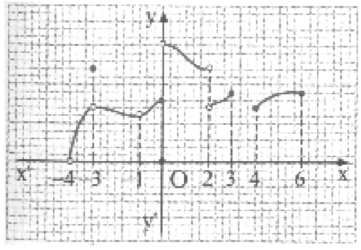
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h\to 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0) \qquad [4]$$

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

3.1.1. Έστω f μία συνάρτηση, της οποίας η γραφική παρά-σταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε:

α) το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι συνε
χής,

β) τα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f είναι συνεχής.



3.1.2. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = 1 - \sqrt{x}$, **β)** $f_2(x) = \dfrac{ημx}{1-\sqrt{x}}$, **γ)** $f_3(x) = 1 + \left|\dfrac{ημx}{1-\sqrt{x}}\right|$,

δ) $f_4(x) = \dfrac{x - ημx}{3x^2+5}$, **ε)** $f_5(x) = \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt{|x-2|}$, **ζ)** $f_6(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{|x^2-9|}$,

η) $f_7(x) = εφx$, **θ)** $f_8(x) = 3x\cdot\ln x - 5|e^x - 1|$, **ι)** $f_9(x) = e^{2x}\cdot\ln x^2$.

3.1.3. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = ημ(3x - 6)$, **β)** $f_2(x) = 5συν(6x^2 - 1) + 3x$,

γ) $f_3(x) = \sqrt{ημ^2 x + 1}$, **δ)** $f_4(x) = ημ(ημx) + e^{x^2+1}$,

ε) $f_5(x) = e^{ημx}\cdot ημ\dfrac{1}{x-1}$, **ζ)** $f_6(x) = \ln(x^2 + x + 1)$,

η) $f_7(x) = \dfrac{e^x}{2συν(x+1)}$, **θ)** $f_8(x) = x^{2x^2+1}$.

***

3.1.4. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και να χαράξετε την γραφική τους παράσταση:

α) $f_1(x) = \begin{cases} 5, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} 3x+2, & x < -1 \\ -x^2, & -1 \leq x < 2 \\ -x+1, & x \geq 2 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2x}, & |x| \geq 1 \end{cases}$.

3.1.5. Αν είναι $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 3, & x \neq 1 \end{cases}$, τότε να εξετάσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $g \circ f$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

3.1.6. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x^3}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} x^3 - 5, & x \leq 2 \\ \dfrac{2 - x}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}, & x > 2 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 6}{\sqrt{x + 1} - 2}, & x > 3 \\ 8, & x = 3 \\ \dfrac{8x - 24}{2x^2 - 11x + 15}, & x < 3 \end{cases}$,

ε) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{|x + 1| + |x - 1| - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, **ζ)** $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 1|}{x + 1}, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$.

3.1.7. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - συνx}{x^2}, & x < 0 \\ \dfrac{συνx}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x - ημx}{x^2}, & x > 0 \\ α, & x = 0 \\ \dfrac{2x + 1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \dfrac{συνx - x^2}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|}, & x \in R \setminus \{-1, 0, 1\} \\ 1, & x = -1 \text{ ή } x = 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

3.1.8. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, **γ)** $f_3(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x^2 - 1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$.

3.1.9. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $2x \le f(x) \le x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο 1,

β) η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{xf(x)}{x-4}$ είναι συνεχής στο 1,

γ) η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1.

3.1.10. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(\alpha), & x < \alpha \\ f(x), & \alpha \le x \le \beta \\ f(\beta), & x > \beta \end{cases}$, είναι συνεχής.

3.1.11. Αν οι συναρτήσεις f, g: $R \to R$ είναι συνεχείς στο x_0 και $\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x < x_0 \\ g(x), & x \ge x_0 \end{cases}$, να αποδείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο σημείο x_0 αν και μόνο αν γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε αυτό το σημείο.

3.1.12. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ με $f(0) = f(1)$. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} f(3x), & 0 \le x < \dfrac{1}{3} \\ f(3x-1), & \dfrac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} f(3x), & 0 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ f(3x-1), & \dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{2}{3} \\ f(3x-2), & \dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

***

3.1.13. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς. **α)** $f_1(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + \alpha x - 2}{x}, & x > 1 \end{cases}$,

β) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$, **γ)** $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha-1)x + \alpha|x|}{x}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$.

3.1.14. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x \le 1 \\ \dfrac{1 - x\sqrt{x}}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x - 4x}{x}, & x \ne 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\eta\mu \frac{x}{2}}, & -\dfrac{\pi}{4} \le x < 0 \\ x^2 + 2x + \alpha^2 - 3, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

3.1.15. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} \alpha^{2x}, & 0 \le x \le 1 \\ \alpha \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 1}, & 1 < x \le \pi \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha^2 x^2)}{\eta\mu^2 x + x^2}, & x < 0 \\ x^5 + (3\alpha - 1)x^2 + 8, & x \ge 0 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu x}}{x - \pi}, & x < \pi \\ \alpha x + 2, & x \ge \pi \end{cases}$.

3.1.16. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x-2}}, & x < 2 \\ x^2 + \alpha x + 2, & x \ge 2 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{3\ln x - 2}{2 - \ln x}, & x > 0,\ x \ne e^2 \\ \alpha, & x \le 0 \end{cases}$.

3.1.17. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \alpha^2}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x}, & x > \alpha \\ x^3 + x, & x \le \alpha \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \eta\mu \dfrac{1}{1 - x}, & x > \alpha \\ (x-1)(x^2 - 2x + 2), & x \le \alpha \end{cases}$.

3.1.18. Έστω μία συνάρτηση $f: R \to R$, τέτοια ώστε $|f(x) - 5| \le (x-2)^4$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-5}{x-2}, & x \ne 2 \\ \alpha^3 - 1, & x = 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

3.1.19. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ $\in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \le 1 \\ 2\alpha x + \beta, & 1 < x \le 2 \\ 2\alpha & x > 2 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \alpha^2 \eta\mu x - \beta, & x < 0 \\ 4\sigma\upsilon\nu x + \beta, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2\alpha\eta\mu x, & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}, & x < 1 \\ 2x + \alpha, & 1 \le x < 2 \\ x^2 - \beta x + 2, & x \ge 2 \end{cases}$.

3.1.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + (\alpha^3+1)x - 2, & x < 1 \\ x^4 - (\alpha^2 + \beta + 1)x^2 - 3\alpha, & x \ge 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β $\in R$, ώστε η f να είναι συνεχής και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Α(2, 3).

3.1.21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 2 \\ 2x, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{4}{9}\alpha x^2 + \beta x, & x \ge 3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β $\in R$, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο 3 και ασυνεχής στο σημείο 2.

3.1.22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \beta x^2 - 2\alpha x + 3, & x < 1 \\ \alpha x^2 + 2\beta x + 1, & x \ge 1 \end{cases}$. Αν α, β $\in R$, να βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου $\alpha \cdot \beta$ ώστε η f να είναι συνεχής.

3.1.23. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

α) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\beta}{x^2+3x+2}, & x \neq -1 \\ \alpha, & x = -1 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}, & x<1 \\ \beta x + 2\alpha - 1, & x \geq 1 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x-6}{x-2}, & x \neq 2 \\ 9, & x = 2 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-\alpha x}{x-2}, & x<2 \\ x^2+\beta x+\alpha, & x \geq 2 \end{cases}$.

3.1.24. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$, για τις οποίες είναι συνεχείς οι συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-\alpha}{|x+1|-1}, & x<0 \\ \gamma, & x=0 \\ \dfrac{\beta(x+2)}{x-1}, & x>0 \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x<1 \\ \gamma, & x=1 \\ \dfrac{x^2-\alpha x+3}{x^2+\beta x-\beta-1}, & x>1 \end{cases}$,

γ) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 7, & x=1 \end{cases}$, **δ)** $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^5+\beta x^2+\gamma}{|x+1|}, & x \neq -1 \\ \gamma+3, & x=-1 \end{cases}$.

***

3.1.25. Αν $f : \Re \to \Re$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Re$ να ισχύει $|f(x)| \leq x$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

3.1.26. Αν $f : \Re \to \Re$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Re$ να ισχύει $|f(x) - 1| \leq \eta\mu x$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

3.1.27. Αν $x\,f(x) \leq \eta\mu x$ για κάθε $x \in \Re$ και η f είναι συνεχής στο 0 να βρεθεί το f(0)

3.1.28. Αν $(x-1)\,f(x) = x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \Re$ και η f είναι συνεχής στο 1 να βρεθεί το f(1)

3.1.29. Αν $x - 2 \leq (x-2)\,f(x) \leq x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \Re$ και η f είναι συνεχής στο 2 να βρεθεί το f(1)

3.1.30. Αν f συνεχής στο $x_0 = 0$ και $| x f(x) – ημ2x | \le x^4$ για κάθε $x \in \Re$ να βρεθεί το f(0)

3.1.31. Αν f συνεχής στο 0 και έχει την ιδιότητα

$$| x f(x) -ημx | \le x^4 \; ημ^2(\frac{1}{x}) \forall x \in \Re^* .$$ Να βρεθεί το f(0)

3.1.32. Αν $f : \Re \to \Re$ και υπάρχει $\theta \in (0,1)$ με $| f(x) - f(y)| \le \theta | x-y | \quad \forall x , y \in \Re$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

3.1.33. Έστω f ορισμένη στο $\Re$ τέτοια ώστε $| f(x) - f(y)| \le ½ | x-y |^3$ για κάθε $x , y \in \Re$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\Re$

3.1.34. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $g(x) = f(x)\cdot συνx + |x|$ είναι συνεχής στο 0, τότε και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0,

3.1.35. **α)** Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο R και συνεχής σε αυτό. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $(x – 2)f(x) = x^2 – 5x + 6$, να βρείτε το f(2).

β) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x\cdot f(x) + 1 = (1 + x)^ν$, για κάθε $x \in R^*$. Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0, τότε βρείτε την τιμή της για x = 0.

γ) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x\cdot σφx$, για $x \neq 0$. Αν η f είναι ορισμένη και συ-νεχής στο 0, τότε βρείτε το f(0).

3.1.36. Δίνεται μία συνάρτηση $f: [–1, +\infty) \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x \ge –1$ να ισχύει $x\cdot f(x) = \sqrt{x+1} – συνx$. Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε τον τύπο της.

3.1.37. **α)** Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x)| \le x^2 – 6x + 9$ για κάθε $x \neq 3$. Αν η f είναι συνεχής στο 3, τότε να βρείτε το f(3).

β) Δίνεται μία συνάρτηση f τέτοια ώστε $3x – x^2 – 2 \le (x – 1)f(x) \le x^2 – x$, για κάθε $x \in R$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, τότε να βρείτε το f(1).

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $(x – 4)\cdot f(x) \ge 16 – x^2$ για κάθε $x \in R$, τότε να βρείτε το f(4).

3.1.38. **α)** Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $|x\cdot f(x)| \le |x – ημx|$ για κάθε $x \in R$ και η f είναι συνεχής στο 0, τότε να βρείτε το f(0).

β) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $\frac{2x^2 - ημ^2 x}{x^2 + x^4} \le f(x) \le 1 + \frac{\sqrt{x^4+4} - 2}{x^2}$ για κάθε $x \in R^*$ και η f είναι συνεχής στο 0, τότε να βρείτε το f(0).

3.1.39. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει $|(x-2)\cdot f(x)| \le |ημπx - π(x-2)|$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(2, 0).

3.1.40. Έστω μία συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to R$, συνεχής στο $x_0 = 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ να ισχύει $|f(x) - x| \le xe^{-\frac{1}{x^2}}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

3.1.41. **α)** Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $5 \le f(x) \le x^2 - 6x + 14$, για κάθε $x \in R$, να αποδεί-ξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$.

β) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $|f(x) + 5x| \le (x+2)^4$, για κάθε $x \in R$, να αποδεί-ξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -2$.

3.1.42. Έστω $f, g: R \to R$ δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει η σχέση: $|f(x) - συνx| \le |g(x)|$. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3.1.43. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $|f(x)| + |g(x)| \le |x|$, για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο 0.

***

3.1.44. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x = α και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(α+h)}{h} = 1$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to α}\frac{f(x) - f(α)}{x - α} = 1$.

3.1.45. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x = 3 και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{h} = 5$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to α}\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

3.1.46. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x = 2 και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 2004$, να βρείτε

το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+2)}{h}$

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

3.1.47. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \neq \frac{1}{\nu} \text{ με } \nu \in N^* \\ x, & x = \frac{1}{\nu} \text{ με } \nu \in N^* \end{cases}$, **β)** $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{\kappa} \text{ με } \kappa \in Z^* \\ 1, & x = \frac{1}{\kappa} \text{ με } \kappa \in Z^* \end{cases}$.

3.1.48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \notin N \\ 0, & x \in N \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο 0, **β)** η f είναι ασυνεχής στο N^*,

γ) η f είναι συνεχής στο $R \setminus N^*$.

3.1.49. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = \max\{7 - 3x,\ 5x + 11\}$,

β) $f_2(x) = \min\{x,\ 2 - x,\ 3x - 5\}$,

γ) $f_3(x) = \max\{\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x\}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

δ) $f_4(x) = \min\{\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x,\ |\eta\mu x|\}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.1.50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \min\{1, x, x^2, x^3\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3.1.51. Δίνεται η συνάρτηση $f(\alpha) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^{3x+1} + 2\alpha^x + 1}{\alpha^{3x} + 2}$, $\alpha > 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια.

γ) Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

3.1.52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{x^2e^{tx} + x}{1 + e^{tx}}$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια.

γ) Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

3.1.53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{\kappa(x+3)e^{tx} + |x-1|e^{-tx}}{e^{tx} + 2e^{-tx}}$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής.

3.1.54. Αν η συνάρτηση $h(x) = f(x)\cdot\text{συν}x - (1 + \text{ημ}^2 x)g(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, ενώ η συνάρτηση g είναι ασυνεχής στο x_0, τότε και η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο x_0.

3.1.55. Δίνονται δύο συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και σημείο $x_0 \in \Delta$. Να δείξετε ότι:

α) αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε και η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0,

β) αν οι συναρτήσεις $f + g$ και $f - g$ είναι συνεχείς στο x_0, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι επίσης συνεχείς στο x_0,

γ) αν οι συναρτήσεις $h(x) = 3f(x) - g(x)$ και $v(x) = f(x) + 2g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα Δ, τότε και οι συναρτήσεις $f + g$ και $f\cdot g$ είναι συνεχείς στο Δ.

3.1.56. Να αποδείξετε ότι:

α) αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2, τότε και η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \text{ημ}(f(x))$ είναι συνεχής στο 2,

β) αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, τότε η συνάρτηση $g(x) = x^2 + f(\text{συν}x)$ είναι συνεχής στο 0.

3.1.57. Αν $\alpha < x_0 < \beta$ και για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ είναι $f(x) = g(x)$ και $f(x_0) \neq g(x_0)$, να δείξετε ότι δεν είναι δυνατόν να είναι συνεχείς στο x_0 και οι δύο συναρτήσεις f και g.

***

3.1.58. α) Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5x}{x^2-4} = 3$, να βρείτε την τιμή της f για $x = 2$.

β) Δίνεται μία συνάρτηση $f\colon R \to R$, τέτοια ώστε η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)ημx + 1 - συν4x}{\sqrt{4+x^2}-2} = 4$, να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για $x = 0$.

3.1.59. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1} = \dfrac{11}{4}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, **β)** να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

3.1.60. α) Δίνεται μία περιττή συνάρτηση $f\colon R \to R$, συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1} = 10$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h} = 4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

3.1.61. Δίνονται δύο συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς σε κάποιο ανοικτό διάστημα $Δ$ και σημείο x_0 του $Δ$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0}\left[(f(x))^ν - (g(x))^ν\right] = 0$, με $ν \in N^*$, να βρείτε τα $f(x_0)$ και $g(x_0)$.

***

3.1.62. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = d \in R$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

3.1.63. Αν $f\colon (-α, α) \to R$ και ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = d$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = m$, όπου $d, m \in R$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

3.1.64. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο R, για την οποία ισχύουν

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3-\text{εφ}x}{x^2-x}=5$ και $f(0)=3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2f(x)-3|-3}{x}$.

3.1.65. **α)** Μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και ισχύει $(x-2)^4 f(x)+3x-1=0$, για κάθε $x\neq 2$. Να εξετάσετε αν αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

β) Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)(3x^2-48)}{3\sqrt{x}-6}=-\infty$. Να εξετάσετε αυτή την συνάρτηση ως προς την συνέχεια στο σημείο $x_0=4$.

3.1.66. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, είναι συνεχής στο 5 και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $(x^2-5x)f(x)=x^2-25$. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο Α(5, 2),

β) η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 0.

3.1.67. Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g: R → R, για τις οποίες ισχύει, για κάθε $x\in$ R, η σχέση: $(f(x))^2+(g(x))^2=x^4-2x^2+1$. Να δείξετε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=-1$.

3.1.68. Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, για τις οποίες ισχύει, για κάθε $x\in$ R, η σχέση: $(f(x))^2+(g(x))^2-2(f(x)+g(x))+2=\text{συν}^2x$. Να δείξετε ότι και οι δύο συναρ-τήσεις είναι συνεχείς στο σημείο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

3.1.69. Έστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο R για τις οποίες ισχύει, για κάθε $x\in$ R, $(f(x))^2+(g(x))^2+1=2(f(x)\cdot\text{ημ}x+g(x)\cdot\text{συν}x)$. Να αποδείξετε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στο R.

***

3.1.70. **α)** Δίνεται μία συνάρτηση f: R → R συνεχής στο σημείο x_0. Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια ή περιττή, τότε θα είναι συνεχής και στο σημείο $-x_0$.

3.1.71. Έστω μία συνάρτηση f: R → R, τέτοια ώστε για κάθε $x, y\in$ R να ισχύει:

$f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το R, αν είναι συνεχής: **α)** στο σημείο 0, **β)** σε ένα σημείο $\alpha \in R$.

3.1.72. Έστω μία συνάρτηση $f: R \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in R$ να ισχύει: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το R, αν είναι συνεχής: **α)** στο σημείο 0, **β)** σε ένα σημείο $\alpha \in R$.

3.1.73. Έστω μία συνάρτηση $f: R \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in R$ να ισχύει: $f(x - y) = f(x) - f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το R, αν είναι συνεχής: **α)** στο σημείο 0, **β)** σε ένα σημείο $\alpha \in R$.

3.1.74. Έστω μία συνάρτηση $f: R^* \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in R^*$ να ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το R^*, αν είναι συνεχής: **α)** στο σημείο 1, **β)** σε ένα σημείο $\alpha \in R^*$.

3.1.75. Έστω μία συνάρτηση $f: R^* \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in R^*$ να ισχύει: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Να αποδείξετε ότι η f θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το R^*, αν είναι συνεχής: **α)** στο σημείο 1,**β)** σε ένα σημείο $\alpha \in R^*$.

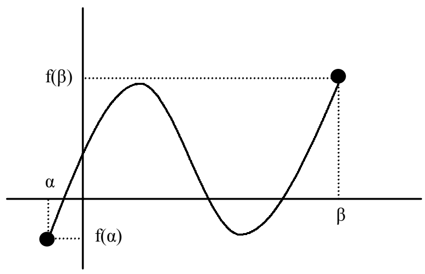
3.2 Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων

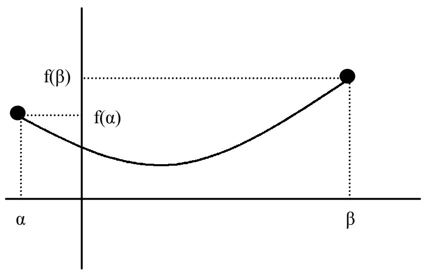
1. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Διατύπωση

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α,β] . Άν ισχύει ότι f(α) f(β) <0 (Δηλαδή τα f(α) f(β) είναι ετερόσημα) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα (μπορεί να υπάρχουν και περισσότερα) $\xi \in (\alpha,\beta)$ για το οποίο είναι f(ξ)=0 . (Δηλαδή το ξ είναι ρίζα της εξίσωσης
f(χ) = 0)

Γεωμετρική Ερμηνεία





Παρατηρήσεις

1. Θυμηθείτε : $\left.\begin{array}{r} f \quad \text{συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ f(\alpha)\, f(\beta) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ τουλάχιστο ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τω $f(\xi) = 0$
2. Το υπάρχων ξ εφόσον τηρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος ανήκει στο (α,β) .Άρα δεν γίνεται ξ=α ή ξ=β αφού τότε σε οποιαδήποτε περίπτωση θα ήταν $f(\beta)\cdot f(\alpha) = 0$.

3. Προσοχή όμως άν $f(\alpha)\, f(\beta) \le 0$ τότε μπορεί να είναι
   $f(\alpha)\cdot f(\beta) = 0$ άρα ξ = α ή ξ=β (Δηλαδή η ζητούμενη ρίζα να είναι η α ή η β) .
   ή
   $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ άρα $\xi \in (\alpha, \beta)$
   Άρα σε αυτήν την περίπτωση θα είναι $\xi \in [\alpha,\beta]$.

4. Άν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\, f(\beta) > 0$ τότε η $f(x) = 0$ δέν είναι αναγκαίο ότι δεν έχει ρίζα στο (α,β) (σχήμα 2)

5. Το αντίστροφο του Θ. Bolzano «έν γένει » δέν ισχύει . Δηλαδή άν η f είναι συνεχής στο [α,β] και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω. $f(\xi) = 0$ αυτό δεν σημαίνει ότι f(α) f(β) <0 . Για παράδειγμα η εξίσωση

$ημ^2 x = 0 \quad χ \in [-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$ όπου $f(0) = 0$, $0 \in (-\frac{π}{2}, \frac{π}{2})$ αλλά $f(-\frac{π}{2})\, f(\frac{π}{2}) = 1 > 0$

6. Το Θ . Bolzano εφόσον τηρούνται οι προϋποθέσεις του μας εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας σ ε κάποιο διάστημα αλλά δεν μας λέει ούτε <u>ποια</u> είναι αυτή η ρίζα ούτε και <u>πώς</u> θα τη βρούμε!!!

7. Όταν σε μια άσκηση ζητείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός $ξ \in (α,β)$ ώστε να ισχύει μια σχέση τότε κατ΄αρχάς χρησιμοποιούμε το Θ . Bolzano βρίσκοντας μια βοηθητική συνάρτηση που να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος στο $[α,β]$. Την βοηθητική αυτή συνάρτηση τη βρίσκουμε ως εξής :

α) Αλλάζουμε το ξ (ή x_0) στη δοσμένη σχέση και στη θέση του βάζουμε το x . Φέρνουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος το οποίο και το θέτουμε ίσο με f(x) . Στην f (x) εξετάζω άν εφαρμόζεται το Θ . Bolzano κτλ

β) Προσοχή στην περίπτωση που η f δεν ορίζεται σε κάποιο από τα άκρα α, β , οπότε διώχνω τους ανεπιθύμητους όρους πολλαπλασιάζοντας την αρχική εξίσωση με τέτοιο όρο ώστε να φύγουν (απαλοιφή παρονομαστών) .

8. Άν ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων από ένα σημείων - έστω **ν**- που είναι ρίζες μια εξίσωσης - ή ικανοποιούν μια δοσμένη σχέση - τότε εφαρμόζω ν φορές το Θ Bolzano , σε ν διαστήματα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία .

9. Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει επίσης ότι :

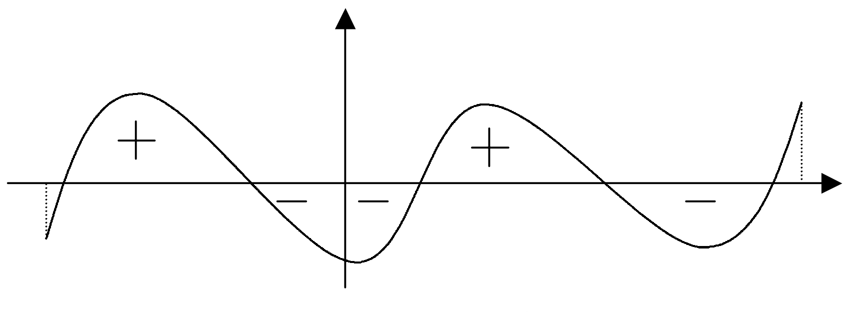
α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό τότε η f ή είναι θετική για κάθε $x \in Δ$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in Δ$. Με άλλα λόγια η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ

β) Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της . Έτσι το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f βρίσκεται ως εξής

❶ Βρίσκουμε τις ρίζες της f αν υπάρχουν

❷ Κατασκευάζουμε πίνακα με τις ρίζες της f

❸ Βάζουμε ως πρόσημο σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του πεδίου ορισμού το πρόσημο της f σε ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του υποδιαστήματος αυτού



10. Αν ζητείται ύπαρξη μοναδικής ρίζας τοτε δείχνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια με Bolzano και την μοναδικότητα την δείχνουμε συνήθως με την μονοτονία της f στο διάστημα αυτό.

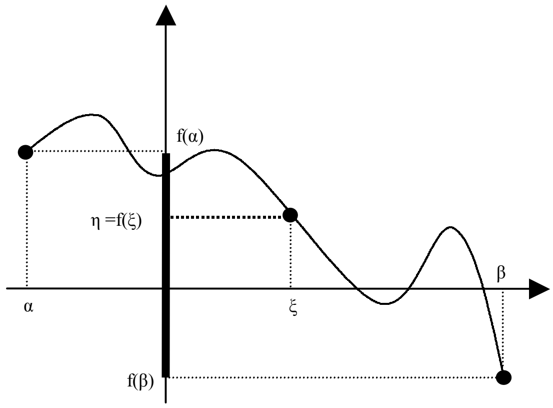
11. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\Re$

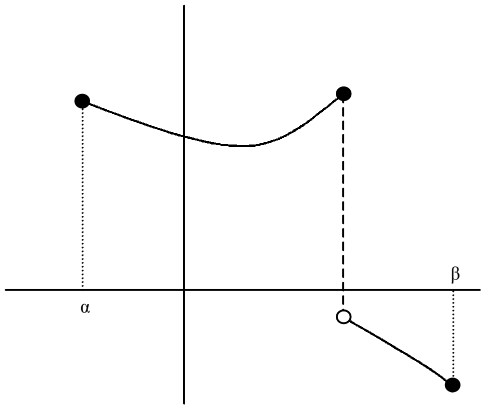
2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Ε.Τ.)

Διατύπωση

Έστω f συν άρτηση συνεχής στο [α,β] .Άν ισχύει ότι $f(α) \neq f(β)$ τότε για κάθε $κ \in (f(α), f(β))$ υπάρχει τουλάχιστον ένα *(μπορεί να υπάρχουν και περισσότερα)* $ξ \in (α,β)$ για το οποίο είναι $f(ξ)=k$. *(Δηλαδή η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των f,(α),f (β))*

Γεωμετρική Ερμηνεία





Παρατηρήσεις

1. Το ΘΕΤ προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Bolzano για την εξίσωση $f(x) = k$

2. Θυμηθείτε : $\left.\begin{aligned} f \ \ συνεχής\ στο\ [α,β] \\ f(α) \neq f(β) \\ κ \in (f(α), f(β)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists$ τουλ. ένα $ξ \in (α,β)$ τω $f(ξ) = k$

3. Σύμφωνα με το ΘΕΤ κάθε ευθεία $y = k$ με $κ \in (f(a), f(b))$ ή $κ \in (f(b), f(a))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο .

4. Άμεση συνέπεια του ΘΕΤ είναι ότι η εικόνα ενός διαστήματος Δ (δηλαδή το f(Δ)) μέσω μιάς μιας συνεχούς και μή σταθερής συνάρτησης f είναι επίσης διάστημα . Στην περίπτωση που η f είναι σταθερή τότε το f(Δ) είναι μονοσύνολο (προφανώς)
   Έτσι

Άν $f\ [a,b] \to \Re$ γνησίως άυξουσα και συνεχής συνάρτηση τότε έχει σύνολο τιμών το $[\,f(\alpha), f(\beta)]$

ενώ

Άν $f\ [a,b] \to \Re$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση τότε έχει σύνολο τιμών το $[\,f(\beta), f(\alpha)]$

ενώ

Άν $f\ (a,b) \to \Re$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση τότε έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \to b^-} f(x),\ \lim_{x \to a^+} f(x)\right)$$

ενώ

Άν $f\ (a,b) \to \Re$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση τότε έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \to a^+} f(x),\ \lim_{x \to b^-} f(x)\right)$$

5. Ακόμη αν $f : \Delta \to \Re$ και $f(\Delta) = (\alpha,\beta)$ με $0 \in (\alpha,\beta)$ τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

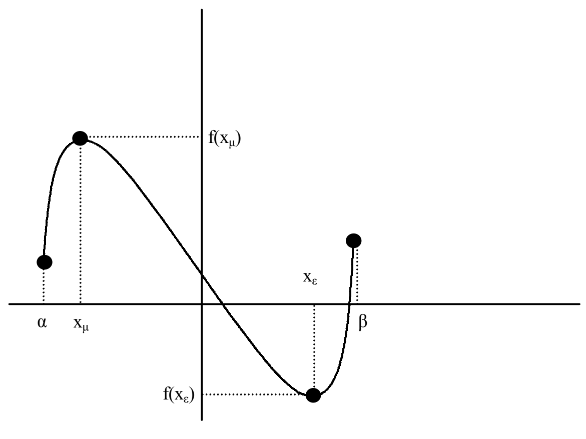
6. Τέλος αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο διάστημα Δ τότε προφανώς υπάρχει η f^{-1} η οποία μάλιστα είναι και συνεχής στο διάστημα $f(\Delta)$

3. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Ε.Τ.)

Διατύπωση

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Τότε υπάρχουν $\chi_\varepsilon, \chi_\mu \in [\alpha, \beta]$ για τα οποία ισχύει $f(\chi_\varepsilon) \le f(x) \le f(\chi_\mu)$ για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ *(Δηλαδή η f παίρνει στο [α,β] μεγίστη και ελάχιστη τιμή*

Γεωμετρική Ερμηνεία



Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

3.2.1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^7 + 8x - 7 = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,1)

3.2.2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - x^3 + 5x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,2)

3.2.3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2, x \le 1 \\ \ln x - 2, x > 1 \end{cases}$ ικανοποιεί τις προϋπόθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στα (0,e) , (e, e^3) , (-1,1)

3.2.4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x \quad +1, x \le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x} - 2, x > 0 \end{cases}$ ικανοποιεί τις προϋπόθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο (0 , π).

3.2.5. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, τέμνουν τον άξονα xx΄ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

α) $f_1(x) = x^4 - 5x + 3$, **β)** $f_2(x) = x^8 - 16x - 5$.

3.2.6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ημ(συν3x) = 0, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,π)

3.2.7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x = συνx έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

3.2.8. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) = x και g (x) = συν2x τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του $(0, \frac{\pi}{4})$.

3.2.9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 2\eta\mu^3 x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

3.2.10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (-π ,0) και (0, π)

3.2.11. Να αποδείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = εφx + x - 1$, τέμνει τον άξονα xx΄ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$,

β) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = συνx$ και $g(x) = 3 - 2x$, τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.2.12. Δίνεται η συνεχής $f : [\,0,1\,] \to (0,1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,1)

3.2.13. α) Δίνεται η συνεχής στο [1 ,2] συνάρτηση f με $1 \le f(x) \le 3$ για κάθε $x \in [1,2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x-1$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο [1,2]

β) Έστω f συνεχής στο [-2,1] και ισχύει $-2 \le f(x) \le -1$. να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 στο [-2,1] τέτοιο ώστε $f(x_0)\, x_0 = 2$

γ) Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f : [-α,α] \to [-α,α]$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο της C_f που ανήκει στη ευθεία $y = x$. Σε ποιο διάστημα ανήκει αυτό το σημείο ;

3.2.14. Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση $(x + 1)\, 2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (- 1, 0)

β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει <u>δύο</u> τουλάχιστον ρίζες στο (- 1, 1).

3.2.15. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $\frac{1+ημx}{x} + \frac{1+x^{10}}{6x-\pi} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$,

β) η εξίσωση $\frac{x^{10}+1}{x+1} + \frac{x^{20}+2}{x-1} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$,

γ) η εξίσωση $\frac{εφx}{6x-\pi} + \frac{σφx}{4x-\pi} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

3.2.16. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = εφx -$

$\dfrac{x-1}{x-2x^2}$, τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.2.17. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^3 - 5x + 3 = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$,

β) η εξίσωση $e^x = -x^3 + 5$, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

3.2.18. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi^4 = 11 - 2\xi$,

β) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + x$ και $g(x) = 11 - x$, έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

3.2.19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μόνο μια ρίζα στο $[1, e^2]$

3.2.20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+x+1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μόνο μια ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $[½,1]$, $[½, ¾]$

3.2.21. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $\eta\mu x + x^2 = 2$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

β) η συνάρτηση $f(x) = x\cdot 2^x - 1$, τέμνει τον άξονα xx' σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$,

γ) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{2x^3 - 1}$ και $g(x) = \dfrac{5}{x}$, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Μ με τετμημένη $x_M \in [1, 2]$.

***

3.2.22. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^3 + 2x^2 = \alpha x + 2$, έχει για κάθε $\alpha \neq 1$, τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$,

β) η εξίσωση $\alpha^2x^4 + \beta^2x = \beta^2$, έχει για κάθε $\alpha, \beta \in R$, μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

3.2.23. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x + συνα = συνx + \pi$, έχει για κάθε $\alpha \in R$, μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

β) αν $f(x) = x^3 + συν\pi x + 2$, τότε για κάθε $\alpha \in [2, 3]$ υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \alpha$.

3.2.24. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^5 + 5x = \kappa$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$, για κάθε $\kappa \in [0, 6]$

β) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ και $g(x) = 1 + \alpha$, τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $[0, 2]$, για κάθε $\alpha \in [-1, 15]$.

3.2.25. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^3 + \kappa x^2 + \lambda = 0$, όπου $\lambda > 0$ και $\kappa + \lambda < -1$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$,

β) η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 + \beta = 0$, όπου $\beta > 0$ και $\beta + 8 < 4\alpha$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-2, 2)$.

3.2.26. α) Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ασυνx + \beta = x$ έχει τουλάχιστον μία θετική πραγματική ρίζα, η οποία δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + \beta$.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)(x - \alpha) + (2 - ημx)(x - \beta)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' σε ένα τουλάχιστον σημείο.

3.2.27. α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) + 4(x - \beta)(x - \gamma) + 9(x - \alpha)(x - \gamma)$. Εάν $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{συνα}{x+1} + \frac{συνβ}{x} + \frac{συνγ}{x-1} = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

3.2.28. **α)** Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{42}{x-5} + \frac{35}{x-6} + \frac{30}{x-7} = 0$, δεν έχει ακέραια ρίζα.

3.2.29. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi} = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0.\frac{\pi}{2})$

3.2.30. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{\xi^2+1}{\xi-\alpha} + \frac{\xi^6+1}{\xi-\beta} = 0$

3.2.31. Άν α , β , $\gamma \in (0,\pi)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu\alpha}{\chi-1} + \frac{2\eta\mu\beta}{\chi-2} + \frac{3\eta\mu\gamma}{\chi-3} = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο (1,3)

3.2.32. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (-1, 1).

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

***

3.2.33. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = a\,\eta\mu x + b$ $a,b > 0$ έχει τουλάχιστο μια θετική ρίζα που δέν είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό a+b

3.2.34. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \eta\mu x + \alpha$, $\alpha > 0$ έχει τουλάχιστο μια θετική ρίζα που δέν είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό α+1

3.2.49. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α η εξίσωση $(2\alpha^4+7)x^6 - \alpha^2 x^5 + (\alpha-1)x^3 - \alpha x = 3$, έχει μια τουλάχιστο θετική ρίζα μικρότερη του 1 .

***

3.2.35. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς στο [α,β] ,. Αν f(α) > g (α) και f (β) < g (β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε f(ξ) = g (ξ)

3.2.36. Αν f συνεχής στο [α,β] με f(α) =α , f(β) =β να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (α,β) με $x_0 + f(x_0) = \alpha + \beta$

3.2.37. Αν f, g συνεχείς στο [0,1] με f(0) = g (1) , f(1) = g(0) , $g(0) \neq g(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε f(ξ) = g(ξ)

3.2.38. Δίνονται f ,g [0,1] -> [0,1] και συνεχείς με g(0)= 0 , g(1) =1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$

3.2.39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : [a,b] -> [α,β] με αβ>0 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a,b]$ με γ f(γ)= αβ

3.2.40. Αν f συνεχής στο [0,1] με $0 \le f(x) \le 1$, f(β) =β να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 στο [0,1] με $f(x_0) + f^2(x_0) = x_0^2 + x_0$

3.2.41. Έστω $f : [-2,2] \to [-2,2]$ που είναι συνεχής . να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [-2,2]$ τέτοιο ώστε f(ξ) = ξ

3.2.42. Έστω $f : [-\alpha,\alpha] \to [-\alpha,\alpha]$ που είναι συνεχής . να αποδείξετε ότι υπάρχει $\beta \in [-\alpha,\alpha]$ τέτοιο ώστε f(β) + β = 0

3.2.43. Έστω f,g συνεχείς στο $\Re$. Αν α , β πραγματικοί αριθμοί με α<β και f(α)+f(β) = g (α)+g (β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = g(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α, β]

3.2.44. Δίνονται f ,g [α,β] -> [α,β] και συνεχείς με g(α)= α , g(β) =β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$

3.2.45. Έστω f που είναι συνεχής στο [α,β] και $\gamma+\delta \geq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε f(γ)= γ f (α) + δ f (β)

3.2.46. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα [α, β] και f(α) > g(α), f(β) < g(β), να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο οι f και g λαμβάνουν την ίδια τιμή.

3.2.47. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g.

3.2.48. Δίνεται μία συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε να ισχύει $\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta) = 0$, όπου $\kappa\cdot\lambda > 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' τουλάχιστον σε ένα σημείο.

3.2.49. Αν για την συνάρτηση f ισχύει

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \ , \ \beta^2 < 3\gamma$$

να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στι διάστημα $(0,1)$

3.2.50. **α)** Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, για την οποία ισχύει $f(1) < 1$ και $f(2) > 4$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x - 2$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

β) Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$. Αν το σύνολο τι-μών της f είναι το διάστημα $(1, 3)$, τότε να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει, σε ένα τουλάχιστον σημείο, την υπερβολή $y = \frac{3}{x}$.

γ) Έστω $f: [0, 1] \to (0, 1)$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η γραφική παρά-σταση της f τέμνει την παραβολή $y = x^2$.

***

3.2.51. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,b]$

3.2.52. **α)** Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 10]$, με μοναδικές ρίζες στο διάστημα αυτό τους αριθμούς 3 και 7. Αν υπάρχει $x_0 \in (3, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < 0$, τότε να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (3, 7)$.

β) Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$, με $f(\alpha)f(\beta) > 0$. Αν υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x)f(\alpha) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

3.2.53. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = ημx + συνx, \quad x \in [-π, π]$, **β)** $f_2(x) = ημ2x - ημx, \quad x \in [0, 2π]$,
γ) $f_3(x) = ημ2x - \sqrt{2}\, συνx, \quad x \in [0, π]$,
δ) $f_4(x) = ημ2x + \sqrt{2}\, συνx, \quad x \in [π, 2π]$.

3.2.54. **α)** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $Δ = (-2, 2)$, για την οποία ισχύει $x^2 + (f(x))^2 = 4$ για κάθε $x \in Δ$. Αν $f(0) = 2$, να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ και να βρείτε τον τύπο της.
β) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $Δ = (0, 5)$, για την ο-ποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 5x$ για κάθε $x \in Δ$. Αν $f(1) = 2$, να δείξετε ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο Δ και να βρείτε τον τύπο της.

3.2.55. Έστω f συνεχής με $χ\in [-2,2]$ και $2x^2 + 3\,[\,f(χ)\,]^2 - 8 = 0$.Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο (-2,2)

3.2.56. Έστω f συνεχής με $χ\in [-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}]$ και $ημ^2x + [\,f(χ)\,]^3 = 1$.Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2})$

***

3.2.57. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Πεδίο Ορισμού	Μονοτονία	Σύνολο τιμών
[1,2)	↑	
(3 , +∞)	↓	
(-2 , +∞)	↑	
[5, +∞)	↓	
(-∞ , 4]	↑	
[-1,7]	↓	
[5, 8]	↑	
(2, 7]	↓	
(-∞ ,+∞)	↓	
(-∞,3)	↑	

3.2.58. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = e^x + \ln x$, $x \in [1, 2]$, **β)** $f_2(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x \in (0, 1)$,

γ) $f_3(x) = -ημx + σφx$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,**δ)** $f_4(x) = εφx + ημx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

ε) $f_5(x) = εφ\left(\frac{\pi}{4}ημx\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **στ)** $f_5(x) = e^x + \ln x$,.

3.2.59. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = \frac{1}{|x+1|}$, $x \in (0, 2]$, **β)** $f_2(x) = \frac{6}{x} - 8x + 2$, $x \in (0, 3]$,

γ) $f_3(x) = x^2 - 4x$, $x \in [0, 2)$, **δ)** $f_4(x) = x + \frac{9}{x}$, $x \in [1, 3)$,

3.2.60. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $x \in [-1,1]$ β) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$, $x \in [-3,3]$

γ) $f(x) = ημx + εφx$, $x \in [0. \pi/4]$ δ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1,3]$

ε) $f(x) = 2x^2 - 4x$, $x \in [1,3]$

3.2.61. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $φ(x) = 2 - |x-3|$, $x \in [1,4]$ β) $φ(x) = x^2 - 6x$, $x \in [3,4]$

γ) $φ(x) = συν(\frac{\pi}{2}ημx)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ δ) $φ(x) = χ + \frac{4}{χ}$, $x \in [1,2]$

3.2.62. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μόνο μία πραγματική ρίζα:

α) $x^3 + 3x + 1 = 0$, **β)** $e^{-x} = x + 1999$. γ) $f(x) = x^5 + x + 1$

δ) $f(x) = \ln x + 2004$

3.2.63. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ell nx + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0, 1).

***

3.2.64. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ημ^2πx + συν3πx + 3$, με $x \in [-2, 1]$, παίρνει την τιμή 4.

3.2.65. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$.

β) Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο διάστημα $(1, \frac{3}{2})$, ενώ ο $\sqrt{3}$ στο $(\frac{3}{2}, 2)$.

3.2.66. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε 2 ημξ -3συνξ $= -5/2$

3.2.67. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

3.2.68. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό με $f(0) = 2$ και $f(1) = 5$ να δείξετε ότι

α) η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση τη f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

β) υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0,1)$ με $f(\alpha) = \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$

3.2.69. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και $x_1, x_2 \in [0,3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in [0,3]$ με $f(x_1) + 2f(x_2) = 3f(x_0)$

3.2.70. Αν η f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [2,5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in [2,5]$ με $f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 6f(x_0)$

Ασκήσεις Β΄Ομάδας

3.2.71. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to [-\pi,\pi]$ που είναι συνεχής . να αποδείξετε ότι ότι υπάρχει $\xi \in [-\pi,\pi]$ τέτοιο ώστε f(ημξ)+f(συνξ)+2ξ = 0

3.2.72. α) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to R$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και κ, λ θετικοί πραγ-ματικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

β) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to R$ μία συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha < \kappa < \lambda < \beta$ και μ, ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$

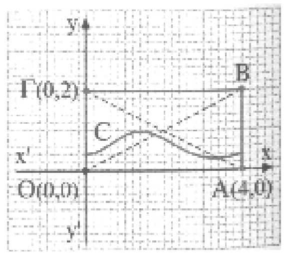
τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{\mu f(\kappa) + \nu f(\lambda)}{\mu + \nu}$.

3.2.73. Δίνονται δύο συναρτήσεις f και g, ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [0, 1], τέτοιες ώστε $f(0) = 0$, $g(1) = 1$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν $0 < \kappa < \lambda$, τότε να από-δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\begin{vmatrix} f(\xi) & \kappa \\ g(\xi) & \kappa \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \xi \\ \lambda & f(\xi) \end{vmatrix}$.

3.2.74. α) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0, 2]. Αν $f(0), f(2) \in (0, 2)$, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $2x + f^2(x) = 2f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 2).

β) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0, 1]. Αν $f([0, 1]) \subseteq (0, 1)$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f^2(x_0) + f(x_0) = x_0^2 + x_0$.

3.2.75. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = [0, 4]$, της οποίας η γραφική παράσταση C περιορίζεται μέσα στο ορθο-γώνιο ΟΑΒΓ που φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος. Να αποδείξετε ότι η C έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με κα-θεμία από τις διαγώνιες ΟΒ και ΑΓ του ορθογωνίου.



3.2.76. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής και αντιστρέψιμη στο διάστημα [α, β]. Αν $f(\alpha), f(\beta) \in (\alpha, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f, το οποίο βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.

3.2.77. Έστω δύο συναρτήσεις f και g, ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [α, β], τέτοιες ώστε $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, τότε να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο.

3.2.78. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β], τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Να από-δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

3.2.79. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0, 2\alpha]$, όπου $\alpha > 0$, τέτοια ώστε $f(0) = f(2\alpha) \neq f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \alpha)$,

β) υπάρχουν $t_0, z_0 \in (0, 2\alpha)$ με $|z_0 - t_0| = \alpha$, τέτοια ώστε $f(t_0) = f(z_0)$.

3.2.80. Έστω $f: [0, 1] \to [0, 1]$ μία συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τέτοιο ώστε $f(\sigma\upsilon\nu x_0) = \sigma\upsilon\nu x_0$.

3.2.81. Έστω δύο συναρτήσεις f, g, ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τέτοιες ώστε $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $2f(\xi) = g(f(\xi)) + g(\xi)$.

3.2.82. Έστω δύο συναρτήσεις f, g, ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$, τέτοιες ώστε $f([0, 1]) = g([0, 1]) = [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(f(\xi)) + g(g(\xi)) = 2\xi$.

3.2.83. Έστω δύο συναρτήσεις f, g, ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, τέτοιες ώστε η f να είναι περιττή και η g γνησίως φθίνουσα με $g(\alpha) = -\alpha$ και $g(-\alpha) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$, τέτοιο ώστε $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.

3.2.84. Αν για την συνάρτηση $f: [0, 1] \to R$ ισχύουν $f([0, 1]) = [0, 1]$ και $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

3.2.85. Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ $f(x) \neq 0$ Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ καί ότι εάν $0<\alpha<\beta$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\gamma)}{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma} + \frac{\beta}{\beta-\gamma}$

3.2.86. Έστω $f: \Re \to (-\infty,1)$, $g: \Re \to (1,+\infty)$ συνεχείς .Αν υπάρχουν ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί α, β με $f(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta$, $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (α,β) τέτοιο ώστε $f(x_0)\, g(x_0) = x_0$

3.2.87. Έστω f συνεχής τέτοια ώστε $f : [0,2] \to \Re$ και $f(0) = f(2) \neq f(1)$. να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f(\xi) = f(\xi+1)$

3.2.88. Έστω f συνεχής στο [α,β] και ισχύει $f^2(\alpha) + f(\alpha)\, f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f(\xi) = 0$

3.2.89. Έστω f συνεχής στο [0,1] και $f(0)= f(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) =f(x+\frac{1}{3})$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [0,1]

3.2.90. Έστω f συνεχής στο [0,2π] και $f(0)= f(2\pi)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) =f(x+\pi)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [0,2π)

3.2.91. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ **β)** $f_2(x) = |x - 2| - 3,\ x \in [1, 5]$.

3.2.92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$.

α) να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$

3.2.93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής

3.2.94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$

3.2.95. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

3.2.96. α) Έστω $f: [-3\ 3] \to R$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $x^2 + (f(x))^2 = 9$ για κάθε $x \in [-3, 3]$. Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f^2(x) - 3 = 5x^4$ για κάθε $x \in R$.

3.2.97. Αν για τον μιγαδικό $z = x + i \cdot f(x)$ ισχύει $|z| = 1$ για κάθε $x \in D_f$, να δείξετε ότι:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολα του διαστήματος $[-1, 1]$

β) η f διατηρεί σταθερό πρόσημο αν $D_f = (-1, 1)$.

3.2.98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

3.2.99. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι περιττός, τότε το $P(x)$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα,

β) αν ισχύει $\alpha_\nu\alpha_0 < 0$, τότε το $P(x)$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

3.2.100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x + \lambda$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $y = f(x)$ έχει, για κάθε $y \in R$, μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

3.2.101. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2] με f(0) =2 , f(1)= 4 , f(2) = - 4 , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 9$, .

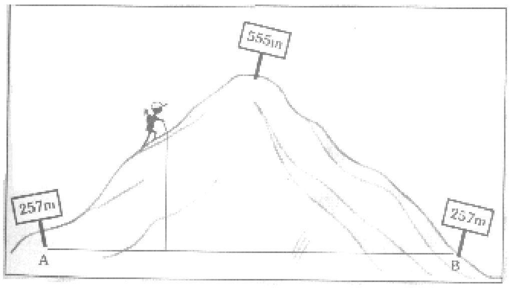
3.2.102. Δίνεται η συνάρτηση f: [0, +∞) → R με $f(x) = x^2e^{-x} + 2e^{-x} + 3 - x^2$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = x έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

3.2.103. Ο Πέτρος ξεκίνησε από το σημείο Α, στους πρόποδες ενός βουνού, στις 7.00π.μ. και έφτασε στο σημείο Β, στην κορυφή του βουνού, στις 6.00μ.μ.. Μετά την σχετική ξεκούραση, άρχισε στις 7.00π.μ. της επόμενης μέρας την επιστροφή του από το Β στο Α, ακολουθώντας τον ίδιο ακριβώς δρόμο και έφτασε στο Α στις 6.00μ.μ. (Πήγαινε βέβαια ταχύτερα αλλά έκανε μεγαλύτερες στάσεις για να χαρεί το τοπίο.) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο του δρόμου που ακολούθησε ο Πέτρος, στο οποίο βρίσκο-νταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

3.2.104. Ένας ορειβάτης αρχίζει να κινείται την χρονική στιγμή t = 0, από το σημείο Α του υψώματος που φαίνεται στο σχήμα και το οποίο βρίσκεται σε υψόμετρο 257m από τους πρόποδες του υψώματος. Μετά από 3 ώρες ο ορειβάτης φθάνει στη κορυ-φή του υψώματος, υψομέτρου 555m, όπου και ξεκουράζεται για 2 ώρες. Στην συνέχεια αρχίζει να κατεβαίνει το ύψωμα για να φτάσει στο σημείο Β, το οποίο βρίσκεται στο ίδιο υψόμετρο με το Α, μετά από 3 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος χρονικών στιγμών που διαφέρουν κα-τά 3 ώρες και κατά τις οποίες ο ορειβάτης βρίσκονταν στο ίδιο υψόμετρο από τους πρόποδες του υψώματος.



Ανάλυση

Κεφάλαιο 4ο

Παράγωγοι

4.1 Η Έννοια της Παραγώγου

Α . Ορισμός Παραγώγου

Δίνεται μια συνάρτηση f
Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός .

Το όριο αυτό το ονομάζουμε **παράγωγο αριθμό της f στο x_0** και συμβολίζεται με **f ' (x_0)** . Δηλαδή

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad [1]$$

Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ <u>είναι πραγματικοί αριθμοί και είναι ίσα</u>

Παρατηρήσεις

1. Αν στην [1] Θέσω όπου $x = x_0 + h$ τότε έχω τον ισοδύναμο ορισμό

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad [2]$$

2. Αν στην [1] Θέσω όπου $x = x_0 \cdot h$ τότε έχω τον ισοδύναμο ορισμό

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \frac{f(x_0 h)-f(x_0)}{h-1}} \quad [2']$$

3. Αν στην [2] Θέσω **$f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ και $\Delta x = x - x_0$** τότε είναι

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}} \quad [3]$$

4. Επίσης ισχύει ο συμβολισμός του Leibniz

$$\boxed{f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx}} \quad [4]$$

5. Η παράγωγος του διαστήματος ενός κινητού κατά την χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι η ταχύτητα , και η παράγωγος της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση .

δηλαδή $\boxed{S'(t_0) = u(t_0) \text{ και } u'(t_0) = a(t_0) \quad [5]}$

Αν x(t) είναι η συνάρτηση που μου δίνει το διάστημα που διανύει ένα κινητό συναρτήσει του χρόνου τότε

Η μέση ταχύτητα του κινητού στο διάστημα $[t_0, t]$ είναι $\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$

6. Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με την παράγωγό της f στο x_0 . Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad [6]$$

Σημ : το $f'(x_0)$ ονομάζεται και **κλίση** της f στο x_0

Β. Παραγωγισιμότητα και συνέχεια

***Θεώρημα** :Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο χ_0 είναι και συνεχής σε αυτό .*

Παρατηρήσεις

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει . Κλασικό αντιπαράδειγμα η

f(x) =|x|

η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό .

2. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0 δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό. (Γιατί αν ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα θα ήταν και συνεχής σε αυτό , άτοπο!!!!)

3. Αν ζητούνται οι τιμές των παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το οποίο είναι σημείο αλλαγής τύπου τότε απαιτούμε

α) Η f να είναι συνεχής στο x_0

β) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \Re$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Να εξετάσετε αν η f(x) = 2x^2 - |x - 1 | +1 είναι συνεχής και στη συνέχεια αν είναι παραγωγίσιμη στο 1**

Είναι f(x) = $\begin{cases} 2x^2 - x + 2, x \ge 1 \\ 2x^2 + x, x < 1 \end{cases}$

Εξετάζουμε πρώτα την συνέχεια στο 1 και έχουμε

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 - x + 2 = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 + x = 3$ και f (1) = 3

Άρα η f είναι συνεχής στο 1

Για την παραγωγισιμότητα στο 1 είναι

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2(x + \frac{1}{2})(x - 1)}{(x - 1)} = 3$$

και

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x + \frac{3}{2})(x - 1)}{x - 1} = 5$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 αφού $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

2. **Να εξετάσετε αν η f(x) = $\sqrt{x} - \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0**

Είναι A= [0,+∞) και το 0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού άρα, αναζητώ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\eta\mu x}{x} = +\infty - 1 = +\infty.$$

'Αρα δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο 0

3. **Να βρεθούν τα α,β ώστε η f(x) = $\begin{cases} \alpha x + 5a + 2, x \le -2 \\ x^2 + 8x + \beta + 2, x > -2 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο -2**

Απαιτούμε f παραγωγίσιμη στο -2 $\Leftrightarrow \begin{cases} f \quad \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \quad \sigma\tau o \ -2 \\ f \quad \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta \quad \sigma\tau o \ -2 \end{cases}$ οπότε

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -2^+}(x^2+8x+\beta+2) = \lim_{x\to -2^-}(ax+5a+2) = 3\alpha+2 \Leftrightarrow$$

3α + 2 = β – 10 ⇔ $\boxed{3α – β = -12}$ ⇔ $\boxed{3α= β-12 \ \textbf{(I)}}$

Ακόμη

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+8x+\beta+2-(3\alpha+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+8x+\beta+2-(\beta-12+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+8x+12}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}\frac{(x+2)(x+6)}{x+2} = 4 \ \textbf{(II)}$$

και

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-}\frac{\alpha x+5\alpha+2-(3\alpha+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-}\frac{\alpha x+2a}{x+2} =$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{\alpha(x+2)}{x+2} = a \ \textbf{(I I I)}$$

(II) και (III) ⇒ $\boxed{α = 4}$ οπότε (I) ⇒ 3 · 4 = β -12 ⇒ $\boxed{β = 24}$

---

4. **Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα** $5\eta\mu^2 x - 3x^4 \le xf(x) \le 5\eta\mu^2 x + 3x^4$ **(I). Αν η f είναι συνεχής στο 0 , να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο 0 .**

Για να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αναζητούμε το όριο

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ (II)

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε το f(0)

Όμως f συνεχής στο 0 άρα f(0) = $\lim_{x\to 0} f(x)$. Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Αν x> 0 η (I) γίνεται

$$5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 \le f(x) \le 5\eta\mu x\frac{\eta\mu\ x}{x} + 3x^3$$

Όμως $\lim_{x\to 0} 5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 = 5\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 0 = 0$ και $\lim_{x\to 0} 5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 = 0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ = 0 (III)

Αν x< 0 η (I) γίνεται $5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 \ge f(x) \ge 5\eta\mu x\frac{\eta\mu\ x}{x} + 3x^3$

Όμως $\lim_{x\to 0} 5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 = 0$ και $\lim_{x\to 0} 5\eta\mu\ x\frac{\eta\mu\ x}{x} - 3x^3 = 0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ = 0 (IV)

Από (II) και (IV) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ = 0 . Όμως f συνεχής στο 0 άρα f(0) = $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ = 0

Έτσι το ζητούμενο όριο (II) γίνεται $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. Για να υπολογίσουμε αυτό το όριο διαιρούμε την (I) με x^2 >0 και έχουμε

$$5\left(\frac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2 - 3x^2 \le f(x) \le 5\left(\frac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2 + 3x^2$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}(5\left(\dfrac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2 - 3x^2) = 5\cdot 1 - 3\cdot 0$ =0 και $\lim\limits_{x\to 0}(5\left(\dfrac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2 + 3x^2) = 5\cdot 1 - 3\cdot 0$ =0

άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ = f ΄(0) = 5

---

5. **Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα *ημx* - x^2 ≤ *f(x)* ≤ *ημx* + x^3 (I). Να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο 0 .**

Από την (I) για χ=0 παίρνουμε 0≤ f(0) ≤ 0 $\Rightarrow$ $\boxed{f(0) = 0}$

Για να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αναζητούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

Αν x> 0 η (I) γίνεται $\dfrac{\eta\mu x}{x} - x \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} + x^2$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} - x = 1 - 0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} + x^2 = 1 - 0 = 1$

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

Αν x< 0 η (I) γίνεται $\dfrac{\eta\mu x}{x} - x \ge \dfrac{f(x)}{x} \ge \dfrac{\eta\mu x}{x} + x^2$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} - x = 1 - 0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} + x^2 = 1 - 0 = 1$

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}$ = 1

Έτσι τελικά έχουμε $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ =1

6. **Αν** $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2004$ **, και f συνεχής στο 3 , να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο 3**

Για να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αναζητούμε το όριο

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ (I)

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε το f(3)

Για x≠3 θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x-3}\Rightarrow f(x)=g(x)(x-3)$, και άρα

$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}g(x)(x-3)=2004\cdot 0=0$

Όμως f συνεχής στο 3 άρα f(3) = $\lim_{x\to 3}f(x)=0$

Έτσι το ζητούμενο όριο (I) γίνεται

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ = $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-0}{x-3}$ = $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}$ = 2004

7. **Δίνονται οι συναρτήσεις f , g : R → R με g(x) = x f(x) για κάθε χ∈R . Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0$ =1 να δείξετε ότι και f είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0$ =1**

Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ = g ΄(1) (I)

Αναζητούμε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(x)}{x}-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(x)-xg(1)}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-xg(1)}{x(x-1)}\ \text{(II)}$$

Στον αριθμητή της (II) προσθαφαιρούμε το g(1) ώστε να εμφανιστεί ο λόγος (I), και έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-xg(1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)+g(1)-xg(1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)+g(1)(1-x)}{x(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\frac{g(x)-g(1)}{(x-1)}+\frac{g(1)(1-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\frac{g(x)-g(1)}{(x-1)}-g(1)=\frac{1}{1}\cdot g'(1)-g(1)=g'(1)-g(1)$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με f ‘ (1) = g’(1) – 1

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.1.1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο x_0
α) $f(x)= x$, $x_0=2001$, β) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$
γ) $f(x)= \sqrt{x^2 + 3x + 5}$, $x_0 = -2$,δ) $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $x_0 = 3$

4.1.2. Δίνεται συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(1+h) = 3-3h+3h^2 - h^3$, $h\in\Re$. Να βρείτε την $f'(1)$.

4.1.3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.5. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.6. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 ημ(\frac{1}{x}), χ \neq 0 \\ 0 \quad . χ = 0 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

4.1.8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$, είναι συνεχής στο $x_0=0$ άλλα όχι παραγωγίσιμη σ ' αυτό .

4.1.9. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x - 2|$, είναι συνεχής στο $x_0=2$ άλλα όχι παραγωγίσιμη σ ' αυτό .

4.1.10. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x \neq 0 \\ 0 \quad , x = 0 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.11. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, x < 0 \\ 0 \quad , x = 0 \\ x^2 e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \end{cases}$,είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.12. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ημ2x, x < 0 \\ x^2 + 2x , x \geq 0 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 & , x \le 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3} & , x > 1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

4.1.14. Να βρεθούν τα α, β $\in \Re$ ώστε η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} a\,x + \beta, x < 2 \\ x^3 \quad , x \ge 2 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. [Απ : α =12 , β = - 16]

***

4.1.15. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $x - x^2 \le f(x) \le x + x^2$ για κάθε $x \in \Re$.

α) να δείξετε ότι $f(0) = 0$

β) να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$

4.1.16. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $x + 2 \le f(x) \le 2 + x + x^2$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι **α)** $f(0) = 2$ και **β)** $f'(0) = 1$.

4.1.17. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $|f(x)| \le x^2$. Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

4.1.18. Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $|\, x \cdot f(x) - ημ^2 x \,| \le x^4$ για κάθε $x \in \Re$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι
α) $f(0) = 0$ και **β)** $f'(0) = 1$.

4.1.19. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.

4.1.20. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1} = 2000$ να δείξετε ότι $f'(1) = 2000$.

4.1.21. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h)}{h} = 3$, να δείξετε ότι $f'(2) = 3$.

4.1.22. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = α$ να δείξετε ότι

α) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - a} = f(α) - f'(α)\,α$

β) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{x^2 f(\alpha) - \alpha^2 f(x)}{x - a} = 2 \cdot α \cdot f(α) - α^2 \cdot f'(α)$

Ασκήσεις Β΄Ομάδας

4.1.23. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y\in\Re$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\Re$ με $f'(x_0)=f'(0)$

4.1.24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y\in\Re$ και $f(0)\neq 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\Re$ με $f'(x_0)=f'(0)\cdot f(x_0)$.

4.1.25. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y>0$.
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να δείξετε ότι η
α) $f(1)=0$.
β) είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0>0$ με $f'(x_0)=f'(1)\cdot x_0^{-1}$

4.1.26. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y>0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να δείξετε ότι η είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0>0$ με $f'(x_0)=f'(1)\cdot\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

4.2 Παράγωγος συνάρτησης – Κανόνες Παραγώγισης

Παράγωγος συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Λέμε τότε ότι

- η f είναι **παραγωγίσιμη στο Α** εάν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in A$.
- η f είναι **παραγωγίσιμη στο (α,β)** εάν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$
- η f είναι **παραγωγίσιμη στο [α,β]** εάν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$

και επίσης τα $\lim\limits_{x\to\beta-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και το σύνολο ***$A_1=\{x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη $\}$***.
Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in A_1$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

την οποία ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f η σκέτα παράγωγο της f και συμβολίζεται με

f' ή $\frac{df}{dx}$ (συμβολισμός Leibniz)

Ορίζουμε ακόμη την δεύτερη παράγωγο της f ως την παράγωγο της f ΄ και την συμβολίζουμε f''

Τέλος επαγωγικά ορίζουμε την ν-οστή παράγωγο της f και συμβολίζουμε με $f^{(\nu)}$ την $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$, $\nu \geq 3$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων - Κανόνες Παραγώγισης

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

1. $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
6. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
7. $(e^{x})' = e^{x}$
8. $(\ell n x)' = \frac{1}{x}$
9. $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} x}$
10. $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^{2} x}$

Κανόνες Παραγώγισης

1. $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^{2}}$

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = \frac{df(g(x)}{dg(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

$$(f(u))' = f'(u)\cdot u'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

1. $(f(x)^{\rho})' = \rho f(x)^{\rho-1}f'(x)$

2. $(\sqrt{f(x)})' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$

3. $(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x)$

4. $(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x) f'(x)$

5. $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$

6. $(\ln(|f(x)|)) = \dfrac{1}{f(x)}f'(x)$

7. $(\varepsilon\varphi f(\chi))' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}f'(x)$

8. $(\sigma\varphi f(x))' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 f(x)}f'(x)$

9. $\boxed{(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x\cdot\ln a}$

10. $\boxed{a^{f(x)} = a^{f(x)\ln a} f'(x)}$

11. $\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}}$

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.2.1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = 3x^3 – 5x^2 + 7x + 1$ β) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{5}}$
γ) f(x) = ημ x – συν x δ) $f(x) = x^2 + e^x + \ln x + 2999$
ε) $f(x) = \sqrt{x} + 5^x$ στ) $f(x) = 33x^3 + \log_3 6$
z) f(x) = εφχ -σφχ

4.2.2. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = x^2 \cdot$ συνx β) $f(x) = x\cdot e^x$
γ) $f(x) = x\cdot e^x \ln x$ δ) f(x) = 3x+ 4· ημx
ε) $f(x) = \sqrt{x}$ συνx στ) f(x) = x·(x+1)·(x+2)

4.2.3. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ β) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^\nu}$

δ) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$ ε) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{3x^3+1}$ στ) $f(x) = \dfrac{5}{\eta\mu x}$

z) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ η) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

4.2.4. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ β) $f(x) = x^3 \ln x$ γ) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

δ) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ ε) f (x) = 5x στ) $f(x) = x^3 + \ln x + 5x^2$

4.2.5. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = (x-1)^3$ β) $f(x) = ημ^3x$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2+x^3+1}$

δ) f(x) = συν (5x) ε) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+4}}$ στ) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

z) $f(x) = \ln(3x^2+5x+4)$ η) $f(x) = e^{-x}$ θ) f(x) = ημ(αχ+β) – συν(αχ+β)

4.2.6. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = (x^2+e^x+1)^{-2}$ β) $f(x) = \sqrt{\varepsilon\varphi x}$ γ) f(x) = ln (lnx)

δ) f(x) = ημ (συνx) ε) $f(x) = x^2 συν\dfrac{1}{x}$ στ) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

z) $f(x) = \ln(3x^2+5x+4)$ η) f(x) = ημ (ημx) – συν (συνx)

4.2.7. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x) = ημ (συν (3x+3)) β) f(x) = $ημ^3$ (2x+1) γ) f(x) = ln (ln($3x^2$ +e^x))

δ) f(x) = ln (x+$\sqrt{x^2+1}$) ε) f(x) = $x^2\ e^{-\frac{1}{x}}$ στ) f (x) = $e^{x+2\ln x}$

z) f(x) = ln (ημ (5χ+1)) η) f(x) = ημ (ln (συν(x+4)))

θ) f(x) = $e^{\sqrt{x^2+3}}$

4.2.8. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x) = x^x β) f(x) = $x^{ημx}$ γ) f(x) = ημ (x^x)

δ) f(x) = $(x+\frac{1}{x})^x$ ε) f(x) = $(x^2+3)^{\ln x}$ στ) f (x) = $(1+\sqrt{x})^x$

z) f(x) = ln (ημ (x^x)) η) f(x) = $x^{\sqrt{x}}$

4.2.9. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α) f(x) = $\sqrt[3]{|x|}$ β) f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$ γ) f(x) = $\frac{x}{1+|x|}$

δ) f(x) = x - | x^2 – 2x | ε) f(x) = x· |x|

στ) f (x) = $\begin{cases} x^2(ημ\frac{1}{χ}-συν\frac{1}{χ}), χ\neq 0 \\ 0, \qquad\qquad , χ=0 \end{cases}$ z) f(x) = ln (ημ (x^x))

***

4.2.10. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ημ (αx+β) . Να δείξετε ότι f '' (x)+$α^2$· f ' (x) = 0

4.2.11. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$

4.2.12. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $αx^2 + \frac{β}{x}$

α) Να δείξετε ότι x^2 · f '' (x) = 2 · f (x)

β) Να βρείτε τα α, β ώστε f (2) = 2 και f ' (2) =3

4.2.13. Αν f (x) = $\ln(\frac{1}{1+x})$ να δείξετε ότι $\frac{df(x)}{dx}\cdot x+1=e^{f(x)}$

4.2.14. Να βρεθούν τα α ,β , γ ∈ℜ ώστε η συνάρτηση f (x) = $\begin{cases} ax^2+\beta x+\gamma, x\leq 0 \\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad , χ>0 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο ℜ.

4.2.15. Αν f (x) = α e^x +β e^x +γ ημx +δσυνx να δείξετε ότι $f^{(4)}$(x)= f(x).

4.2.16. Αν f (x) = $\sqrt[3]{x^2}$ να βρεθεί το f ' (8) και το το f ' (- 8).

4.2.17. Να βρεθούν τα α ,β , γ $\in \Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x-1}, x<1 \\ \gamma x^2+\beta x+\alpha, \chi \geq 1 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

4.2.18. Αν $f(x) =$ ημ $^{\nu}$ x · συν (νx) να δείξετε ότι $f'(x) = \nu \cdot$ημ $^{\nu-1}$ x · συν ((ν+1)·x)

4.2.19. **α)** Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ είναι άρτια να δείξετε ότι η f ' είναι περιττή .

β) Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ είναι περιττή να δείξετε ότι η f ' είναι άρτια.

γ) Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ είναι περιοδική να δείξετε ότι η f ' είναι επίσης περιοδική .

δ) Αν μια περιττή συνάρτηση f: (-α, α) $\to \Re$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη να δείξετε ότι η f '' (0) = 0.

ε) Αν f: $\Re \to \Re$ μια παραγωγίσιμη , άρτια συνάρτηση και μια συνάρτηση g με $g(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 3) \cdot f(x) +$ ημ x . Να δείξετε ότι η g ' (0) = 1.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

4.2.20. Έστω συνάρτηση f : (0 , +∞) $\to \Re$ με f (xy) = f (x)+f(y) , x , y$\in$ (0 , +∞) . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , +∞) να δείξετε ότι

x· f ' (x) = y· f ' (y).

4.2.21. Έστω συνάρτηση f :$\Re \to \Re$ με f (x+y) = f (x)·f(y) , x,y$\in \Re$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ να δείξετε ότι f (y) · f ' (x) = f (x)· f ' (y)

4.2.22. Έστω συνάρτηση f :$\Re \to \Re$ με f (x+y) +f(x-y) = 2· f (x)·f(y) , x,y$\in \Re$. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ να δείξετε ότι

f (y) · f '' (x) = f (x)· f '' (y)

4.2.23. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f :$\Re \to \Re$ με f (x+y) +f (x-y) = 2· f (x) και f ' (0)=1 , x,y$\in \Re$.Να δείξετε ότι f ' (x) =1 .

4.2.24. Να αποδείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της f με f (x) = lnx δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x) = \dfrac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{x^{\nu}}$

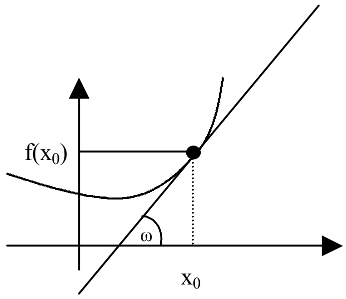
4.2.25. Να αποδείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της f με f (x) = ημx δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x) = \eta\mu(\chi + \dfrac{\nu\pi}{2})$

4.2.26. Να αποδείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της f με

$f(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \cdot x^{\nu-2} + \ldots . \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ δίνεται από τον τύπο $f^{(\nu)}(x) = \nu! \alpha_\nu$

4.3 Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

Παρατηρήσεις – Μεθοδολογία στις ασκήσεις παραγώγων



[1 .] Σε όλα τα θέματα με εφαπτομένες θεωρούμε το σημείο επαφής **Α (x_0, f(x_0))** είτε αυτό δίνεται είτε όχι

[2 .] Αν **ε** η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)) , **ω** η γωνία που σχηματίζει αυτή με τον άξονα xx' και λ_ε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης αυτής τότε ισχύει πάντα

$$\boxed{\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega}$$

[3 .] Θυμηθείτε ότι

$\varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} = 45°$ $\qquad$ $\varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4} = 135°$

$\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3} = 60°$ $\qquad$ $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{3} = 120°$

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6} = 30°$ $\qquad$ $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \omega = \frac{5\pi}{6} = 150°$

[4 .] Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)) δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot x + \beta}$$

όπου το β βρίσκεται από το γεγονός ότι το σημείο Α (x_0, f(x_0)) ανήκει στην γραφική παράσταση της f .Δηλαδή επαληθεύει την εξίσωσή της , άρα
$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + \beta \Rightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$

[5 .] Αν η εφαπτομένη ***ε*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)) είναι παράλληλη στον xx ' τότε

$$f'(x_0) = 0$$

[6 .] Αν η εφαπτομένη *ε* της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)) είναι παράλληλη στην ευθεία ***η*** τότε

$$f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \lambda_\eta$$

[7 .] Αν η εφαπτομένη ***ε*** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)) είναι κάθετη στην ευθεία ***η*** τότε

$$f'(x_0) \cdot \lambda_\eta = -1 \text{ ή } \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1$$

[8 .] Αν αναζητώ 2 σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες τότε πρέπει

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

[9 .] Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο Μ(κ, λ) ,τότε αυτό επαληθεύει την εξίσωσή της , άρα $\lambda = f'(x_0)\cdot k + \beta$

[10 .] Αν ζητείται να βρεθεί η ευθεία $y = kx+\lambda$ ώστε αυτή να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$ τότε πρέπει

$$k = f'(x_0) \quad \text{και} \quad f(x_0) = kx_0+\lambda$$

[11 .] Αν ζητείται να ελέγξουμε η να βρούμε αν οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων g , f έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα κοινό τους σημείο Α $(x_0, f(x_0))$ τότε πρέπει $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

[12 .] Αν ζητείται να βρεθούν οι οριζόντιες εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , ψάχνω να βρω εκείνες που έχουν συντελεστή διεύθυνσης 0 Έτσι λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$ και τα x που βρίσκω είναι τα σημεία επαφής, οπότε ανάγομαι στην περίπτωση [4].

[13 .] Αν ζητείται να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από σημείο Β (x_1, y_1) τότε

συνήθως το Β (x_1, y_1) είναι διάφορο του σημείου επαφής Α (x_0, y_0)
(αυτό το βρίσκω αν $f(x_1) = y_1$)
Αν λοιπόν Α (x_0, y_0) το σημείο επαφής (έστω και αν δεν το ξέρω) τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = f'(x_0)\cdot x + \beta$ (1)
Όμως $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + \beta \Rightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$ (2)
Άρα (1) $\Rightarrow$ $y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$ (3)
Αλλά η εφαπτομένη διέρχεται από το Β (x_1, y_1) οπότε

$$y = f'(x_0)\cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 \quad (4)$$

Από την (4) βρίσκω ένα η περισσότερα x_0 και από την (3) τις ζητούμενες εφαπτομένες

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.3.1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο αντίστοιχο x_0

α) $f(x) = 5x^2 +7x+1$, $x_0 = 1$ β) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$

γ) $f(x) = (x^2+2x-1)^2$, $x_0 = 3$ δ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$

ε) $f(x) = 2x^2 -3|x|+1$, $x_0 = 0$ στ) $f(x) = |x^2-1|$, $x_0 = 3$

z) $f(x) = x\cdot e^x$, $x_0 = -1$.

4.3.2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ στα σημεία Μ $(x_0,f(x_0))$ με $f(x_0) = f\,'(x_0)$

4.3.3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = 2x^3+3x-1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x-y-2 = 0$.

4.3.4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = 4x^4+3x^2+x+3$ στα σημεία τομής της με την ευθεία $x-y-2 = 0$.

4.3.5. Έστω $f : \Re \to \Re$ με $f(x) = x^2+3x+\alpha$. Να βρεθεί σημείο της C_f όπου η εφαπτομένη της f σε αυτό το σημείο είναι

α) Παράλληλη στον χχ΄

β) Παράλληλη στην $2y = x+3$

γ) Κάθετη στην $x+y+2 = 0$.

4.3.6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3+3x^2 - 6x^2 +11x-6$ στα σημεία τομής της με τους άξονες.

4.3.7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2-5x+6$ που διέρχεται από το Μ(1,-2)

4.3.8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία π/3 με τον χχ,

4.3.9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = -2x^2 +5x-1$ που σχηματίζει γωνία 3π/4 με τον χχ,

4.3.10. Αν Α(1,-1) , Β(3, 15) δυο σημεία της C_f της $f(x) = 2x^2 -3$ να βρεθεί σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f ώστε η εφαπτομένη στο Μ να είναι παράλληλη στο ΑΒ

4.3.11. Να βρεθούν τα α, β ώστε η ευθεία $y=2x+5$ να είναι εφαπτομένη της $f(x) = x^2+\alpha x+\beta$ στο σημείο με $x_0 =1$

4.3.12. Να βρεθούν τα α, β ώστε οι $f(x) = x^2 +\alpha x +1$ και $g(x)= 2x^2+\beta+x$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 =1$.

4.3.13. Να βρεθεί ο $\alpha \in \Re$ ώστε η εφαπτομένη της C_f της $f(x) = \frac{1}{9}(ax - x^3)$ σε ένα κοινό σημείο της f με τον xx' να σχηματίζει γωνία 45° , με τον αξονα αυτό.

4.3.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k^2/x$, $k \in \Re$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(κ,5) , με τον άξονα xx'.

4.3.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1/x$. Να βρεθεί το εμαβδό που σχηματίζει η η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(α,1/α) και τους άξονες xx' και yy'.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

4.3.16. Έστω $f(x) = \kappa x^2 + \lambda$ και $g(x) = \ln(2\eta\mu x)$. Αν $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ να βρεθούν τα κ, λ ώστε οι f, g να τέμνονται στο $A(x_0 , 0)$ και οι εφαπτομένες των f, g στο Α να ταυτίζονται.

4.3.17. Να αποδείξετε ότι το τμήμα που περιέχεται μεταξύ των αξόνων και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο τυχαίο σημείο της $f(x) = \alpha/x$ διχοτομείται από το σημείο επαφής .

4.3.18. Έστω $f(x)= \frac{1+\ln x}{x}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη για την οποία ισχύει ότι
α) διέρχεται από το Ο(1,1)
β) είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα

4.3.19. Να δείξετε ότι η $y = x+1$ εφάπτεται στην $y = e^x$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = x+1$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

4.3.20. Έστω $f : (0, +\infty)$ με $f(x^2) = 1+x^3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 4$

4.3.21. Έστω $f : (0, +\infty)$ με $f(\ln x) = 2 - x^2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 0$

4.3.22. Έστω f με $f(e^x) = 2 - \ln(x+1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 1$

4.3.23. Έστω $f(x) = x^2 - x + 1$ και τα σημεία Α, Β,Γ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5/2$.Να αποδείξετε ότι οι κάθετες στις εφαπτομένες της f στα σημεία Α, Β , Γ διέρχονται από το ίδιο σημείο .

4.4 Ρυθμός μεταβολής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για δυο μεταβλητές x και y που συνδέονται με την σχέση y = f(x) και η f είναι παραγωγίσιμη ορίζουμε

- Ρυθμός μεταβολής του y ως πρός x λέγεται η παράγωγος συνάρτηση

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

- Ρυθμός μεταβολής του y ως πρός x στο σημείο x_0 λέγεται η παράγωγος της f στο x_0

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Έτσι από το ρυθμό μεταβολής στο x_0 ελέγχουμε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ή ελαττώνεται ένα μέγεθος
Αν ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός τότε σημαίνει τάση για αύξηση ενώ αν είναι αρνητικός σημαίνει τάση για ελάττωση της μεταβλητής

Χρήσιμοι τύποι

Μήκος κύκλου	$L = 2\pi r$	Εμβαδόν κύκλου	$E = \pi r^2$
Όγκος σφαίρας	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	Επιφάνεια σφαίρας	$E = 4\pi\tau^2$

<u>Κλασικά παραδείγματα ρυθμού μεταβολής από την Γεωμετρία και την φυσική είναι τα παρακάτω</u>

1. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας V ως προς την ακτίνα r είναι το εμβαδόν E της επιφάνειάς της

$$\frac{dV(r)}{dr} = (\frac{4}{3}\pi r^3)' = 4\pi\tau^2 = E$$

2. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας V ως προς τον χρόνο t είναι

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = (\frac{4}{3}\pi r^3(t))' = 4\pi r^2(t)r'(t)$$

3. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E κύκλου ως προς την ακτίνα του r είναι το μήκος L της περιφέρειάς του

$$\frac{dE}{dr} = (\pi r^2)' = 2\pi r = L$$

4. Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης S(t) ενός κινητού ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία ταχύτητα u(t) του κινητού

$$\frac{dS(t)}{dt} = u(t)$$

5. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας u(t) ενός κινητού ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία επιτάχυνση γ(t) του κινητού

$$\frac{du(t)}{dt} = \gamma(t)$$

Βέβαια σε μια άσκηση μπορεί να ζητηθεί ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς οποιοδήποτε άλλο μέγεθος

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας ως προς το εμβαδό της επιφάνειάς του δηλαδή ζητείται το $\frac{dV}{dE}$

Πρώτα βρίσκω τη συνάρτηση που συνδέει τα V ,E . είναι

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *και* $E = 4\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{E}{4\pi}}$ οπότε $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{\frac{E}{4\pi}})^3$

Και $\frac{dV}{dE} = [V(E)]' = \frac{4}{3}\pi[(\sqrt{\frac{E}{4\pi}})^3]' = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{4\pi}^3}(\sqrt{E}^3)' = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{4\pi}^3}\frac{2\sqrt{E}}{3}$

Γενικότερα ακολουθώ τα εξής βήματα

- Κατασκευάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό σχήμα
- Γράφουμε τα δεδομένα και προσέχω ποιούς ρυθμούς μεταβολής έχω γνωστούς και ποιους ζητάω
- Παίρνω από το σχήμα τις βασικές σχέσεις των μεγεθών και εκφράζω (θεωρώντας ένα μεταβλητό μέγεθος του σχήματος) τα μεγέθη που εμφανίζονται στην άσκηση με τους τύπους του σχήματος (ΠΥΘ. ΘΕΩΡΗΜΑ ,ΟΓΚΟΙ ΣΤΕΡΕΩΝ , ΤΥΠΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ , ΤΥΠΟΙ ΕΜΒΑΔΩΝ , ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ)
- Κατασκευάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό σχήμα κατά την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ζητούνται οι ρυθμοί μεταβολής διαφόρων μεγεθών .
- Όλα τα συμβολίζω με συμβολισμό Leibniz

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.4.1. Το μήκος ενός ορθογωνίου αυξάνεται με ρυθμό 5cm/sec , ενώ το πλάτος του μειώνεται με ρυθμό 3 cm/sec . Να βρεθούν :
α) Ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου .
β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν το μήκος του είναι 2 cm και το πλάτος του είναι 1 cm.

4.4.2. Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g συνδέονται με τη σχέση: $f(t) = 4(g(t))^3 + 5$. Αν είναι $g(4) = 1$και $g'(4) = -2$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f όταν $t = 4$

4.4.3. Η πλευρά ενός τετραγώνου μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του την χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 5μ.

4.4.4. Η ακτίνα ενός μπαλονιού πού ξεφουσκώνει μειώνεται με ρυθμό 10/π cm/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου την χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα του είναι 5cm.

4.4.5. Τα άκρα Α και Β ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ = 10cm ολισθαίνουν επι των ημιαξόνων Οx και Οy αντίστοιχα. Αν τη χρονική στιγμή t_0 , που το σημείο Α απέχει από την αρχή των αξόνων 6 cm , η ταχύτητα του είναι 4 cm/sec. Να βρεθεί :

α) Η ταχύτητα του σημείου Β

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του μήκους της πλευράς ΟΑ

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού την χρονική στιγμή t_0

4.4.6. Οι πλευρές ΑΒ , ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ ελαττώνονται με ρυθμό 3cm / sec κα 4 cm / sec αντίστοιχα , ενώ η γωνία Α μειώνεται με ρυθμό 2 rad/ sec. Να βρείτε

α) Μια σχέση που συνδέει τις πλευρές του τριγώνου με την γωνία Α.

β) Το είδος του τριγώνου την χρονική στιγμή t_0 , όπου ΑΒ =6 cm ΑΓ = 8cm , ΒΓ = 10 cm,

γ) Το ρυθμό μεταβολής της πλευράς ΒΓ την χρονική στιγμή t_0.

4.4.7. Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό 32 π cm^3 /sec .Να βρείτε :

α) Την ακτίνα του μπαλονιού την χρονική στιγμή t_0 που η επιφάνειά του είναι 16 π cm^2

β) Τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ακτίνα του την χρονική στιγμή t_0 που η επιφάνειά του είναι 16 π cm^2 .

4.4.8. Σε έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη πλάγια σκάλα μήκους 5μ. Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό 1μ/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3μ να βρείτε:

α) Σε τι ύψος είναι στερεωμένη η σκάλα

β) Με τι ρυθμό πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας

γ) Με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου , που σχηματίζεται από την σκάλα , τον τοίχο και το έδαφος

δ) Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ που σχηματίζει η σκάλα με το ν τοίχο.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

4.4.9. Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με σταθερή βάση ΒΓ =16 cm , μεταβάλλεται με ρυθμό 5cm/ sec. Αν την χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Α απέχει από την πλευρά ΒΓ 6cm να βρεθούν

α) Ο ρυθμός μεταβολής των ίσων πλευρών

β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ

4.4.10. Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 -2x+3$.Αν τη χρονική στιγμή t_0 η κλίση της f στο σημείο Μ είναι 25 και η τετμημένη του σημείου Μ αυξάνεται με ρυθμό 2 cm / sec να βρεθούν

α) Η τετμημένη του σημείου Μ ,
β) Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του σημείου Μ

4.4.11. Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 -2x+1$. Η τετμημένη του σημείου Μ είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων 2 cm / sec να βρεθούν
α) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ , με τον άξονα xx' , όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 1 = 0$,καθώς και η τετμημένη του σημείου Μ , την στιγμή εκείνη

4.4.12. Το μήκος ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 3 cm / sec . Την χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν του κύκλου είναι 100 π cm^2 να βρείτε
α) Την ακτίνα του κύκλου
β) Το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου ,
γ) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου.

4.4.13. Δυο πλοία που κινούνται το ένα ανατολικά και το άλλο βόρεια με ταχύτητες $u_A = 12$ km /h , $u_B = 18$ km /h , αντίστοιχα διήλθαν από ένα φάρο στις 1μμ και 2μμ αντίστοιχα . Να βρείτε
α) την απόσταση των δυο πλοίων στις 3μμ
β) το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των δυο πλοίων στις 3μμ

4.4.14. Ένας άνδρας με ύψος 2m διέρχεται μπροστά από προβολέα που βρίσκεται στο έδαφος. Ο προβολέας φωτίζει ένα κτίριο που απέχει 10 m από τον προβολέα . 'Αν ο άνδρας βαδίζει με ταχύτητα 2 m/sec και κατευθύνεται προς το κτίριο τότε
α) Να εκφραστεί το ύψος της σκιάς που ρίχνει ο άνδρας στο κτίριο ως συνάρτηση της απόστασής του από τον προβολέα.
β) Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το ύψος της σκιάς που ρίχνει ο άνδρας στο κτίριο την στιγμή που ο άνδρας βρίσκεται 5m από τον τοίχο του κτιρίου .

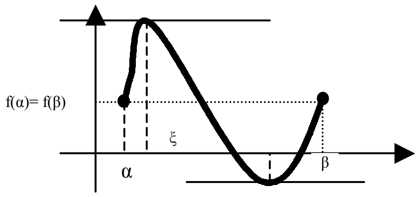
4.4.15. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει σταθερή περίμετρο 10 cm. Αν x είναι το μήκος μίας εκ των ίσων πλευρών του:
α) να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης,
β) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ως προς το x.την χρονική στιγμή που x = 3cm
γ) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ως προς το x.την χρονική στιγμή που το εμβαδόν του είναι $\sqrt{15}$ cm^2

4.4.16. Ένας μαθητής στέκεται 500μ μακριά από ένα σημείο και παρατηρεί ένα αερόστατο να απογειώνεται κατακόρυφα με ταχύτητα 65 μ / λεπτό . Έστω y(t) το ύψος που βρίσκεται το αερόστατο και d(t) η απόστασή του από τον μαθητή κάθε χρονική στιγμή t.
α) Να γράψετε την σχέση που συνδέει τα y(t), d(t)
β) Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο απομακρύνεται το αερόστατο από τον μαθητή όταν βρίσκεται σε ύψος 1200 μ .

4.5 Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι



- συνεχής στο [α,β]
- παραγωγίσιμη στο (α,β)
- f(α) = f(β)

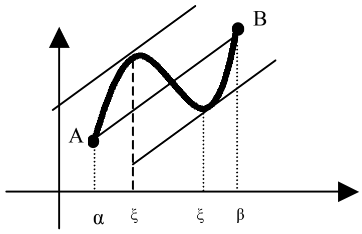
τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M(x,y) της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον xx'. ακόμη

- *<u>αν η f έχει κ ρίζες στο (α,β) η f ' έχει τουλάχιστον κ-1 τουλάχιστον ρίζες στο (α,β)</u>*

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ)

Αν μια συνάρτηση f είναι



- συνεχής στο [α,β]
- παραγωγίσιμη στο (α,β)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Επειδή $\lambda_{AB} = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $f'(\xi) = \lambda_{\varepsilon\varphi}$ το Θ.Μ.Τ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M(x,y) της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στην χορδή AB.

Θεώρημα Rolle και εύρεση ριζών μιας εξίσωσης

Αν ζητείται να δειχθεί ότι

<u>α) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια (1) ρίζα στο (α,β) τότε</u>

- Εφαρμόζω Θεώρημα Bolzano στο (α,β) ή
- Εφαρμόζω Θ. Rolle για μια αρχική της f(x) [F ' (x) =f(x)] ή
- δείχνω ότι $0 \in f(A)$ δηλαδή στο σύνολο τιμών του A
- βρίσκω με το μάτι "προφανής " ρίζα
- κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\Re$ (αυτό ισχύει όταν $(\alpha,\beta)=\Re$, και απαιτεί απόδειξη)

β) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον (κ) ρίζες στο (α,β) τότε

εφαρμόζω τα παραπάνω σε κ - το πλήθος- κατάλληλα διαστήματα του (α,β)

γ) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μια (1) ρίζα στο (α,β) τότε

- Υποθέτω ότι έχει 2 ρίζες ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ Τότε το θεώρημα Rolle δίνει για την f ' μια ρίζα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$. Το αποτέλεσμα αυτό θα οδηγεί σε άτοπο ή

- δείχνω ότι είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

δ) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ κ ρίζες στο (α,β) τότε

- Υποθέτω ότι έχει κ+1 ρίζες ρ_1 , $\rho_2,\ldots,\rho_{\kappa+1}$ με $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\kappa+1}$. Τότε το θεώρημα Rolle σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, …, $[\rho_\kappa, \rho_{\kappa+1}]$ δίνει για την f ' κ ρίζες $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, …., $\xi_1 \in (\rho_\kappa, \rho_{\kappa+1})$. Το αποτέλεσμα αυτό θα οδηγεί σε άτοπο . Αν όχι τότε εφαρμόζω Rolle στα $[\xi_1, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_3]$, …, $[\xi_{\kappa-1}, \xi_\kappa]$ και δίνει για την f '' κ-1 ρίζες. Αν χρειαστεί συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.
- δείχνω ότι είναι γνησίως μονότονη σε κ - το πλήθος- κατάλληλα διαστήματα του (α,β)

ε) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μια (1) ρίζα στο (α,β) τότε

- δείχνω ότι έχει τουλάχιστον μια και ότι έχει το πολύ μια ή
- δείχνω ότι έχει τουλάχιστον μια και ότι είναι μονότονη στο (α,β)

στ) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς κ ρίζες στο (α,β) τότε

- δείχνω ότι έχει τουλάχιστον -κ - και ότι έχει το πολύ - κ - ή
- δείχνω ότι έχει τουλάχιστον – κ - και ότι είναι μονότονη στα κ - το πλήθος- κατάλληλα διαστήματα του (α,β)

Θεώρημα Rolle και υπαρξιακά Θέματα (Θεωρητικά θέματα)

Σε αυτή την κατηγορία συναντάμε ασκήσεις που ζητούν
" …. *να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα* x_0 *ή* $\xi \in (a,b)$ *έτσι ώστε* <*συνθήκη*>.."

Τότε στην <*συνθήκη*> βάζω όπου x_0 ή ξ το x και φέρνω στο ένα μέλος όλους τους όρους . Θεωρώ την προκύπτουσα συνάρτηση ως g(x) και εφαρμόζω Rolle σε μια αρχική της g(x) την G(x) . [G ' (x) = g(x)]

π. χ
α) " …. *να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα* $x_0 \in (a,b)$ *έτσι ώστε* $f''(x_0)\cdot(x_0 - \kappa) = f'(x_0)$
Είναι $f''(x_0)\cdot(k - x_0) = f'(x_0) \Rightarrow \chi=\chi_0 \Rightarrow f''(x)\cdot(k-\chi) = f'(x) \Rightarrow$
$f''(x)\cdot(k-\chi) - f'(x) = 0 \Rightarrow [f'(x)\cdot(k-x)]' = 0$ άρα εφαρμόζω Rolle για την g(x) = f '(x) ·(k-x) στο (α,β)

β) "*.... να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \nu\, \xi^{\nu-1}$*"
Είναι $f'(\xi) = \nu\xi^{\nu-1} \Rightarrow \chi=\xi \Rightarrow f'(x) = \nu\chi^{\nu-1} \Rightarrow f'(x) - \nu\chi^{\nu-1}=0 \Rightarrow (f(x) - x^{\nu})' = 0$
άρα εφαρμόζω Rolle για την $g(x) = f(x) - x^{\nu}$ στο (α,β)

γ) "*.... να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ έτσι ώστε $f'(\xi) + k f(\xi)=0$*"
Είναι $f'(\xi) + k f(\xi)=0 \Rightarrow \xi=x \Rightarrow f'(\chi) + k f(\chi)=0 \Rightarrow f'(\chi) -k f(\chi)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(\chi)e^{kx} + k f(\chi)\, e^{kx} =0 \Rightarrow (f(x) \cdot e^{kx})'=0$
άρα εφαρμόζω Rolle για την $g(x) = f(x) \cdot e^{kx}$ στο (α,β)

Θεώρημα Μέσης τιμής και ανισότητες.

- Βρίσκω την κατάλληλη συνάρτηση f (φαίνεται συνήθως από την ανισότητα)
- Βρίσκω το κατάλληλο διάστημα $[\alpha,\beta]$ που μπορεί να είναι π.χ και της μορφής **[0,x] ή [x,x+1] ή [x,0] …**
- Εφαρμόζω ΘΜΤ για την f στο (α,β) οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$
- Μετά βρίσκω κατασκευαστικά τον τύπο της f από την σχέση $\xi\in(\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha < \xi < \beta \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ η ζητούμενη σχέση
- Έπειτα βρίσκω την μονοτονία της f' οπότε αν π.χ $f' \uparrow$ τότε $\alpha < \xi<\beta \Rightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Rightarrow f'(\alpha) < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f'(\beta)$ που είναι η αποδεικτέα σχέση

<u>Παράδειγμα</u>

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{5} < \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{3} < \dfrac{1}{2}$

Έστω $f(x) = \ln x$ και εφαρμόζω ΘΜΤ στο $[2,5]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{5-2} = \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{3}$

Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ οπότε $f'(\xi)= \dfrac{1}{\xi}$ και $f'(x)\downarrow$ (αφού $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$) στο $[2,5]$ άρα

$\xi\in(2,5) \Rightarrow 2<\xi<5 \Rightarrow f'(2) > f'(\xi) > f'(5) \Rightarrow f'(5) < f'(\xi) < f'(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(5) < \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{3} < f'(2) \Rightarrow \dfrac{1}{5} < \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{3} < \dfrac{1}{2}$

Θεώρημα Μέσης τιμής και υπαρξιακά Θέματα

- Σε αυτή την κατηγορία συναντάμε ασκήσεις που ζητούν "*.... να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 ή $\xi \in (a,b)$ έτσι ώστε <συνθήκη>..*" όπου δουλεύουμε όπως στα υπαρξιακά Θέματα του Rolle
- Σε αυτή την κατηγορία συναντάμε ασκήσεις που ζητούν "*.... να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, .., \xi_\nu \in (a,b)$ έτσι ώστε <συνθήκη>..*"
  Τότε χωρίζουμε το διάστημα σε ν – ίσα (ή σπανιότερα άνισα διαστήματα) και στο καθένα από αυτά εφαρμόζω ΘΜΤ

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. **Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f(x) = x^3 στο διάστημα [-2,3]**

- Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής σε όλο το R άρα και στο [-2,3] , ως πολυωνυμική
- f(-2) = - 8
- f(3) = 27

Άρα αφού f(-2) ≠ f(3) δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος

2. **Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f(x) = $\frac{3}{x^2}$ στο διάστημα [-2,2]**

- Η f δεν ορίζεται στο 0 και άρα δεν είναι συνεχής στο [-2,2] , άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος

3. **Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f(x) = 2 x^2 - 3 |x| στο διάστημα [-4,4].**

Είναι f(x) = $\begin{cases} 2x^2 - 3x, x \geq 0 \\ 2x^2 + 3x, x < 0 \end{cases}$

- <u>Εξετάζουμε την συνέχεια</u>
  Η f είναι συνεχής στο [-4,0) ως πολυωνυμική
  Η f είναι συνεχής στο (0,4] ως πολυωνυμική

  Στο $χ_0$= 0 έχουμε

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x^2 - 3x = 0$
  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x^2 + 3x = 0$ και *f(0)= 0* , οπότε f συνεχής στο 0

- <u>Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα</u>

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-4,0) ως πολυωνυμική
  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,4) ως πολυωνυμική

  Στο $χ_0$= 0 έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(2x - 3)}{x} = -3$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(2x + 3)}{x} = 3$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και επομένως δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος .

4. **α) Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση f(x) =** $\begin{cases} 2x+2, x \le -1 \\ x^3 - x, x > -1 \end{cases}$ **στο διάστημα [-3,2].**

β) Να βρείτε τα ξ πού το επαληθέυουν

- <u>Εξετάζουμε την συνέχεια</u>
  Η f είναι συνεχής στο [-3,-1) ως πολυωνυμική
  Η f είναι συνεχής στο (-1,2] ως πολυωνυμική

  Στο χ_0= - 1 έχουμε

  $\lim\limits_{x \to --1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^3 - x = (-1)^3 - (-1) = 1 - 1 = 0$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 2x \quad +3 = 0$ και *f(-1)= 0* , οπότε f συνεχής και στο -1

- <u>Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα</u>

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (--3,-1) ως πολυωνυμική
  Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2) ως πολυωνυμική

  Στο χ_0= -1 έχουμε

  $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 - x}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$ =2

  $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x \quad +2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2(x+1)}{x+1}$ =2

Άρα η f παραγωγίσιμη και στο - 1

- f(-3) = 2(- 3) +2 = - 4
- f(2) = 2^3 - 2 = 6

Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (-3,2) με

f ΄(ξ) = $\dfrac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \dfrac{6 - (-4)}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

Όμως f ΄(χ) = $\begin{cases} 2, x \le -1 \\ 3x^2 - 1, x > -1 \end{cases}$

και
για χ < - 1 f ΄(χ) = 2 ⇔ χ∈ (- 3 , --1]
για χ > - 1 f ΄(χ) = 2 ⇔ 3χ^2 = 3 ⇔ χ= +1 (δεκτή) ή
χ= - 1 (απορρίπτεται)
Τελικά τα ζητούμενα ξ είναι ξ∈(-3,-1] ∪ { 1 }

5. **Να βρείτε τα α, β, γ ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f(x) =** $\begin{cases} x^2+ax+\beta, -1 \le x < 0 \\ \gamma x^2+4x+4, 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **στο διάστημα [-1,1].**

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο [-1,0)$\cup$(0,1]

- Απαιτούμε να είναι συνεχής στο 0
  Είναι
  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \gamma x^2+4x+4 = 4$
  $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+ax+\beta = \beta$
  f(0) = 4
  Οπότε πρέπει $\boxed{\beta = 4}$

- Απαιτούμε να είναι παραγωγίσιμη στο 0
  $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x+4-4}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+\alpha)}{x} = \alpha$$
  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma x^2+4x+4-4}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(\gamma x+4)}{x} = 4$$
  Οπότε πρέπει $\boxed{\alpha = 4}$

- Απαιτούμε f(-1) =f(1) $\Leftrightarrow$ 1-4 +4 = γ +4+4 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\gamma = -7}$

6. **Αν f(x) = (x + 5) (4 x – 3)(x – 1) (x – 4) να βρεθεί πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση f ' (x) = 0**

Η f(x) ,είναι πολυωνυμική (άρα παραγωγίσιμη και συνεχής στο R) , και μηδενίζεται στα – 5, $\frac{3}{4}$, 1, 4

Άρα f(- 5) = f(1) = f($\frac{3}{4}$) = f(4) = 0

Αν εφαρμόσουμε το Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα

[-5, $\frac{3}{4}$] , [$\frac{3}{4}$, 1] , [1,4] τότε η f '(x) = 0 έχει <u>3 τουλάχιστον ρίζες .</u>

Όμως η f(x) είναι πολυωνυμική 4^{ου} βαθμού άρα η f'(x) θα είναι 3^{ου} βαθμού , και επομένως θα έχει <u>το πολύ 3 ρίζες</u> .

Άρα τελικά θα έχει <u>ακριβώς 3 ρίζες</u> στο R

7. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $12χ^3 – 6χ^2 -10χ +4 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)**

Το θέμα αυτό « μυρίζει» Θεώρημα Bolzano , και έτσι έχει αντιμετωπισθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Όμως , δυστυχώς , ενώ η f είναι συνεχής στο [0,1] η δεύτερη συνθήκη του Bolzano , δεν ικανοποιείται αφού f(0) = 4 , f(1) = 3 , και άρα f(0)f(1)>0.

Τι κάνουμε λοιπόν τώρα ;

Ψάχνουμε να βρούμε μια αρχική F της f (δηλαδή μια συνάρτηση που αν την παραγωγίσουμε να μας δώσει την f , F ‘(x) = f(x))

Μια τέτοια είναι **η** $\boxed{F(x) = 3x^4 – 2x^3 – 5x^2 + 4x}$ (*) με **F ‘(x) = f(x)**

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στην F , πράγματι

- F παραγωγίσιμη(και συνεχής) στο [0,1] ως πολυωνυμική
- F (0) = 0
- F (1) = 0

Άρα από θεώρημα Rolle η εξίσωση F ‘ (x) = 0 , δηλαδή η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

(*) Στην πραγματικότητα η f δεν έχει μόνο αυτήν την F για αρχική άλλα έχει άπειρες αρχικές τις $F(x) = 3x^4 – 2x^3 – 5x^2 + 4x +c$, $c \in R$, αλλά σε αυτού του είδους τις ασκήσεις εμείς θα επιλέγουμε αυτήν την αρχική με c =0 .

8. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x e^x - e^x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα την χ=0 .**

Έστω f(x) = $x e^x - e^x + 1$

Αφού έχει την χ = 0 έχει <u>τουλάχιστον 1 ρίζα</u> (την χ=0)

Έστω ότι έχει και άλλη , διαφορετική , ρίζα την ρ ($ρ \neq 0$).

- Η f είναι παραγωγίσιμη και άρα και συνεχής στο [0,ρ]
- F(0) =f(ρ) = 0 (αφού και οι 2 είναι ρίζες)

Άρα από θεώρημα Rolle η εξίσωση f ΄(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,ρ) (Ι)

Όμως $f'(x) = e^x + x e^x - e^x = x e^x$ και άρα f ‘(x) >0 στο (0,ρ) , δηλαδή στο (0,ρ) η f’(χ) δεν έχει καμιά ρίζα .

Επομένως η πρόταση (Ι) δεν ισχύει .

Άρα αυτό που υποθέσαμε , ότι δηλαδή η f(x) και άλλη ρίζα εκτός του 0 , είναι άτοπο .

Έτσι τελικά ή εξίσωση $x e^x - e^x + 1$ έχει <u>μοναδική ρίζα</u> την χ=0

9. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x^3 - 3 x + 1 = 0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (-1 , 1) .**

Έστω f (x) = x^3 -3x +1

Πρώτα θα δείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1,1)

- f συνεχής στο (-1,1)
- f(0) = - 1
- f(-1) = 3

Άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1)

Τώρα θα δείξουμε ότι έχει μια το πολύ ρίζα στο (-1,1)

Έστω ότι έχει 2 ρίζες στο (-1,1) , τις ρ_1 , ρ_2 , με $-1<\rho_1<\rho_2<1$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ (αφού ρ_1, ρ_2 ρίζες της f)

- f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση f ' (x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) (I)

Όμως $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, και άρα η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ έχει ρίζες τις x= 1 ή x= - 1

Επομένως η πρόταση (I) δεν ισχύει αφού $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (-1,1)$ δηλαδή $\xi \neq \pm 1$.

Άρα αυτό που υποθέσαμε , ότι δηλαδή η f(x) έχει 2 ρίζες , είναι άτοπο .
'Άρα η f έχει το πολύ 1 ρίζα.
Τελικά λοιπόν η f έχει μια το πολύ ρίζα και μια τουλάχιστον ρίζα ,άρα 1 ακριβώς ρίζα .

10. **Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2,5] και παραγωγίσιμη στο (2,5) , με f (2) = 6 , f(5) =27 να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,5)$ τέτοιο ώστε f ' (ξ) = 2ξ.**

Και αυτό το θέμα « μυρίζει» Θεώρημα Bolzano . Όμως , δυστυχώς , Η συνθήκη που ζητείται να αποδείξουμε περιέχει την f ' για την οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα . Τι κάνουμε λοιπόν τώρα ;

Έστω $g(x) = f'(x) - 2x \Leftrightarrow g(x) = f'(x) - (x^2)' = (f(x) - x^2)'$, και άρα $\boxed{G(x) = f(x) - x^2}$ μια αρχική της ,
με G'(x)= g(x)

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στην G , πράγματι

- G παραγωγίσιμη στο (2 ,5)
- G συνεχής στο [2,5] ως πολυωνυμική
- $G(2) = f(2) - 2^2 = 6 - 4 = 2$
- $G(5) = f(5) - 5^2 = 27 - 25 = 2$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (2,5)$ με
$G'(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) = 0 \Rightarrow$
$f'(\xi) - 2\xi = 0 \Rightarrow$ **f ' (ξ) = 2ξ.**

11. **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^4 + 5\chi^2 + 3\chi + 1 = 0$ έχει το πολύ 2 πραγματικές ρίζες .**

Έστω f(x) = $\chi^4 + 5\chi^2 + 3\chi + 1$

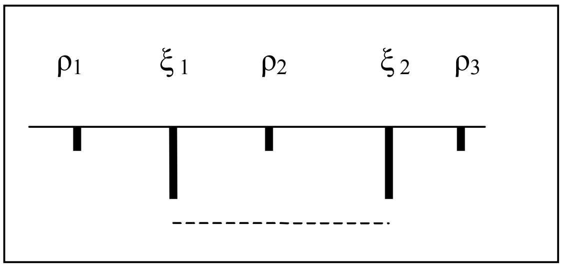
Έστω ότι έχει 3 ρίζες στο, τις ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ (αφού ρ_1, ρ_2 , ρ_3 ρίζες της f)

- f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πολυωνυμική
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση f ‘ (x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ_1 στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) , άρα $\boxed{f'(\xi_1) = 0}$

- f συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$
- f παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) , ως πολυωνυμική
- $f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση f ‘ (x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ_2 στο διάστημα (ρ_2, ρ_3) , άρα $\boxed{f'(\xi_2) = 0}$



Είναι f ‘(x) = $4x^3 + 10x + 3$

Δεν φαίνεται να καταλήγουμε σε κάποιο άτοπο (θα μπορούσε π.χ η f’ (x) = 0 να έχει Δ < 0 και να είναι αδύνατη)

Όμως
- f ΄ συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- f ΄ παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , ως πολυωνυμική
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση (f ‘ (x)) ΄ = 0 ⇔ f ΄΄(χ)= 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) , , άρα $\boxed{f''(\xi) = 0 \ \ (\mathrm{I})}$

Αλλά f ‘ ‘(x) = $12x^2 + 10$ οπότε η f ΄΄(χ)= 0 δεν έχει καμία ρίζα στο R .

Επομένως η πρόταση (Ι) δεν ισχύει αφού δεν υπάρχει τέτοιο ξ

Άρα αυτό που υποθέσαμε , ότι δηλαδή η f(x) έχει 3 ρίζες , είναι άτοπο .

‘Άρα η f έχει το πολύ 2 ρίζες.

12. **Έστω g συνεχής στο [α , β] και παραγωγίσιμη στο (α , β) με $\frac{g(a)}{\gamma-\beta}=\frac{g(\beta)}{\gamma-\beta}$ [1] και γ $\in$(α,β) . Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in$ (α,β) με g ' (ξ) (γ –ξ) = g (ξ) .**

Έστω **φ(χ) = g(x) (γ – χ)**
Είναι
φ(χ) συνεχής στο [α,β]
φ(χ) παραγωγίσιμη στο (α,β)
φ(α) = g(α) (γ – α)
φ(β) = g(β) (γ – β)
Λόγω όμως της [1]
g(α) (γ – α) = g(β) (γ – β) άρα
φ(α) =φ(β)

Πρόχειρο

g ' (ξ) (γ –ξ) = g (ξ)
βάζω όπου ξ το χ ⇔
g ' (x) (γ –ξ) = g (x)
μεταφέρω στο 1^{ο} μέλος ⇔
g ' (χ) (γ –χ) - g (χ) = 0 ⇔
g ' (χ) (γ –χ) + g (χ) (γ - χ) ΄= 0
⇔
(g(x) (γ –χ)) ' = 0

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ξ $\in$(α,β)
με **φ ' (ξ) = 0 [2]**
Όμως
φ ΄(χ) = **(g(x) (γ –χ)) ' = g ' (χ) (γ –χ) + g (χ) (γ - χ) ΄= g ' (χ) (γ –χ) - g (χ)**
Οπότε η [2] δίνει
φ ' (ξ) = 0 ⇔ **g ' (ξ) (γ –ξ) - g (ξ) =0 ⇔ g ' (ξ) (γ –ξ) = g (ξ)**
δηλαδή το ζητούμενο

13. **Έστω g συνεχής στο [α , β] και παραγωγίσιμη στο (α , β) με g(α)= g(β)=0.**
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in$ (α,β) με g ΄(ξ) + 3 g(ξ) = 0.

Πρόχειρο

g ΄(ξ) +3 g(ξ) = 0
βάζω όπου ξ το χ ⇔
g ΄(χ) + 3 g(χ) = 0
πολλ/ζω με e^{3x} ⇔
g ΄(χ) e^{3x} +3 g(χ) e^{3x} = 0
⇔
g ΄(χ) e^{3x} + g(χ) (e^{3x})' = 0

Έστω **φ(χ) = g(x) e^{3x}**
Είναι
φ(χ) συνεχής στο [α,β]
φ(χ) παραγωγίσιμη στο (α,β)
φ(α) = g(α) $e^{3α}$ = 0
φ(β) = g(β) $e^{3α}$ = 0
Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ξ $\in$(α,β)
με **φ ' (ξ) = 0 (1)**
Όμως φ ΄(χ) = (g(x) e^{3x}) ΄= g ΄(χ) e^{3x} + g(χ) (e^{3x})' = g ΄(χ) e^{3x} +3 g(χ) e^{3x}
= e^{x}(g ΄(χ) + 3 g(χ))
Οπότε η (1) δίνει
φ ' (ξ) = 0 ⇔ $e^{ξ}$(g ΄(ξ) + 3 g(ξ)) = 0 ⇔ g ΄(ξ) + 3 g(ξ)= 0 (αφού $e^{ξ} \neq 0$) ,
δηλαδή το ζητούμενο –

14. **Έστω g συνεχής στο [1 , 2] και παραγωγίσιμη στο (1 , 2) με g(2)= 4 g(1).**
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ (1,2) με ξ g ΄(ξ) = 2 g(ξ) .

Πρόχειρο

ξ g ΄(ξ) = 2 g(ξ)
βάζω όπου ξ το χ ⇔
χ g ΄(χ) = 2 g(χ)
πολλ/ζω με χ ⇔
$χ^2$ g ΄(χ) = 2 χ g(χ)
μεταφέρω στο $1^ο$ μέλος ⇔
$χ^2$ g ΄(χ) - 2 χ g(χ) ⇔
$χ^2$ g ΄(χ) - $(χ^2)$ ΄g(χ)
διαιρώ με $χ^2$ (χ≠0 αφού χ∈ (1,2)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 g'(x)-(x^2)' g(x)}{x^4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{x^2}\right)'=0$$

Έστω **φ(χ) =** $\frac{g(x)}{x^2}$

Είναι

φ(χ) συνεχής στο [1,2]

φ(χ) παραγωγίσιμη στο (1,2)

φ(1) = $\frac{g(1)}{1}=g(1)$

φ(2) = $\frac{g(2)}{2^2}=\frac{4g(1)}{4}=g(1)$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ξ ∈(α,β) με **φ ‘ (ξ) = 0 (1)**

Όμως

$$φ΄(χ) = \left(\frac{g(x)}{x^2}\right)' = \frac{x^2 g'(x)-(x^2)' g(x)}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 g'(x)-2xg(x)}{x^4}$$

Οπότε η (1) δίνει

φ ‘ (ξ) = 0 ⇔ $\frac{\xi^2 g'(\xi)-2\xi g(\xi)}{x^4}$ = 0 ⇔(αφού ξ ≠ 0)

$ξ^2$ g’(ξ) – 2 ξ g(ξ) = 0 ⇔ ξ g’(ξ) – 2 g(ξ) = 0 , δηλαδή το ζητούμενο

15. **Να αποδείξετε ότι** $\frac{1}{5}<\frac{\ln 5-\ln 2}{3}<\frac{1}{2}$.

Έστω f(x) = lnx και εφαρμόζω ΘΜΤ στο [2,5] άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈(2,5) τέτοιο ώστε f ' (ξ) = $\frac{1}{ξ}$ = $\frac{\ln 5-\ln 2}{5-2}=\frac{\ln 5-\ln 2}{3}$ (1)

(Είναι f '(x) = $\frac{1}{x}$ οπότε f'(ξ)= $\frac{1}{ξ}$) Όμως :

ξ∈(2,5) ⇒2<ξ<5⇒ $\frac{1}{2}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{2} \overset{[1]}{\Rightarrow} \frac{1}{5}<\frac{\ln 5-\ln 2}{3}<\frac{1}{2}$

16. **Να αποδείξετε ότι αν χ>0 είναι χ+1 < e^x < xe^x +1 .**

Επειδή x> 0 έχουμε

χ+1 < e^x < xe^x +1 $\Rightarrow$ **χ < e^x - 1 < xe^x** $\Rightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \Rightarrow e^0 < \frac{e^x - e^0}{x - 0} < e^x$

Έστω f(x) = e^x και εφαρμόζω ΘΜΤ στο [0,χ] άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(2,5)

τέτοιο ώστε f ' (ξ) = $e^ξ$ = $\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$ [1]

Όμως 0 < ξ < χ και αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα άρα

e^0 < $e^ξ$ < e^x $\overset{[1]}{\Rightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ $\Rightarrow$ χ < e^x - 1 < xe^x $\Rightarrow$ χ+1 < e^x < xe^x +1 , δηλαδή το ζητούμενο .

17. **Να αποδείξετε ότι αν χ$\in$ [0 , π/2] είναι συνχ+χημχ ≥ 1.**

Έστω f(x) = **συνχ + χημχ - 1 (τα πήγαμε όλα στο πρώτο μέλος)**
και εφαρμόζω ΘΜΤ στο [0,χ] άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(2,5) τέτοιο ώστε

f ' (ξ) = $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ $\Rightarrow$ f(x) = x f ' (ξ) = χ(ξ συνξ) [1]

Όμως
- χ > 0
- f ' (ξ) = ξ συνξ >0 , αφού ξ$\in$(0,χ) $\subset$ (0 , π/2)

Άρα :

[1] $\Rightarrow$ f(x) > 0 $\Leftrightarrow$ συνχ + χημχ - 1 > 0 $\Leftrightarrow$ συνχ + χημχ > 1 , δηλαδή το ζητούμενο .
Το ‘ = ‘ ισχύει όταν χ = 0

18. **Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2,6] και παραγωγίσιμη στο (2,6) και f(2) = 12 , f(6) = 4 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ , $\in$(2 ,6) ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(ξ, f(ξ)) , να είναι κάθετη στην ευθεία 4y – 2x+5=0**

Αρκεί να δείξω ότι ότι υπάρχει ξ , $\in$(2 ,6) ώστε f ‘ (ξ) = -2

Για την f ισχύουν οι συνθήκες του ΘΜΤ στο διάστημα [2,6] και άρα
άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(2,5) τέτοιο ώστε

f ' (ξ) = $\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{4 - 12}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ δηλαδή το ζητούμενο .

19. **Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2,12] και παραγωγίσιμη στο (2,12) και f(2) + 5= f(12) . Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 $\in$(2 ,12) με f ' (ξ_1) + f ' (ξ_2) =1**

Για την f ισχύουν οι συνθήκες του ΘΜΤ στα διαστήματα [2,7] και [7,12] άρα

- υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (2,7)$ τέτοιο ώστε

  $f'(\xi_1) = \frac{f(7)-f(2)}{7-2} = \frac{f(7)-f(2)}{5}$

- υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (7,12)$ τέτοιο ώστε

  $f'(\xi_2) = \frac{f(12)-f(7)}{7-2} = \frac{f(12)-f(7)}{5}$

Επομένως

- υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 $\in$(2 ,12) με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2) = \frac{f(7)-f(2)}{5} + \frac{f(12)-f(7)}{5}$ =

  $\frac{f(12)-f(2)}{5} = \frac{5}{5} = 1$, δηλαδή το ζητούμενο .

20. **Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και f(- 1) = α+β , f(0) = 2α+β , f(1) = 3α+β . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ $\in$ R με f '' (ξ) = 0**

Είναι

- f συνεχής στο [-1, 0]
- f παραγωγίσιμη στο (-1, 0)

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ με

$f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(1)}{0-(-1)} = \frac{2\alpha+\beta-a-\beta}{1} = \alpha$

Ακόμη

- f συνεχής στο [0, 1]
- f παραγωγίσιμη στο (0, 1)

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ με

$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3\alpha+\beta-2\alpha-\beta}{1} = \alpha$

<u>Τέλος</u>

- f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- f' παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\alpha$
-

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση $(f'(x))' = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) , , άρα $f''(\xi) = 0$

Ασκήσεις

4.5.1. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για τις συναρτήσεις

α) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, στο $[-1,2]$ β) $f(x) = 1 + ημ^2x$, στο $[0, π]$

γ) $f(x) = \ln(συνx)$, στο $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ δ) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$, στο $[0, 2]$

η) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 0 \\ x^3, x > 0 \end{cases}$, στο $[-1,2]$ θ) $f(x) = \ln x$, στο $[1,e]$

ι) $f(x) = x\,|x|$, στο $[-1,2]$

4.5.2. Να προσδιορίσετε τα α,β $\in \Re$ ώστε για την συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} x(x+\beta) + (x+\gamma), x \in [-1,0) \\ (a-1)x^2 + 2(x+1) - \gamma, x \in [0,1] \end{cases}$ να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle

στο $[-1,1]$ και έπειτα να βρεθεί το αντίστοιχο ξ.

<u>Rolle και ρίζες</u>

4.5.1. Αν $f(x) = (x+4)\cdot(x-\frac{1}{3})\cdot(x-2)\cdot(x-6)$ να βρείτε πόσες ρίζες έχει η $f'(x) = 0$ και σε ποια διαστήματα ανήκουν .

4.5.2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 6x^2 - 3x + 3 = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,2).

4.5.3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $\Re$.

4.5.4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + λ = 0$, $λ \in \Re$ έχει μια το πολύ ρίζα στο (2,3) , για κάθε $λ \in \Re$

4.5.5. Αν κ , λ , μ $\in \Re$ και $\frac{k}{5} + \frac{\lambda}{2} + \mu = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $kx^4 + λx + μ = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,1).

4.5.6. Αν α = β - γ να δείξετε ότι η εξίσωση $3\cdot α\cdot x^2 - 2βx + γ = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,1).

4.5.7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + λ = 0$ δεν μπορεί να έχει 2 πραγματικές ρίζες στο (0,1)

4.5.8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2v} + ax + b = 0$ ($v \in N^*$, $a,b \in R$) έχει το πού δυο πραγματικές ρίζες .

4.5.9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + αx^2 + βx + γ = 0$ με $α > 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες .

4.5.10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + αx + β = 0$, έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες .

4.5.11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 - 6x + 5 = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$

4.5.12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \cdot ημx + συνx$ έχει μόνο δύο ρίζες ,.στα $(-π,0)$ και στο $(0,π)$

4.5.13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + α\ x^3 + βx + γ = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\Re$ $(α,β > 0)$

4.5.14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = x+1$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα .

4.5.15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x - 1$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα .

4.5.16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $συνx = x$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στό $(0, π/2)$

4.5.17. Να δείξετε ότι η εξίσωση $α^x = x - β$, $0<α<1$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

4.5.18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $α^x = x$, $0<α<1$, έχει μόνο μια πραγματική ρίζα. στο $(0,1)$

4.5.19. Αν $α,β,γ \in \Re$ με $α^2 < 3β$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + αx^2 + βx + γ = 0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα

4.5.20. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\frac{2}{3})^x = 4x - 5$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα .

Υπαρξιακά θέματα στο Rolle

4.5.21. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α,β)$. Αν η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(α,β)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες στο $[α,β]$.

4.5.22. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2) - f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$

4.5.23. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $f(α) - f(β) = α^2 - β^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (α,β)$ ώστε $f'(ξ) = 2ξ$

4.5.24. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $f(α) - f(β) = α^3 - β^3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (α,β)$ ώστε $f'(ξ) = 3ξ^2$

4.5.25. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\gamma) = \dfrac{f(\alpha) - f(\gamma)}{\gamma - \beta}$

4.5.26. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με f(2) =2f(1) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (1,2)$ ώστε $f'(\gamma) = \dfrac{f(\gamma)}{\gamma}$

4.5.27. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α) = β και f(β) = α . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = -1$

4.5.28. Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ 2 φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η f(x) = 0 έχει το πολύ 2 ρίζες .

4.5.29. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α) = α και f(β) = β και f(γ) = γ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi) = 0$

4.5.30. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4+2x^3-7x^2-x+5$ και $g(x) = x^4-2x^3+2x^2+x-4$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα (1,2)

4.5.31. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [0,α] και παραγωγίσιμη στο (0,α) με f(0)=α και f(α) = 0 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\alpha)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο K(ξ, f(ξ)) να είναι κάθετη στην ευθεία y = x + 5

4.5.32. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ με f(e) = f(4)ln4 .Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x} + \ln x \cdot f'(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο (e,4).

4.5.33. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)\, e^{\lambda x}$ όπου f παραγωγίσιμη στο [α,β] και f(α) =f(β) = 0 Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

4.5.34. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{g(x)}$ όπου f,g παραγωγίσιμες στο [α,β] και f(α) =f(β) = 0 Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) .

4.5.35. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α,β] με f(α) – f(β) = ημα – ημβ , να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi) =$ συν ξ.

4.5.36. Έστω f παραγωγίσιμη στο (e, e^2) και συνεχής στο $[e, e^2]$ με $f(e^2) = 2 \cdot f(e)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (e,e^2)$ με $f'(\xi) \cdot \ln\xi^{\xi} = f(\xi)$.

4.5.37. Έστω f,g παραγωγίσιμες στο [0,1] με $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και f(0) =g(1) = 0 .Να δείξετε ότι η $\dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 0$ έχει μια ρίζα στο (0,1) .

4.5.38. Έστω f: [a,b] $\to\Re$ συνεχής στο [a,b] και παραγωγίσιμη στο (a,b) με f(a)=f(b) =0 Να δείξετε ότι .

α) Για την $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$, $c\notin[a,b]$, υπάρχει ξ με g' (ξ) = 0 .

β) Υπάρχει $x_0 \in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστα σης της f να διέρχεται από το σημείο M(c,0).

4.5.39. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

α) Συνεχείς στο [a,b] και παραγωγίσιμες στο (a,b)

β) Για κάθε $\chi\in$ [a,b] είναι $g(x) \neq 0$ και για κάθε $\chi\in$ (a,b) είναι $g'(x) \neq 0$

γ) f(b)g(a) = f(a)g(b).

να δείξετε ότι

α) Για την $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο [a,b].

β)Υπάρχει $\xi\in$ (a,b) Τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$

4.5.40. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο$\Re$, με $f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x) \neq 0$. Να δείξετε ότι μεταξύ δυο ριζών της f βρίσκεται μια ρίζα τουλάχιστον της g .

4.5.41. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο$\Re$. Να δείξετε ότι μεταξύ δυο ριζών της f βρίσκεται μια ρίζα τουλάχιστον της $f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

4.5.42. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο [α,β] με f(α)g(α) = f(β)g(β) . να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in$ (α,β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi) = 0$

4.5.43. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \subseteq \Re^*_+$ με f(α) =f(β) = 0 να δείξετε ότι :

α) Η εξίσωση $x\cdot f'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα χ_0 στο (α,β)

β) Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$ τότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική .

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο (x_0,$f(x_0)$) περνά από την αρχή των αξόνων.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

4.5.44. Να εφαρμόσετε ο ΘΜΤ για τις συναρτήσεις

α) $f(x) = x^3 - x$ στο [-2,1]

β) f(x) = lnx στο [1,e]

γ) $f(x) = x\,|x|$ στο $[-1, 2]$

4.5.45. Δίνεται η $f(x) = x^3 - x + 1$. Να βρεθεί $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε
$f'(\xi) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3}$

4.5.46. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \kappa x - 1, x \in [-1,1) \\ x^2 + x + \lambda, x \in [1,2] \end{cases}$ Να βρεθούν τα κ , $\lambda \in \Re$ ώστε για την f(x) να ισχύει το ΘΜΤ στο [-1,2] .

4.5.47. Αν β>α>0 δείξτε ότι : $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} < \ln\dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι
$\dfrac{1}{5} < \ln\sqrt[3]{2,5} < \dfrac{1}{2}$

4.5.48. Αν x>0 να δείξετε ότι $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}$

4.5.49. Αν x>0 να δείξετε ότι $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$

4.5.50. Αν 0<x<1 να δείξετε ότι $1+x < e^x < 1+ex$

4.5.51. Δίνεται f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [-1,1] τέτοια ώστε
$f(0) = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[-1,1]$ με $f''(\xi) = 0$.

4.5.52. Ἔστω συνεχής f : [0,λ] -> ℜ με f(0) =0 και f (λ) = λ .

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\lambda)$ με $f(\xi) = \lambda - \xi$.

β) Αν επιπλέον η φ είναι παραγωγίσιμη στο (0.λ), να δείξετε ότι υπάρ χουν ξ_1 , $\xi_2 \in (0, \lambda)$ με $0<\xi_1<\xi_2 < \lambda$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

4.5.53. Αν 0<α<1 να δείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$

4.5.54. Αν $0 < \beta \le \dfrac{\pi}{2}$ δείξτε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \le \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \le \dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$

4.5.55. Να δείξετε τα παρακάτω

α) $e^x > e\cdot x$, x>1 β) εφx >x ,$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ γ) συνx+χ ημx ≥ 1 $\chi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

δ) ln x ≤ x-1 , x>0 ε) $\dfrac{a}{b} > \dfrac{\varepsilon\varphi a}{\varepsilon\varphi b}$, $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$

στ) $x^2 - x < \ln(1+x) < x$,x> 0 ζ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{8} - 2 < 1$

4.5.56. Αν αe > βe > 1 να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha} > \beta^{\beta}$

4.5.57. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α) =f(β) να δείξετε ότι υπάρχουν x_1 , $x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $f'(x_1)+f'(x_2) = 0$

4.5.58. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ , ξ_1, $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$, $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε
$2 f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$

4.5.59. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α)=2β και f (β) = 2α . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Κ(ξ, f(ξ)) να είναι κάθετη στην ευθεία x –2y + 3 = 0.

4.5.60. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με f(1)=3 και f (2) = 6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της C_f στο οπίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4.5.61. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α) =f(β) . Με ΘΜΤ στα διαστήματα $[a,\frac{a+2\beta}{3}],[\frac{a+2\beta}{3},\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν x_1 , $x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $2f'(x_1)+f'(x_2) = 0$

4.5.62. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) να δείξετε ότι υπάρχουν x_1 , x_2 , $x_3 \in (\alpha,\beta)$ με
$f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)= 3\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha}$

4.5.63. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] και f(α) =α και φ(β) = β να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ με f(γ) = α+β-γ . Αν επιπλέον η f είναι και και παραγωγίσιμη στο (α,β) να δείξετε ότι υπάρχουν x_1 , $x_2 \in (\alpha,\beta)$ με
$f'(x_1)\cdot f'(x_2) =1$

4.5.64. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [0,1] τέτοια ώστε f (0) = 2 και για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $| f'(x) | \leq 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $1<f(x)<3$

4.5.65. Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο (1,4) με $| f''(x) | \leq$ ημα , $\alpha \in R$, $\chi \in [1,4]$. Αν η f έχει ακρότατο στο (1,4) να δείξετε ότι $| f'(1) +f'(4) | \leq 4$.

4.5.66. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και $f(x) \geq \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(x_0) = 0$

4.6 Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα 1

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και
- ***f συνεχής στο Δ***
- ***f ΄(x) = 0 σε κάθε x εσωτερικό του Δ***

Τότε η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο διάστημα Δ

Παρατηρήσεις

1. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει μόνο για διάστημα και όχι για ένωση διαστημάτων . π.χ για την $f(x)=\begin{cases}2 & ,x>0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$ είναι f '(x) =0 στο (-∝,1)∪(1,+∝) αλλά f(x) οχι σταθερή σε αυτό .
2. Στα κλειστά άκρα του Δ δεν μας ενδιαφέρει κάν η ύπαρξη παραγώγου
3. Έτσι για να αποδείξω ότι μια f είναι σταθερή αρκεί να αποδείξω ότι f ' (x) = 0 για κάθε x ∈ Δ

Θεώρημα 2

Έστω συναρτήσεις f , g ορισμένες στο διάστημα Δ και
- ***f , g συνεχείς στο Δ***
- ***f ΄(x) = g ' (x) σε κάθε x εσωτερικό του Δ***

Τότε υπάρχει c ∈ℜ ώστε f(x) = g(x) +c , δηλαδή οι f, g διαφέρουν κατά μια σταθερά c

Βασική εφαρμογή

Δίνεται η f : ℜ→ℜ είναι f ' (x) = f (x) ⇔ f(x) =c· e ^{x}

ευθύ "⇒ "

$$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\overset{\bullet e^x}{\Leftrightarrow} f'(x)e^x-e^xf(x)=0\overset{/e^{2x}}{\Leftrightarrow}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}=c\Leftrightarrow f(x)=ce^x$$

αντίστροφο "⇐ "

Αν f (x) = ce^x τότε f '(x) = (ce^x)' = ce^x . Άρα f '(x) = f(x)

<u>Θεώρημα 3</u>

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε διάστημα Δ

- ***Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο Δ***
- ***Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ***

Παρατηρήσεις

1. Είναι $\Delta = [\alpha,\beta]$ ή $\Delta = [\alpha,\beta)$ ή $\Delta = (\alpha,\beta]$ ή $\Delta = (\alpha,\beta)$ ή $\Delta = [\alpha,+\infty)$ ή $\Delta = (-\infty, \beta]$ ή $\Delta = (-\infty, +\infty) = \Re$

2. Τονίζουμε ότι στα άκρα του Δ δεν μας ενδιαφέρει ούτε το πρόσημο της f ' ούτε κάν η ύπαρξή της. Το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η συνέχεια της f στα άκρα του Δ εφόσον βέβαια κάποιο από αυτά είναι κλειστό .

3. ***Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει*** ($f \uparrow$ στο $\Delta \not\Rightarrow f'(x)>0$) . Πράγματι αφενός μπορεί η f να είναι μονότονη στο Δ αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη σε αυτό , αλλά και να είναι παραγωγίσιμη παλι δεν ισχύει . π.χ η $f(x) = 3x^3$ / $\Delta = [-2,2]$ είναι $\uparrow$ στο Δ αλλά $f'(x) = 9x^2 \geq 0$ και όχι $f'(x) > 0$

4. Γενικότερα
   αν $f'(x) \geq 0$ στο Δ τότε f απλά αύξουσα
   αν $f'(x) \leq 0$ στο Δ τότε f απλά φθίνουσα
   ακόμη
   αν $f'(x) > 0$ στο $(\alpha,\beta) - \{x_0\}$ αλλά f συνεχής στο x_0 τότε f γνησίως αύξουσα
   αν $f'(x) < 0$ στο $(\alpha,\beta) - \{x_0\}$ αλλά f συνεχής στο x_0 τότε f γνησίως φθίνουσα

5. Αν αντί για διάστημα Δ έχουμε $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ στο οποίο η f είναι συνεχής και η f ' διατηρεί σταθερό πρόσημο στα Δ_1, Δ_2 τότε η f είναι μονότονη κατά διαστήματα .

6. Στον πίνακα μονοτονίας βάζουμε
   - Τις τιμές στις οποίες η f δεν ορίζεται
   - Τις ρίζες της f '
   - Τα άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f

7. Η μονοτονία μιας συνάρτησης μας βοηθά στην ***επίλυση εξισώσεων*** και στην εύρεση του πλήθους των πραγματικών ριζών μιας εξίσωσης Θυμίζουμε ότι

   i. Αν f γνησίως μονότονη τότε η $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ . Έτσι αν $f(\alpha)=0$, $\alpha \in \Delta$ τότε η f έχει μοναδική ρίζα το α, Την ρίζα α συνήθως την βρίσκουμε " με το μάτι" (*προφανής*)

ii. Αν f $\downarrow$ στο (α, β] και f $\uparrow$ στο [β,γ) και f(β) = 0 , τότε το β μοναδική ρίζα της f στο (α,γ)

iii. ***Αν f είναι γνησίως μονότονη τότε η f είναι "1-1"***
Αυτό μας βολεύει στις ασκήσεις που θέλουμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής
f(g(x)) = f(h(x)) $\Leftrightarrow$ (αφού f "1-1") g(x) =h(x)

iv. Άν μια άσκηση μας ζητά την ***εύρεση του πλήθους των ριζών μιας εξίσωσης f (x)=0*** τότε :
   1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της f και βρίσκουμε τα διαστήματα Δ_1 , Δ_2 , ..Δ_ν στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη .
   2. Βρίσκουμε τα σύνολα τιμών f(Δ_1), f(Δ_2) , ..f(Δ_ν) των παραπάνω διαστημάτων
   3. Αν 0$\in$ f(Δ_i), i =1, 2, .., ν τότε η f(x)= 0 έχει μοναδική ρίζα στο f(Δ_i)
   Προσοχή όμως αν ένα κοινό άκρο των διαστημάτων Δ_i , Δ_{i+1} είναι ρίζα το μετράμε μόνο μια φορά για αυτό είναι καλό να ορίζουμε τα διαστήματα (Δ_i , Δ_{i+1}] .

8. Η μονοτονία μας χρησιμεύει και στην απόδειξη ανισοτήτων :
$$f\uparrow : \alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$$
$$f\downarrow : \alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$$

9. Σε αρκετές ασκήσεις που ζητείται η μονοτονία της f ή η απόδειξη μιας ανισότητας βρίσκουμε την f ' και το πρόσημό της δεν είναι προφανές. Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε f '' ,αν χρειαστεί f ''' κ.τ.λ εώς ότου το πρόσημο να είναι προφανές

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ***, για*** $x > 0$

Έστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ *Είναι* $f'(x) = e^x - 1 - x$ *. Το πρόσημό της όμως δεν είναι προφανές οπότε βρίσκω την f '' .Είναι*
$f''(x) = e^x - 1$ *και* $f''(x) > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$.
Άρα για $x > 0$ *είναι* $f''(x)>0 \Rightarrow [f'(x)]' > 0$ *δηλαδή η* $f'(x) > 0$ *δηλαδή f γνησίως αύξουσα για* $x > 0$
Ακόμη $f'(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$ *και* $f(0) = 0$
Έτσι
$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ *άρα f γνησίως αύξουσα για* $x > 0$
Οπότε
$x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ *, για* $x > 0$

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

Σταθερή συνάρτηση

4.6.1. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν

α) $f'(x) = 3x^2+2x+5$ και $f(0) =1$

β) $f'(x) = 2συνx - ημx$ και $f(π) =2$

γ) $f''(x) = 4e^{-2x} + 6x+2$ και $f(0) = f'(0) =1$

δ) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$, $f(1) = \ln 2$

ε) $f'(x) = x\,(2\,συνx - x\,ημx)$,$f(π) = 0$

στ) $f'(x) = \dfrac{συνx - ημx}{e^x}$, $f(0) =10$

z) $f'(x) = ημx - x^2$, $f(0) = 0$

4.6.2. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν

α) $f'''(x) = 24x+12$ και $f(0) = f'(0) = f''(0) =1$

β) $f'(x) = ημ3x + συν2x$ και $f(0) = -1/3$

γ) $f'(x) = 2e^{2x} + \dfrac{1}{x}$ $f(1) = e^2$

δ) $f'(x) = e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$ και $f(1) =1$

ε) $f'(x) = \dfrac{2xημx - x^2συνχ}{ημ^2x}$, $χ\neq κπ$, $f\left(\dfrac{π}{2}\right)= \dfrac{5π^2}{4}$

4.6.3. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ και $f(-1) =1$

4.6.4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημ^6x + συν^6x - \dfrac{3}{2}(ημ^4x + συν^4x)$

είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε την τιμή της

4.6.5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημ^6x + συν^6x +3\,ημ^2x\,συν^2x$ είναι σταθερή στο $\Re$ και να βρείτε την τιμή της

4.6.6. ***Δίνεται η f : $\Re\to\Re$ με . Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) =c\cdot e^{-x}$***

4.6.7. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν $(x-2)f'(x) = 2x^2 - 5x+2$ για $χ\in\Re$ και $f(3) = 7$.

4.6.8. Να βρεθεί η συνάρτηση f όταν $x f'(x) = 0$ για $χ\in\Re$ και $f(-1) = 5$.

4.6.9. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f και g με $f(0)=1$, $g(0)=1$. Αν ισχύει $f'(x) = g^2(x)$ και $f^2(x) + g'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση $φ(x) = f^3(x) +g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\Re$

β) $f^3(x) +g^3(x) =2$ για κάθε $χ\in\Re$

4.6.10. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f και g με $f(0)=0$, $g(0)=1$. Αν ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $f(x) + g'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι
α) η συνάρτηση $\varphi(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\Re$
β) $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $\chi \in \Re$

4.6.11. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ με $f'(x) = 2f(-x)$. Να αποδείξετε ότι
α) $f'(-x) = 2f(x)$
β) η $\varphi(x) = f^2(x) + f^2(-x)$ είναι σταθερή.

4.6.12. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ με $f''(x) + f(x) = 0$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι
α) η $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.
β) Να βρεθεί η $\varphi(x)$

4.6.13. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ με $f''(x) + f(x) = 0$ και $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$. Να αποδείξετε ότι
α) η $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.
β) $f(x) = 2$ συνx $+ 3$ημx

4.6.14. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ με $f''(x) - f(x) = 0$ και $f(0) = f'(0)$. Να αποδείξετε ότι
α) η $\varphi(x) = [f(x)]^2 - [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.
β) $f(x) = f'(x)$
γ) $f(x) = c \cdot e^x$

4.6.15. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f και g με $f'(x)\, g(x) = f(x)\, g'(x)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι σταθερή.

4.6.16. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ με $f'(x) - 3f(x) = 0$ και $f(0) = 3$. Να βρεθεί ο τύπος f.

4.6.17. Αν για την συνάρτηση f είναι $f'(x^2+2x+1) = 3x+1$ για $\chi \geq 1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$

4.6.18. Αν για την συνάρτηση f είναι $f'(x^3) = 2x^3+1$ για $\chi \in \Re$ και $f(1) = 3$, να βρεθεί ο τύπος της f.

4.6.19. Δίνεται η $f: \Re \to \Re^*$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re$.
α) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίσιμη σε όλο το R
β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

4.6.20. Δίνεται η $f: \Re \to \Re$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(0) = 2$ και $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x,y \in \Re$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$
β) $f'(x) = 2$ για $\chi \in \Re$
γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.

4.6.21. Δίνεται η $f : \Re \to \Re$ με $f''(2x-1) = 12x - 6$ για κάθε $x \in \Re$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 1 είναι $y = 3x+2$, να βρεθεί ο τύπος της f

4.6.22. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f :(1, +\infty) \to \Re$ αν $\frac{f'(x)}{f(x)} + x\ln x = 0$, για $\chi > 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη e είναι κάθετη στην ευθεία $x - y = 2000$

4.6.23. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f και g με $f(0) = g(0)$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $\chi \in \Re$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(x) = g(x)+cx$, $c \in \Re$

β) Αν ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 0 < \rho_2$ είναι ρίζες της $g(x) = 0$ τότε η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$

4.6.24. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f :(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \Re$ με $f(0)=1$ και

$f'(x)$ συνx $= f(x)$ (συνx –ημx) για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να αποδείξετε ότι

$f(x) = e^x$συνx

4.6.25. Δίνεται η $f : \Re \to \Re$ με $f''(x) = f(x)$ και $f(0)= f'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι

α) $f'(x) + f(x) = 2e^x$

β) $f(x) = e^x$.

4.6.26. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με $f(0) = 0$ και $f'(x)\, e^{f(x)} = 2x$, για $x \in \Re$.

4.6.27. Να βρεθεί η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ όταν

$g(0) = 1992$ και $g'(x)$ συνx + $g(x)$ ημx = $g(x)$ συνx για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(θέμα πανελληνίων 1992)

Μ ο ν ο τ ο ν ί α

4.6.28. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ **γ)** $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3$

δ) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$

4.6.29. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ β) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ **γ)** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

4.6.30. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = x - \ln x$ β) $f(x) = e^x - x + 1$

γ) $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ δ) $f(x) = x^x$

4.6.31. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, **β)** $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$,

γ) $f(x) = \ln x + x + 1$, **δ)** $f(x) = x + e^{x-1} + 1$

4.6.32. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 (2\ln x - 1) - 8x(\ln x - 1)$.

β) $f(x) = x + e^x (\etaμx + συνx - 1) - 2\etaμx$, $-\pi < x < \pi$.

4.6.33. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

α) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 9x^2 + 12x + 16, x < 1 \\ 2x^3 - 27x^2 + 84x - 20, x \geq 1 \end{cases}$

β $f(x) = \begin{cases} -12(x+2)e^{-x}, x \leq 0 \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 24, x < 0 \end{cases}$

***

4.6.34. Να βρεθούν οι τιμές του $α \in \Re$ ώστε η $f(x) = 4x^3 - 3αx^2 + 12x + 2$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

4.6.35. Να βρεθούν οι τιμές του $α \in \Re$ ώστε η $f(x) = 2x^3 - 3(α - 1)x^2 + 6(1-α)x + 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

4.6.36. Να βρεθούν οι τιμές του $α \in \Re$ ώστε η $f(x) = (α+2)x^3 - 3αx^2 + 9αx + 4$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

***

4.6.37. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $x^2 + x + \ln x = 2$ β) $4^x + 3^x = 5^x$

γ) $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$ δ) $2e^x = 2 + 2x + x^2$

4.6.38. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$ β) $e^x = 1 + \ln(x+1)$

γ) $e^x + x^2 = x + 1$ δ) $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 4^x = 5 \cdot 6^x$

ε) $3x^4 + x + 2\ln x = 4$ στ) $e^x + e^{2x} = 2$

ζ) $x + \ln x = 1$ η) $x +$ συνx $= 1$

4.6.39. Να λυθεί η εξίσωση $x^x = 2^{x+4}$, $x > 0$.

4.6.40. Να λυθεί η εξίσωση $x^5 + 2^{x-1} = 3 - x$.

4.6.41. Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - 12x^2 + 24 - 24$ συνx $= 0$

4.6.42. Να λυθεί η εξίσωση ln(x+1) = $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

4.6.43. α) Να λυθεί η εξίσωση $x^3+3^x+x=1$
β) Να λυθεί η εξίσωση $(x^2-3x+2)\,3+3^{x2-3x+2}+x^2=3x-1$

4.6.44. Να λυθεί η εξίσωση $\ln(\frac{e}{x})=x^2$

4.6.45. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x)=x^2(6\ln x-1)-x^3-2$ και $g(x)=x^3+2x^2-6x-1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο .

4.6.46. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x)=e^x-1$ και $g(x)=x^2+xe^x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο .

4.6.47. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $3x^2+12x=3+2x^3$

4.6.48. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3+1=3x^2$

4.6.49. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3=6x-3$

4.6.50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$
α) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) =0 έχει 4 ακριβώς πραγματικές ρίζες , δυο θετικές και 2 αρνητικές .

4.6.51. α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$$x^2-2=(1-x)(\ln x-2)$$
β) Να αποδείξετε ότι $x^2-1\geq(1-x)(\ln x-2)$

4.6.52. Αν $\alpha,\beta\in\Re$ με $\alpha^3+3^\alpha=\beta^3+3^\beta$ να αποδείξετε ότι α = β

***

4.6.53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Να αποδείξετε ότι

α) ημx – xσυνx >0 για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

β) η f είναι γνησίως φθίνουσα .

γ) αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι β ημα > αημβ *και* 2β <πημβ

δ) να αποδείξετε ότι εφx> x , $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

4.6.54. Δίνεται η συνάρτηση f(x) =2 ημx +εφx –3x , $x\in[0,\frac{\pi}{2})$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι ημ2x +ημx ≥ 3x·συνx , $x\in[0,\frac{\pi}{2})$.

4.6.55. Να αποδείξετε ότι $x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

4.6.56. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$, $x \in [\,0 , +\infty)$.

4.6.57. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$, $x \in [\,0 , +\infty)$.

4.6.58. Να αποδείξετε ότι $x^4 - 12x^2 > 24\,\sigma\upsilon\nu x - 24$

4.6.59. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

4.6.60. Να αποδείξετε ότι $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2$, $x \in \Re$.

4.6.61. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} > \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$

4.6.62. α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)\ \ln(\frac{\ln x}{x})$

β) Αν α>β>e να αποδείξετε ότι $\alpha^{\beta} < \beta^{\alpha}$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{3}}$ και 3.

4.6.63. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x \geq x^e$, για $x > 0$

β) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για $x > 0$

4.6.64. Αν $\alpha,\beta \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha(1-\beta)} < \beta^{\beta(1-\alpha)}$

4.6.65. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + x$, $\alpha > 1$

β) Να λυθεί η ανίσωση $a^{x^2-2x} - a^{x-2} \leq -x^2 + 3x - 2$, $\alpha > 1$

4.6.66. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$

β) Να λυθεί η εξίσωση $a^{x^2-4} - a^{x-2} \leq x^2 - 4 - (x-2)$, $0 < \alpha < 1$

4.6.67. Να αποδείξετε ότι $(2-x)\,e^{x-1} \leq 1$, $x \in \Re$.

4.6.68. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $e^{\pi} > \pi^{e}$

γ) Να αποδείξετε ότι $e^x > x^e$, $x > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$, για $\alpha \geq e$.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

4.6.69. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με
α) f, g συνεχείς στο [α,β]
β) f(α) = g (α)
γ) f '(x) > g ' (x) για κάθε x∈[a,b]
Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈(a,b) ισχύει f(x) >g(x).

4.6.70. Αν για κάθε x ∈ℜ είναι f' (x) <0 και g '(x) > 0 να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο .

4.6.71. Έστω η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) . Αν x_0 ∈(α,β) με f ' (x)<0 για x∈ (α, x_0) και f ' (x) > 0 για x∈ (x_0 , β) να αποδείξετε ότι f ' (x_0) = 0 (*χρήση Fermat*)

4.6.72. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] , α>0 και η f ' αύξουσα σε αυτό το διάστημα να αποδείξετε ότι
α) Η συνάρτηση g(x) = x f '(x) – f(x) είναι αύξουσα στο [α,β].
β) Αν f (α) = f ' (α) = 0 τότε η h(x) = $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο [α,β] .

4.6.73. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και f(α) = f(β) =1 και f '' (x) > 0 για κάθε x ∈ [α,β] , να αποδείξετε ότι f(x) <1 για κάθε x∈(α,β) .

4.6.74. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ και f '' (x) < 0 για κάθε x ∈ℜ να αποδείξετε ότι f(x) ≤ f '(α) (x-α) +f(α) , α∈ℜ

4.6.75. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και f(α) = f(β) =0 και f '' (x) < 0 για κάθε x ∈ [α,β] , να αποδείξετε ότι f(x) >0 για κάθε x∈(α,β) .

4.6.76. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] και f(0) = f(1) =0 και f '' (x) > 0 για κάθε x ∈ [0,1] , να αποδείξετε ότι f(x) <0 για κάθε x∈(0,1) .

4.6.77. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [1,e] και 0 < f(x) <1 και f ' (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [1, e] να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό γ ∈(1,e) τέτοιο ώστε f(γ) + γlnγ = γ .

4.6.78. Αν f :ℜ →ℜ παραγωγίσιμη με f(0) = 0 και η f ' είναι γνησίως φθίνουσα , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = $\dfrac{f(x)}{x}$, x>0 είναι γνησίως φθίνουσα .

4.6.79. Έστω συνάρτηση f 3 φορές παραγωγίσιμη με f(1) =f '' (1) = f '''(1) =0 και f '''(x) >0 για κάθε x∈ℜ
α) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
β) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις f '(x) = 0 και f(x) = 0 έχουν μοναδική ρίζα.

4.6.80. Έστω $f : \Re \to \Re$ με $f(0) = 1$ και $f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι

α) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $f(x) < f'(x)$.

β) Υπάρχει $\xi \in \Re$ ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$

4.6.81. Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

α) Υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) = f'(\xi) \cdot x$ για $x > 0$

β) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα .

4.6.82. Έστω f ,g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\Re$ τέτοιες ώστε $f(2) = g(2)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για $x \in \Re$.

Να αποδείξετε ότι

α) $g(x) = f(x) + x - 2$.

β) Αν ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 2 < \rho_2$, ρίζες της f(x) τότε η g έχει μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)

γ) Αν x_1 , x_2 με $x_1 < x_2$, ρίζες της g(x) τότε η εξίσωση $f'(x) + 1 = 0$ έχει μια ρίζα στο (x_1, x_2)

4.6.83. Έστω f ,g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\Re$ τέτοιες ώστε $f(1) = g(1)$, $f(0) = g(0) + 2$ και $f''(x) = g''(x)$ για $x \in \Re$.

Να αποδείξετε ότι

α) $f(x) - g(x) = -2x + 2$.

β) Αν ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$, ρίζες της f(x) τότε η g έχει μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)

γ) Αν x_1 , x_2 με $x_1 < x_2$, ρίζες της g(x) τότε η εξίσωση $f'(x) - 2 = 0$ έχει μια ρίζα στο (x_1, x_2)

4.6.84. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - x + 1$ και $g(x) = x(1 - \ln x) - 1$

α) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1 \leq x \ln x$

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$

4.6.85. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1+x) - x$ και $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(x+1)$

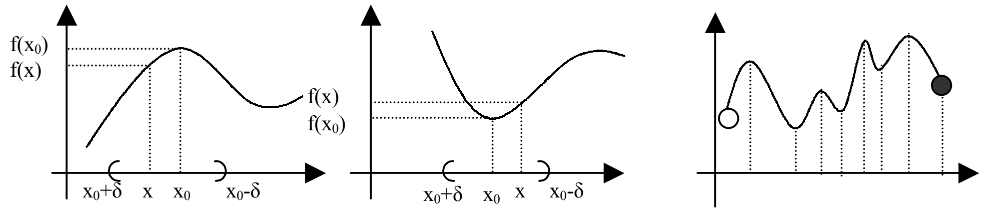
α) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία στο $(0, +\infty)$

β) Να δείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

4.7 Τοπικά ακρότατα

1. Έστω f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και έστω $x_0 \in \Delta$



1. Λέμε ότι η f παρουσιάζει **στο** $x_0 \in \Delta$ ***τοπικό μέγιστο*** (Τ.Μ .) **το** $f(x_0)$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
2. Αν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **ολικό μέγιστο** , το $f(x_0)$
3. Λέμε ότι η f παρουσιάζει **στο** $x_0 \in \Delta$ ***τοπικό ελάχιστο*** (Τ.Ε .) **το** $f(x_0)$ όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
4. Αν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **ολικό ελάχιστο** , το $f(x_0)$
5. Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα.**
6. Τα ολικά μέγιστα και τα ολικά ελάχιστα της f λέγονται **ολικά ακρότατα .**

Παρατηρήσεις

1. Κάθε ολικό ακρότατο της f είναι και τοπικό ακρότατο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

2. Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

3. Αν $\Delta = [\alpha,\beta]$ τότε μπορεί το ακρότατο να παρουσιάζεται σε κάποιο άκρο του διαστήματος.

2. Θεώρημα Fermat

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ με

- x_0 εσωτερικό του Δ
- η f παραγωγίσιμη στο x_0
- η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0

Τότε
$\mathbf{f'(x_0) = 0}$.

Δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, είναι παράλληλη στον άξονα xx ' .

Παρατηρήσεις

1. Η f δεν είναι απαραίτητο ούτε να είναι παραγωγίσιμη ούτε συνεχής σε άλλα σημεία εκτός του x_0.

2. Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat δεν ισχύει .Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ παραγωγίζεται στο 0 και μάλιστα $f'(0) = 0$ αλλά το 0 δεν είναι τοπικό ακρότατο .

3. Η πρώτη απαίτηση του Θεωρήματος Fermat είναι ουσιαστική . Δηλαδή το θεώρημα εφαρμόζεται μόνο για εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ.
   Πράγματι
   Η συνάρτηση $f(x) = x+1$, $\Delta = [-1,2]$ έχει ακρότατο στο 2 το $f(2) = 3$ αλλά $f'(2) = 1 \neq 0$
   Φυσικά όταν $\Delta = (\alpha,\beta)$ δηλαδή ανοικτό τότε η λέξη εσωτερικό περιττεύει.

4. **Κ ρ ί σ ι μ α** ονομάζονται τα **εσωτερικά σημεία x_0 του Δ** στα οποία η f
   α) Είτε δεν είναι παραγωγίσιμη είτε
   β) είναι παραγωγίσιμη και $f'(x_0) = 0$ **(Σ τ ά σ ι μ α σ η μ ε ί α)**

5. ***Που λοιπόν αναζητώ τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f ;***

   Γενικά τα αναζητώ
   α) στα κλειστά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της
   β) στα σημεία όπου $f'(x) = 0$
   γ) στα σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται .

   Ειδικότερα

Α) Αν $\Delta = (\alpha,\beta)$ και f παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε τα τοπικά ακρότατα τα αναζητώ εκεί οπού μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος , $f'(x_0) = 0$.

Β) Αν $\Delta = [\alpha,\beta]$ και f συνεχής στο (α,β) τότε τα τοπικά ακρότατα τα αναζητώ
α) στα άκρα α και β
β) στα εσωτερικά σημεία του (α,β) όπου $f'(x) = 0$
γ) στα εσωτερικά σημεία του (α,β) όπου η f δεν παραγωγίζεται .

Γ) Αν $\Delta = \Re$ και f συνεχής στο $\Re$ τότε τα τοπικά ακρότατα τα αναζητώ

α) στα σημεία όπου $f'(x) = 0$
β) στα σημεία όπου η f δεν παραγωγίζεται .

Δ) Αν $\Delta = \Re$ και f παραγωγίσιμη στο $\Re$ τότε τα τοπικά ακρότατα τα αναζητώ
στα σημεία όπου $f'(x) = 0$

3. **Κριτήριο πρώτης παραγώγου**

Για την εύρεση τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f , με την βοήθεια του πρόσημου της f ' χρησιμοποιούμε το εξής Θεώρημα
.

Έστω συνάρτηση f **π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η** στο (α, β) ,με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in$ (α,β) στο οποίο όμως είναι συνεχής . Τότε

- Αν f ' (x) > 0 στο (α,x_0) και $f'(x_0) < 0$ στο (x_0, β) το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β)

x	α x_0	β
f '(x)	+	-
f (x)	↗	↘

- Αν f ' (x) < 0 στο (α,x_0) και $f'(x_0) > 0$ στο (x_0, β) το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α,β)

x	α x_0	β
f '(x)	–	+
f (x)	↘	↗

- Αν η f διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $(\alpha ,x_0) \cup (x_0, \beta)$ το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Επομένως για να είναι το x_0 Θέση τοπικού ακροτάτου πρέπει να είναι συνεχής στο x_0 και να αλλάζει πρόσημο η f' εκατέρωθεν του x_0

Παράδειγμα

Έστω f(x) = $\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30, x < 1 \\ x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x - 20, x \geq 1 \end{cases}$ Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα.

Επειδή $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) = 17$, η f είναι συνεχής και στο $x_0 =1$, άρα σε όλο το $\Re$

Αν x < 1 , $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, x= 2 (απορ)

Αν x > 1 , $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x + 48 = 4(x-3)(x-2)(x+2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, x = -2 (απορ) , x=3

Στο $x_0 = 1$ δεν παραγωγίζεται ,όμως αυτό καθόλου δεν μας ενδιαφέρει γιατί είναι η f συνεχής σε αυτό . Είναι μάλιστα και τοπικό ακρότατο αφού όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα η f ' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 .

x		-1		1		2		3	
f '(x)	+	○	-						
f '(x)					+	○	-	○	+
f '(x)	+	○	-	‖	+	○	-	○	+
f (x)	↗		↘		↗		↘		↗
		TM		TE		TM		TE	

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.7.1. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

α) $f(x) = |x^2 - 1|$ β) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

γ) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ δ) $f(x) = \begin{cases} x + 2\sqrt{x}, x \geq 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x, x < 0 \end{cases}$

ε) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, x < 0 \\ x^2 - 6x, x \geq 0 \end{cases}$

4.7.2. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x - 1$ β) $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)^3$
γ) $f(x) = x^2 - 8x^2 + 5$

4.7.3. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = xe^x$ β) $f(x) = x\ln x$ γ) $f(x) = e^x - x$ δ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ε) $f(x) = e^{x^2} - 1$ στ) $f(x) = (x+1)e^{x^2}$

4.7.4. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ β) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ γ) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

4.7.5. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = \ln(\ln x) - \ln x$ β) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1} + \ln(x - 1)$

γ) $f(x) = x - 2^x$ δ) $f(x) = x^x e^{2-x}$ ε) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$

4.7.6. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων *(Κριτήριο 2ας παραγώγου)*

α) $f(x) = 3\eta\mu x + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\frac{1}{x})$

4.7.7. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 & ,1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 4 & ,2 < x \leq 3 \\ -2x + 8 & ,3 < x \leq 4 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2, x < 2 \\ -x^2 + 6x - 8, x \geq 2 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, x \le 0 \\ x^2 e^{-x}, x > 0 \end{cases}$ δ) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \ge 0 \\ \frac{1}{x}, x < 0 \end{cases}$

4.7.8. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-1)^2, x < 1 \\ -(x^2 - 4x + 3)^2, x \ge 1 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} 1 - ημx, x \in [-π, 0) \\ συνx - x, x \in [0, 2π] \end{cases}$

4.7.9. Να βρεθούν τα (ολικά) ακρότατα ,καθώς και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ στο $Δ = [-2,2]$, β) $f(x) = x - ημ2x$, $Δ = (-\frac{π}{2}, \frac{π}{2})$

γ) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $Δ = [0,1]$ δ) $f(x) = x^x$, $x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

ε) $f(x) = 2$ συνx $+ 2\ln(1-$ συνx) $x \in (0,π)$

4.7.10. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = e^x + 2συνx + e^{-x}$$ (*παραγωγίστε 4 φορές*)

4.7.11. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 (1 - 3\ln x) - 36x(1 - \ln x)$$

***

4.7.12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a + \ln x}{x}$. Να βρεθεί το α αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει Τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$

4.7.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + αx + \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$. Να βρεθεί το α αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει Τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -\frac{1}{2}$

4.7.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - αx^2 + βx - 3$. Να βρεθούν τα α , β αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει Τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1$, $x_2 = -5/9$

4.7.15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2βx + α\ln x^2 + 4$. Να βρεθούν τα α , β αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει Τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

4.7.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{e^{2ax}}$. Να βρεθεί το $\alpha > 0$ αν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει Τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \dfrac{1}{2e}$

4.7.17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

β) Να βρείτε την τιμή του α ώστε το τοπικό μέγιστο να είναι 3πλάσιο του τοπικού ελαχίστου.

4.7.18. Αν $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + \beta}{x - 1}$, και το $f(-1) = 2$ είναι τοπικό ακρότατο της f να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

4.7.19. Αν $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3x + 4\alpha$, να βρεθεί το α , ώστε η f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

***

4.7.20. Αν $x > 0$ και ισχύει $\alpha^x \geq x^\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$ ($0<\alpha\neq1$)

4.7.21. Αν $\alpha > 0$ και ισχύει $\alpha^x \geq (\dfrac{ax}{\nu})^\nu$, για κάθε $x>0$, $\nu\in N^*$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

4.7.22. Αν $x > 0$ και ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$ ($0<\alpha\neq1$)

4.7.23. Αν $x > 0$ και ισχύει $\alpha^x \geq \alpha + e\ln x$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$ ($0<\alpha\neq1$)

4.7.24. Αν ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq 2$,για κάθε $x \in \Re$ να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$ ($\alpha,\beta>0$)

4.7.25. Αν ισχύει $2\alpha^x + 3\beta^x + 4\gamma^x \geq 9$,για κάθε $x \in \Re$ να αποδείξετε ότι $\alpha^2 \beta^3 \gamma^4 = 1$ ($\alpha,\beta,\gamma>0$)

4.7.26. Αν ισχύει $(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} + (\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$,για κάθε $x \in \Re$ να αποδείξετε ότι οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ($\alpha,\beta,\gamma>0$)

4.7.27. Έστω $f(x) = \alpha^{\ln x} + \beta^{x-1}$, με α, β θετικούς και $\alpha+\beta = \dfrac{5}{2}$, $x>0$. Αν $f(x) \geq 2$, να βρεθούν τα α, β

4.7.28. Έστω $f(x) = \alpha_1^x + \alpha_2^x + \ldots + \alpha_\nu^x$, με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu > 0$. Αν $f(x) \geq \nu$, να αποδείξετε ότι $\alpha_1^x \cdot \alpha_2^x \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu^x = 1$

***

4.7.29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 3$

α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x) = 0
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
ε) Να αποδείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα της f και το σημείο Ο(0,0) είναι συνευθειακά.

4.7.30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x) = 0
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

4.7.31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{1}{x-3}$
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x) = 0
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

4.7.32. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x- elnx
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να αποδείξετε ότι $\pi^e < e^\pi$
δ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0

4.7.33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$.Να βρεθούν οι f ', f '' και έπειτα:
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1+\ln(x+1)$, $x > -1$
δ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0
ε) Αν $\alpha^x \geq 1+\ln(x+1)$, $x>-1$, να αποδείξετε ότι α = e

4.7.34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{-2} \ln x$
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\ln x}{x^2} < \dfrac{e}{2}$, $x > 0$
δ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2} \geq x^{2e}$,$x > 0$
ε) Αν $a^{x^2} \geq x^{2a}$ για $x>0$ να αποδείξετε ότι α = e

4.7.35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, $x > 0$

4.7.36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 2x\, e^{-x} - e^{-x}$.
Να βρεθούν οι f ', f '' και έπειτα:
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

4.7.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + e^{8-x^2} - 2$
α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

4.7.38. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$

α) Να εξετάσετε αν η f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο A (0,f(0))

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να μελετηθεί η συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία της.

δ) Να αποδείξετε ότι $e^x - 1 \geq x - x^2$

4.7.39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}$. Να δείξετε ότι ισχύει $\ln x \geq -\frac{1}{2x^2 e}$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

4.7.40. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,2)$ ισχύει $x^x (2-x)^{2-x} \geq 1$
β) Αν $\alpha, \beta \in (0,2)$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha (2-\alpha)^{2-\alpha} + \beta^\beta (2-\beta)^{2-\beta} \geq 2$
γ) Αν $\alpha \in (0,2)$ και $\alpha+\beta = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq 1$

***

4.7.41. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x \geq x+1$ β) $\ln x \leq x - 1$

γ) $2e^x < x^2 + 2x + 2$, $x < 0$ δ) $2 - x^2 \leq 2\sigma\upsilon\nu x$, $x > 0$

4.7.42. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x \geq -x^2 + 1$ β) $x^e \cdot e^{\frac{1}{x}} \geq 1$, $x \geq 0$

4.7.43. Να αποδείξετε ότι

α) $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$ β) $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, $x \geq 0$

4.7.44. Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 είναι $x^{\alpha} - \alpha x \leq 1 - \alpha$ ($0<\alpha<1$)

4.7.45. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \Re$ και $\nu \in N^*$ ισχύει $(1+x)^{\nu} + (1-x)^{\nu} \geq 2$

4.7.46. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με α> 0. Να αποδείξετε ότι
$\ln\alpha^{\alpha} + e^{\beta-1} \geq \alpha\beta$

***

4.7.47. Να προσδιοριστεί σημείο της παραβολής $y = x^2$ τέτοιο ώστε η απόστασή του από το σημείο Α(6,3) να είναι η ελάχιστη δυνατή . Ποια είναι τότε η απόσταση ;

4.7.48. Να προσδιοριστεί σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = 4$ τέτοιο ώστε η απόστασή του από το σημείο Α(3,0) να είναι η ελάχιστη δυνατή . Ποια είναι τότε η απόσταση ;

4.7.49. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν 25 ποιο είναι εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα ;

4.7.50. Σε κύκλο να εγγράψετε ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν.

4.7.51. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που σχηματίζουν με του άξονες τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού .

4.7.52. Τρείς πόλεις Α,Β,Γ απέχουν ανα 2 απόσταση 100km . Από τις Α και Β αναχωρούν ταυτόχρονα δυο αυτοκίνητα με ταχύτητες 60km /h και 80 km/h αντίστοιχα. Μετά από πόσο χρόνο η απόσταση των αυτοκινήτων θα είναι ελάχιστη;

4.7.53. Αν Α, Α' είναι σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ και Β, Β' οι προβολές τους στον xx' .

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια

β) Να βρείτε τις θέσεις των τεσσάρων αυτών σημείων ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΑ'Β΄Β να είναι μέγιστο .

4.7.54. Να προσδιοριστεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(1,3) και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού .

4.7.55. Σε ημικύκλιο να γραφεί ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν

4.7.56. Οι πλευρές ΑΒ ,ΒΓ ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ανίστοιχα 12 και 8 μέτρα. Αν Μ το μέσο της ΒΓ να εγγράψετε παραλληλόγραμμο με πλευρά παράλληλη στην ΑΜ , που να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

4.7.57. Ένα μεγάλο τυπογραφείο θέλει να εκτυπώσει 100.000 πανομοιότυπες αφίσες για τους Ολυμπιακούς αγώνες . Για τον σκοπό αυτό ενοικιάζει μηχανές , που η κάθε μια εκτυπώνει 100 αφίσες την ώρα. Τα πάγια έξοδα ενοικίασης και εγκατάστασης κάθε μηχανής ανέρχονται σε 2 χιλιάδες δραχμές . Επιπλέον το τυπογραφείο , για κάθε ώρα εκτύπωσης ,έχει πρόσθετα 5 χιλιάδων δραχμών.
α) Να αποδείξετε ότι τα συνολικά έξοδα εκτύπωσης ως συνάρτηση του αριθμού x των εκτυπωτικών μηχανών που θα χρησιμοποιηθούν είναι

$E(x) = (2x + \frac{5000}{x})$ χιλιάδες δραχμές.

β) Να βρείτε το πλήθος των μηχανών που πρέπει να τεθούν σε λειτουργία , ώστε η εκτύπωση να έχει το ελάχιστο κόστος .

γ) Να βρεθεί το ελάχιστο δυνατό κόστος.

4.7.58. Για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα μια εταιρεία έχει κόστος $K(x) = (500x+50000)$ δρχ .Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει στην τιμή $T(x) = (2000 - 2x)$ δρχ την κάθε μια

α) Να δείξετε ότι τα κέρδη της εταιρείας δίνονται από την συνάρτηση $P(x) = 1500x - 2x^2 - 50.000$, $x > 0$

β) Για ποιο επίπεδο παραγωγής η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος;

γ) Ποια είναι η τιμή πώλησης όταν η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος ;

δ) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος της εταιρείας ;

ε) Αν επιβληθεί επιπλέον φόρος 200 δρχ ανα μονάδα προϊόντος , ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης , ώστε η εταιρεία να έχει μέγιστο κέρδος ;

4.7.59. Οι πορείες δυο αυτοκίνητων Π_1 και Π_2 που κινούνται με την ίδια ταχύτητα μέτρου 20 k m /h τέμνονται στο σημείο Ο. Στις 1μμ το πρώτο κινείται ανατολικά και απέχει 60km από το Ο και το δεύτερο νότια και απέχει 100 km από το Ο.

α) να εκφραστεί η απόσταση d των δυο πλοίων συναρτήσει του χρόνου που παρήλθε μετά τις 1μμ.

β) Τι ώρα απέχουν τα πλοία μεταξύ τους ελάχιστη απόσταση;

γ) Πόση είναι η ελάχιστη απόσταση που απέχουν μεταξύ τους τα πλοία;

4.7.60. Κάθε σελίδα ενός βιβλίου πρόκειται να έχει εμβαδόν $384 cm^2$. Τα περιθώρια του κειμένου πάνω και κάτω είναι 3 cm και δεξιά και αριστερά 2cm. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει η σελίδα ώστε να μεγιστοποιηθεί ο χώρος που έχουμε για το κείμενο;

4.7.61. Δίνεται η ευθεία $y = -2x + 4$ και το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

β) Αν M(x, y) είναι ένα σημείο της παραπάνω ευθείας και φέρουμε από το Μ τις ΜΑ και ΜΒ κάθετες στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα, να βρείτε το σημείο Μ ώστε το ΟΑΜΒ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

4.7.62. Έχουμε ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου με πλευρά μήκους 18cm. Από τις γωνίες αυτής της λαμαρίνας κόβουμε τέσσερα μικρά και ίσα τετράγωνα πλευράς x και στην συνέχεια διπλώνουμε τα φύλλα που προκύπτουν προς τα πάνω, σχηματίζοντας έτσι ένα κουτί ανοικτό από την πάνω πλευρά του. Να βρείτε την τιμή του x ώστε ο όγκος του κουτιού που προκύπτει να είναι ο μέγιστος δυνατός

4.7.63. Η ενέργεια Ε που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, προσεγγίζεται από την σχέση:

$E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}[2(\upsilon - 35)^2 + 750]$. Να βρείτε με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί ο μικροοργανισμός για να καταναλώσει τη μι-κρότερη ενέργεια και πόση είναι αυτή

4.7.64. Το κόστος παραγωγής ενός αυτοκινήτου και η τιμή πώλησής του συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες δίνεται από τις σχέσεις

$K(t) = 30t^2$ και $E(t) = 30\left(100 - \frac{250}{t}\right)$ σε χιλιάδες δραχμές .

α) Να βρεθεί το κέρδος από την πώληση ενός αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου που απαιτείται για την παραγωγή του .
β) Πόσες ώρες απαιτούνται για την κατασκευή του ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο ;
γ) Να υπολογιστεί το μέγιστο κέρδος

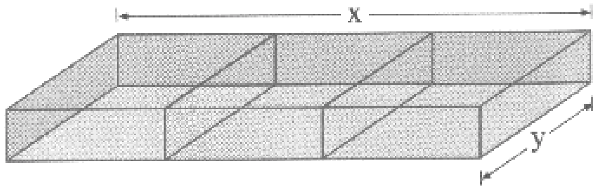
4.7.65. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές x και y . και περίμετρο 20m .
α) Να προσδιορίσετε τα x και y ώστε η διαγώνιος του ορθογωνίου να έχει ελάχιστο μήκος
β) Να προσδιορίσετε τα x και y ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι ελάχιστο .

4.7.66. Το συνολικό κόστος για την παραγωγή x (≥ 100) προϊόντων είναι

$K(x) = 30 + 3x + \frac{1}{100}x^2$ (σε χιλιάδες δρχ) . Αν κάθε προϊόν πωλείται προς 11000 δρχ να βρείτε πόσα προϊόντα πρέπει να παραχθούν ώστε τα κέρδη να μεγιστοποιηθούν

4.7.67. Το συνολικό κόστος για την παραγωγή x (≥ 100) προιόντων είναι $K(x) = 4x^2 + 3x + 6400$ (σε χιλιάδες δρχ) .. Να βρείτε πόσα προιόντα πρέπει να παραχθούν ώστε to κόστος του ενός προϊόντος να ελαχιστοποιηθεί

4.7.68. Ένας γεωργός έχει ένα χωράφι $800m^2$ σχήματος ορθογωνίου, το οποίο θέλει να το περιφράξει και να το χωρίσει σε 3 ίσα τμήματα με συρματόπλεγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τις διαστάσεις του χωραφιού ώστε ο γεωργός να χρησιμοποιήσει το μικρότερο δυνατό μήκος σύρματος.
β) Αν το κόστος περίφραξης ανά μέτρο για τα εσωτερικά χωρίσματα, είναι 4 φορές μικρότερο από το κόστος ανά μέτρο της εξωτερικής περίφραξης, να βρείτε τις διαστάσεις του χωραφιού για τις οποίες το συνολικό κόστος περίφραξης είναι το μικρότερο δυνατό.

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

4.7.69. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ η οποία για κάθε $x \in \Re$ ικανοποιεί την σχέση $f^2(x) + 2f(x) = x^3 + x + e^x$. Να αποδείξετε ότι δεν έχει κρίσιμα σημεία.

4.7.70. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ η οποία για κάθε $x \in \Re$ ικανοποιεί την σχέση $f^3(x) + f(x) - 2 = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x - x - 1 > 0$, για κάθε x $\Re^*$

β) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα

4.7.71. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \Re$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί την σχέση $f^3(x) + x^3 = 3x\, f(x) - 1$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο α να αποδείξετε ότι α=1 .

4.7.72. Αν x_1, x_2 είναι κρίσιμα σημεία της $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ να αποδείξετε ότι

α) $x_1 + x_2 = -\frac{2\beta}{3\alpha}$

β) $f''(x_1) + f''(x_2) = 0$

4.7.73. Έστω f,g $: \Re \to \Re$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(x) + x^3 \leq g(x) + \alpha^3$ για κάθε $\chi \in \Re$, $\alpha \in \Re$ Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο α να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) - g'(\alpha) = -3\alpha^2$.

4.7.74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2(\ln\alpha)x + 1$, $\alpha \geq 1$.Να βρεθεί για ποια τιμή του α το ελάχιστο της f ελαχιστοποιείται .

4.7.75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{e^{\lambda x}}$, $\lambda > 0$.Να βρεθεί για ποια τιμή του λ το μέγιστο της f ελαχιστοποιείται .

4.7.76. Να βρεθεί ο $\alpha \in \Re$ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2x^2 + 2(1 - \alpha)x - \alpha = 0$, να είναι ελάχιστο.

4.7.77. Έστω f ορισμένη στο [0,1] με $f(x) = \frac{1-x}{3}e^x$

α) Να μελετηθεί ως προς μονοτονία

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) =x έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1/3)

4.7.78. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha\, ημ^2x + \beta\, συν^2x$, $\alpha > \beta$.

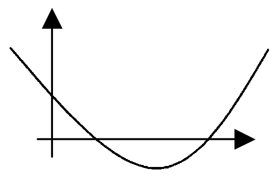
α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f στο [0,π]

β) αν αβ<0 να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi/2)$ τέτοιος ώστε $συν^2\xi = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$

4.7.79. Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ με $f''(x) > 0$ για $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) < 0$

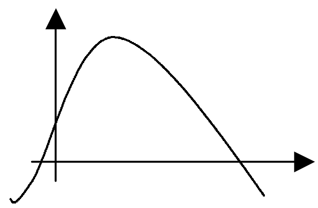
4.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής

Κοίλες – κυρτές συναρτήσεις



- Μια συνάρτηση f συνεχής στο Δ λέγεται
  <u>κ υ ρ τ ή</u> ή ότι **<u>στρέφει τα κοίλα άνω</u>** $\cup$
  όταν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η <u>f ' γνησίως αύξουσα</u> στο Δ .
  Δηλαδή <u>f '' (x) >0</u> για κάθε $x \in \Delta$

  Αν μια f είναι κυρτή στο Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε $x \in \Delta$, βρίσκεται πάντα κάτω από την γραφική παράσταση της f .



- Μια συνάρτηση f συνεχής στο Δ λέγεται
  <u>κ ο ί λ η</u> ή ότι **<u>στρέφει τα κοίλα κάτω</u>** $\cap$
  όταν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και η <u>f ' γνησίως φθίνουσα</u> στο Δ .
  Δηλαδή <u>f '' (x) < 0</u> για κάθε $x \in \Delta$

  Αν μια f είναι κοίλη στο Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε $x \in \Delta$, βρίσκεται πάντα πάνω από την γραφική παράσταση της f .

- Σημειώνουμε ότι είτε η f είναι κυρτή είτε κοίλη στο διάστημα Δ δεν μας ενδιαφέρει καν η ύπαρξη παραγώγου στα άκρα του Δ, αν φυσικά αυτό είναι κλειστό , παρά μόνο η συνέχεια .

- Επομένως

> <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>
> αν f συνεχής στο διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε
> i. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ $\Rightarrow$ f κυρτή στο Δ
> ii. Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ $\Rightarrow$ f κοίλη στο Δ

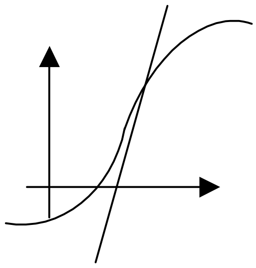
- Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει
  π.χ η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο Δ αλλά $f''(0) = 0$

- Ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha,\beta)$ όπου (α,β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , λέγεται **σ η μ ε ί ο κ α μ π ή ς** της f όταν

  α) Η f αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του x_0
  β) Ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$.

- ***Στο σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητο να παραγωγίζεται η f .Είναι όμως απαραίτητο να παραγωγίζεται στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$***

- Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη διαπερνά την καμπύλη της C_f



- Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της f . Τότε ισχύει ότι $f''(x_0) = 0$ ή ότι δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0 . ***(Για τα φετινά δεδομένα όμως υπάρχει η $f'(x_0)$)***

- Επομένως οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της C_f σε ένα διάστημα Δ είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ όπου
  - Η f'' μηδενίζεται ή
  - δεν υπάρχει η f'' (αλλα ορίζεται η f')
    και
  - Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

4.8.1. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2, x > 0$

α) Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f

β) Να μελετηθεί ώς προς τα κοίλα

γ) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα .

4.8.2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\ln^2 x - 2\ln x + 3$

α) Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f

β) Να μελετηθεί ώς προς τα κοίλα

γ) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα .

δ) Να μελετηθεί ώς προς τα σημεία καμπής.

4.8.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1$

α) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής της f

4.8.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^6}{15} - \frac{3x^5}{10} + \frac{x^4}{3} + x + 2$

α) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής της f

4.8.5. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{1-x}{x^2}$

α) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής της f

4.8.6. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $x^4+2x^3-12x^2+12x+5$

α) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα

β) Να βρείτε τα σημεία καμπής της f

4.8.7. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $x^4 + 2x^3 - x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της είναι κάθετες μεταξύ τους.

4.8.8. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$. Να αποδείξετε ότι τα δυο τοπικά ακρότατα και το σημείο καμπής που παρουσιάζει είναι συνευθειακά.

4.8.9. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $4x^3 - 21x^2 + 24x - 2 + 6x^2\ln x$

α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 24(x-1)+12\ln x$

β) Να βρείτε το $f''(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f'''(x) > 0$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f''(x) = 0$

ε) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα

στ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της f

4.8.10. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων

α) $f(x) = 4\ln(x^2+8)$ β) $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$

γ) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ δ) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

4.8.11. Να μελετηθούν ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων

α) $f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 2x + 1, x \le 0 \\ x^4 - 4x^3 + 2x + 1, x < 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1, x \le 2 \\ (x-3)^5 + 2, x > 2 \end{cases}$

***

4.8.12. α) Να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα η $f(x) = 2x^2+e^{-x}$

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο τομής της με τον yy'

γ) Να αποδείξετε ότι $2x^2+e^{-x} \ge -x+1$

***

4.8.13. Για ποιές τιμές του $\kappa \in \Re$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ είναι κυρτή για κάθε $\chi \in \Re$;

4.8.14. Για ποιές τιμές του $\kappa \in \Re$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2kx^3 + 6x^2 + 3x + 2$ είναι κυρτή για κάθε $\chi \in \Re$;

4.8.15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + 12\beta x + \gamma$ είναι κυρτή στο $\Re$

4.8.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{\lambda x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + 1$

α) Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της f

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \Re$ ώστε η f να είναι κυρτή.

4.8.17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$f(x) = 2x^4 + 4kx^3 + 3(2k^2 - 4k + 5)x^2 + kx + 1$, $k \in \Re$ δεν έχει σημεία καμπής

4.8.18. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \Re$ ώστε η συνάρτηση
$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 36x + 5$ να έχει στο $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο και να έχει σημείο καμπής στο σημείο $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

4.8.19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \ne 0$, $\beta^2 = 3\alpha\gamma$, δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

4.8.20. Αν η γραφική παράσταση της $f(x) = x^5 + 5\alpha x^4 + 10\beta x^3 + x^2 + x + 1$ παρουσιάζει τρία σημεία καμπής να αποδείξετε ότι $\alpha^2 > \beta$

4.8.21. Αν η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$ παρουσιάζει σημεία καμπής να αποδείξετε ότι $3\alpha^2 > 8\beta$

Ασκήσεις Β΄ Ομάδας

4.8.22. Μια συνάρτηση f:ℜ->ℜ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε χ∈ℜ ισχύει $(f'(x))^3 + (f'(x))^2 + f'(x) = e^x + x - 1$.
Να αποδείξετε ότι
α) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με οριζόντια εφαπτομένη
β) Η f είναι κυρτή στο ℜ

4.8.23. Μια συνάρτηση f:ℜ -> ℜ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε χ∈ℜ ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 1 + x - x^2 - e^x$.Να αποδείξετε ότι
α) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής
β) Η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο τοπικού ακροτάτου .

4.8.24. Μια συνάρτηση f:ℜ -> ℜ είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε χ∈ℜ ισχύει $f'(x) + [\, f''(x)\,] = \sigma\upsilon\nu^2 x - 3x + e^x$.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής

4.8.25. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο ℜ η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω .¨Αν $f(0) = f'(0) = 0$,να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε x∈ℜ .

4.8.26. Έστω συνάρτηση f θετική και 2 φορές παραγωγίσιμη στοℜ. Αν η συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ έχει θετική δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή .

4.8.27. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο ℜ και α< β να αποδείξετε ότι
$f(x) \geq f(\beta) + (x-\alpha) f'(\alpha)$, για κάθε x∈[α,β]

4.8.28. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο ℜ και α< β να αποδείξετε ότι
$f(x) - f(\alpha) \leq (x-\alpha) f'(\beta)$, για κάθε x∈[α,β]

4.8.29. Μια συνάρτηση f:ℜ -> ℜ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και $f''(x) < 0$ για κάθε x ∈ℜ .Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-f(x)}$ είναι κυρτή στο ℜ

4.8.30. Μια συνάρτηση f:ℜ -> ℜ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και ισχύει $(x^2 + x + 1)\, f''(x) + xe^{f(x)} = 0$ για κάθε x ∈ℜ .Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

4.8.31. Έστω f παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) \leq 2 f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε α, β ∈Δ

4.8.32. Η συνάρτηση f : ℜ ->ℜ ικανοποιεί την σχέση
$$2f(x) + f(-x) = x^2 + 2x + 3$$
α) Να βρεθεί ο τύπος της .

β) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.

4.8.33. Η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με
$f'(x)\,x = f(x) + 2x$ για $x \in (0,+\infty)$, $f(e) = 2e$

α) Να βρεθεί ο τύπος της .

β) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.

4.8.34. Η συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \Re$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f''(x) \neq 0$. ;Αν η f είναι κυρτή και το διάγραμμά της περνάει από το Α(3,3) , να αποδείξετε ότι $f(4)+f(2) > 6$

4.9 Ασύμπτωτες - κανόνας De ' L Hospital

- Θεώρημα De ' L Hospital

> Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ (ή $\pm\infty$) και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (ή $\pm\infty$) όπου
>
> $x_0 \in \Re \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Το θεώρημα De ' L Hospital επομένως εφαρμόζεται αν έχουμε μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Το θεώρημα De ' L Hospital μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες από μια φορές για την εύρεση ορίου μιας συνάρτησης
- Το θεώρημα De ' L Hospital ισχύει και για πλευρικά όρια.

- Άλλες απροσδιόριστες μορφές που λύνονται με το θεώρημα De ' L Hospital

  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \mathbf{0 \cdot \infty}$

    τότε $f\,g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ ή $f\,g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ (οπότε καταλήγω σε $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

  - $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \mathbf{\infty - \infty}$

    Τότε

    Αν είναι κλασματικές οι f , g κάνω τα κλάσματα ομώνυμα ή

    $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right)$ ή $f - g = g\left(1 - \frac{f}{g}\right)$

  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 0^0$ ή 1^∞ ή ∞^0

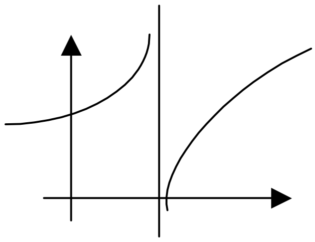
    τότε

    $$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$$

➢ Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f όταν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$.

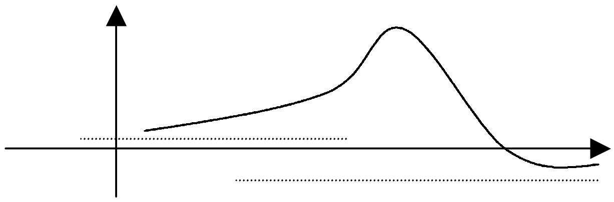
Η C_f μπορεί να έχει παραπάνω από μια κατακόρυφες ασύμπτωτες

Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητώ



- στα άκρα του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν ορίζεται ή
- στα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν είναι συνεχής

➢ Μια ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη της C_f** στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$)



Για να αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ (αντίστοιχα σε $(-\infty,\beta)$)

- Η C_f μπορεί να έχει διαφορετική οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ από ότι στο $-\infty$)
- Η C_f μπορεί να έχει το πολύ 2 οριζόντιες ασύμπτωτες.

➢ Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

(αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

➢ Αν $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x)$ τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$

➢ Αν $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - \lambda x)$ τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$

➢

- Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη και αντίστροφα. Ανάλογα για το $-\infty$
- Η C_f μπορεί να έχει το πολύ 2 οριζόντιες ασύμπτωτες ή το πολύ 2 πλάγιες ασύμπτωτες.

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχουν ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

➢ Ασύμπτωτες πολυωνυμικών – ρητών

- Αν f(x) = k σταθερή τότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y = k και στο +∝ και στο - ∝ ,ενώ δεν έχει άλλες ασύμπτωτες.

- Αν f(x) = αx+β , α≠0 έχει πλάγια ασύμπτωτη την y = αx +β και στο +∝ και στο - ∝.

- Αν f(x) πολυωνυμική με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 **δεν** έχει ασύμπτωτες

- Αν f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ρητή συνάρτηση τότε
  - Αν deg(P(x)) = deg(Q(x))+1 τότε έχει πλάγια ασύμπτωτη , την ίδια , και στο +∝ και στο - ∝.
  - Αν deg(P(x)) > deg(Q(x))+1 τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη
  - Αν deg(P(x)) < deg(Q(x)) τότε έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y = 0 και στο +∝ και στο - ∝.

Ασκήσεις

Del'Hospital

4.9.1. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$、

4.9.2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\eta\mu x-1}{x^2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\eta\mu x)}{\eta\mu 2x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(e^{1/x}-1\right)\right]$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x\right)$

ζ) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$

4.9.3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu 5x}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\varepsilon\varphi x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\eta\mu x)}{\ln(\varepsilon\varphi x)}$.

4.9.4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{6x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

4.9.5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+3}{5x-2}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^{\varepsilon\varphi x}$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\eta\mu x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\sigma\varphi x$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x^2\right)^{\sigma\varphi x}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$.

4.9.6. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^2+\ln x}$

4.9.7. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\, x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)]$ β) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} [(\frac{\pi}{2}-x)\text{εφ}x]$

4.9.8. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\, x - e^x\,)$ β) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}$

4.9.9. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\,\text{ημ}x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\frac{1}{x})^x$

*

4.9.10. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x-x^2-2x-2}{x^3}$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\text{ημ}x-\text{συν}x+1}{x^2}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2\text{συν}x-2}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{ημ}x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$

4.9.11. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\ln(\sqrt{x}+2)}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{e^x}$

4.9.12. Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$

4.9.13. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\text{συν}^2 x}{x}-\frac{e^x}{\text{ημ}x})$

4.9.14. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln^2 x+\ln x+1}{\ln^2 x+1}=1$

4.9.15. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+\ln^2 x}{x^2+\ln x}=1$

4.9.16. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{xe^x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\text{ημ}x}{x-\text{ημ}x}$

4.9.17. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(\,e^{\frac{1}{x}} - 1\,)$

4.9.18. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{ημx}\cdot\ln x$ β) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\,\text{εφ}(\frac{\pi x}{2})$

4.9.19. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{ημ}x)}{\ln x}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(e^x+e^{-x})}{x}$

4.9.20. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\text{ημ}x}) = -\frac{1}{6}$

4.9.21. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}) = \frac{1}{2}$

4.9.22. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\text{ημ}x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\text{εφx})^{\text{ημx}}$

4.9.23. Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\ln x}{x^3+x^2+x+1}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-\ln x+1}{x^2+\ln x+1}$

4.9.24. Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\text{σφ}x} = 0$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{εφ}x}{1-\text{συν}2x} = 0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{εφχ}-\text{ημχ}}{\text{χ}-\text{ημχ}} = 3$ δ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\text{ημχ}-\text{συν}2\text{χ}}{\text{ημ}^2\text{χ}} = 3$

ε) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{χσυνχ}-\text{ημχ}}{\text{χημχ}} = 0$ στ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln^2 x}{1+\ln x} = 0$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{ημ}x}{x^3} = \frac{1}{6}$ η) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-\text{ημ}^3x}{x^5} = \frac{1}{2}$

4.9.25. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

α) $\text{f(x)} = \begin{cases} \ln(1+2x), -\frac{1}{2} < x \le 0 \\ 2x, x > 0 \end{cases}$ β) $\text{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x \le 0 \\ x\ln x, 0 < x < 1 \\ \frac{1}{e} - e^{-x}, x \ge 1 \end{cases}$

4.9.26. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε το όριο

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+ae^{1-x}+\beta x+4}{x^2-2x+1}$ να είναι πραγματικός αριθμός

4.9.27. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ώστε

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x + \beta e^{-x} + \gamma x}{x - \text{ημ}x} = 4$$

4.9.28. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η f(x) = $\begin{cases} ae^{2x}, x \le 0 \\ \text{ημ}2x + \beta\text{συν}3x, x > 0 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

4.9.29. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η f(x) = $\begin{cases} \ln^3 x, 0 < x \le e \\ ax + \beta, x > e \end{cases}$ να

είναι παραγωγίσιμη.

4.9.30. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} x^3 + x - \alpha\text{ημ}x + 2, x < 0 \\ \beta + \alpha\ln(1 + x^4), x \ge 0 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι α, β ώστε η f(x) να είναι παραγωγίσιμη.
β) Για α=1 και β=2 να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να λυθεί η εξίσωση f(x) = 2.

Ασύμπτωτες

4.9.31. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1}$ β) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x-2|}$ γ) $f(x) = \dfrac{2-x}{9-x^2}$

4.9.32. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 5}{x^2 + x + 2}$ β) $f(x) = \dfrac{|x^2 - x| + x + 2}{x^2 - x + 3}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x+2}$ δ) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} + 2}{e^x + e^{-x} + 3}$

4.9.33. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

α) $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{1}{x^2 + 9}$ β) $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{e^x + 2}$ γ) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 8}{x - 2}$

4.9.34. Να βρεθούν οι πλάγιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες τών συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$ β) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{5e^x}{1 + e^x}$

4.9.35. Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{\text{ημ}x}{x}$

4.9.36. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$

γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x - 2}$ δ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

4.9.37. ¨Εστω ότι η y = 2x+5 ασύμπτωτη της f στο +∝ .

I) Να βρεθούν τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\,f(x)-2x]$

II) Να βρεθεί ο μ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$

4.9.38. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ , ώστε οι ευθείες x= - 2 , y = x – 4 να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{(a-2)x^3+\beta x^2-\gamma x+1}{2x+\gamma}$$

4.9.39. Να βρεθεί το α∈ℜ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \dfrac{x^2-ax+6}{x^2-4x+3}$ να έχει μόνο μια κατακόρυφη ασύμπτωτη.

4.9.40. Αν η ευθεία ε: 2x+y –β = 0 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

$f(x) = \dfrac{(\alpha+1)x^2-2ax+3}{3x-2}$ να αποδείξετε ότι α=5 και β= - 2

4.9.41. Αν η ευθεία ε: y = 3x+2 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

$f(x) = \dfrac{ax^2+\beta x+5}{x-2}$ να βρείτε τα α,β.

4.9.42. Αν η ευθεία ε: y = 3x+4 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f(x) στο +∝ να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+6x}{xf(x)-3x^2+5x+2}=1$

4.9.43. Αν η ευθεία ε: y = x+2 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f(x) στο +∝ να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}\,f(x)+3\mu x^2+4}{x^2f(x)+\sqrt{x^4+1}-x^3+2}=10$$

4.9.44. Αν για την συνάρτηση f : ℜ->ℜ ισχύει $2x+3\le f(x)\le\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2}$ για κάθε x∈ℜ* . Να εξετασθεί αν η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη .

4.9.45. Έστω $f(x) = \ln^2 x - x\ln x + x - 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των πραγματικών ριζών της f(x) = 0

γ) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

Ανάλυση

Κεφάλαιο 5ο

Ολοκληρώματα

5.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα

Αρχική συνάρτηση

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και αναζητούμε μια συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ τέτοια ώστε για κάθε $\chi \in \Delta$ να ισχύει

$$\mathbf{F'(x)=f(x).}$$

Η ζητούμενη F ονομάζεται **αρχική συνάρτηση** της f ή **παράγουσα** αυτής

Αποδεικνύεται ότι

- Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό .
- Αν υπάρχει μια αρχική της f στο Δ τότε υπάρχουν άπειρες και αυτές είναι οι F+c , $c \in \Re$
- $(a F)' = a f$ και $(F + G)' = f+g$, όπου G αρχική της g στο Δ

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων μιας f στο Δ το ονομάζουμε ***αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ*** και συμβολίζεται $\int f(x)dx$ δηλαδή

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

άμεση συνέπεια είναι ότι

$$\int f'(x)dx = f(x)+ c , c\in \Re$$

και ότι

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)\, dx$$

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(***Γραμμικότητα*** του αόριστου ολοκληρώματος)

Ο υπολογισμός μιας αρχικής μιας f σε ένα διάστημα Δ ή του ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ γίνεται σε <u>πρώτο στάδιο</u> , με την βοήθεια των παρακάτω τύπων που προέρχονται απο τους κανόνες παραγώγισης.

$$\int \alpha\, dx = \alpha x + c \;,\quad \int x^{\nu}\, dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c \;,\quad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+\beta}\, dx = \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta| + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \eta\mu(\alpha x)dx = -\frac{1}{a}\sigma\upsilon\nu(\alpha x) + c \qquad \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx = \frac{1}{a}\eta\mu(\alpha x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha x)}\, dx = \frac{1}{a}\varepsilon\varphi(\alpha x) + c \qquad \int \frac{1}{\eta\mu^2(\alpha x)}\, dx = -\frac{1}{a}\sigma\varphi(\alpha x) + c$$

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + c \qquad \int e^{\alpha x+\beta}\, dx = \frac{1}{a}e^{\alpha x+\beta} + c$$

$$\int \alpha^{x}\, dx = \frac{1}{\ln\alpha}\alpha^{x} + c \qquad \int \alpha^{\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda\ln\alpha}\alpha^{\lambda x} + c$$

Πολλές φορές όμως προκύπτουν πιο δύσκολοι τύποι συναρτήσεων πρός ολοκλήρωση (που περιέχουν σύνθετες συναρτήσεις) οπότε κάνουμε χρήση των παρακάτω κατηγοριών

<u>Κατηγορία 1η ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ</u>

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα ολοκληρώματα της μορφής $\int P(x)\, dx$. Εδώ κάνουμε χρήση της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και κατόπι χρήση της ιδιότητας $\int x^{\nu}\, dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$.

Επίσης μην ξεχνάτε ότι : $\int \sqrt[\nu]{x^{\mu}}\, dx = \int x^{\frac{\mu}{\nu}} dx = \dfrac{x^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1} + c$

<u>Κατηγορία 2η ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ</u>

- $\int [\, f'(x)\cdot g(x) + g'(x)f(x)\,]\, dx = \int (\, f(x)\cdot g(x)\,)'\, dx = f(x)\cdot g(x) + c$
- $\int \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}\, dx = \int [\dfrac{f(x)}{g(x)}]'\, dx = \dfrac{f(x)}{g(x)} + c$

Κατηγορία 3η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

- $\int f^k(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\int (f^{k+1}(x))'\,dx = \frac{1}{k+1} f^{k+1}(x) + c$
- $\int ημ^k x \cdot συνx\,dx = \frac{1}{k+1} ημ^{k+1} x + c$
- $\int συν^k x \cdot ημx\,dx = -\frac{1}{k+1} συν^{k+1} x + c$

Κατηγορία 4η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΡΙΖΑ ΣΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

- $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \int (\sqrt{f(x)})'\,dx = \sqrt{f(x)} + c$

Κατηγορία 5η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΠΗΛΙΚΟΥ f ' / f

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int [\ln(|f(x)|)]'\,dx = \ln(|f(x)|) + c$

Κατηγορία 6η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ

- $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = \int (e^{f(x)})'\,dx = e^{f(x)} + c$
- $\int k^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln k}\int (k^{f(x)})'\,dx = \frac{1}{\ln k} k^{f(x)} + c \quad , 0 < k \neq 1$

Κατηγορία 7η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ

- Κάνουμε χρήση της κατηγορίας 2 ή
- $\int ημ(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -συν(f(x)) + c$
- $\int συν(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = ημ(f(x)) + c$
- ή τέλος κάνουμε χρήση τών τύπων

  $ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}$, $συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$

Κατηγορία 8η ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ

Διακρίνουμε τις εξής δυο περιπτώσεις

Α) $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ με deg(P(x))<deg ((Q(x) .

Παραγοντοποιώ (εάν γίνεται) το Q(x) και το αναλύω σε άθροισμα απλών κλασμάτων ώς εξής

$$\int \frac{kx+λ}{(x-a)(x-β)}x = \int [\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-β)}]dx = A\ln|x-α| + B\ln|x-β|$$

όπου τα Α , Β τα βρίσκω απο την ισότητα των πολυωνύμων :
κx+λ = Α(x – β) + Β (x – α)

Γενικότερα

σε κάθε παράγοντα του Q(x) της μορφής αx+β αντιστοιχεί ένα κλάσμα $\frac{A}{ax+\beta}$,

σε κάθε παράγοντα του Q(x) της μορφής (x – ρ)$^{\mu}$ αντιστοιχεί το άθροισμα

$\frac{A_1}{x-\rho}+\frac{A_2}{(x-\rho)^2}+...+\frac{A\mu}{(x-\rho)^{\mu}}$

έτσι π.χ $\frac{3x^2+3x+4}{(x-1)(x+3)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+3)}+\frac{\Gamma}{(x+3)^2}$

Β) $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ dx με deg(P(x))≥deg ((Q(x))

Κάνω την διαίρεση P(x):Q(x) και P(x)=Q(x)Π(x)+U(x) άρα θα είναι

$\frac{P(x)}{Q(x)}$= Π(χ)+ $\frac{U(x)}{Q(x)}$ με deg(U(x))<deg ((Q(x) και καταλήγω στην προηγούμενη περίπτωση

Ασκήσεις Α΄Ομάδας

5.1.1. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

Α = $\int$ (3x^2 - $\frac{1}{4}$ +4x) dx Β = $\int \frac{4x^3+3x^2+2x}{x^2}$ dx

Γ = $\int$ (4+$\sqrt{x}$)^2 dx Δ = $\int$ (e^x – ημx + συνx+ x$^{3/2}$)dx

Ε = $\int$ 2 dx ΣΤ = $\int$ 2^x dx

5.1.2. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

Α = $\int$ (4x^3 + 3x^2 + 2x+1) dx Β = $\int (\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x})$dx

Γ = $\int (\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3})$ dx Δ = $\int \frac{1}{\sqrt{x}}$ dx

5.1.3. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

Α = $\int$ ημ (3x) dx Β = $\int$ συν (2x+3) dx Γ = $\int$ e^{2x+1} dx

Δ = $\int$ 2^{5x} dx Ε = $\int \frac{1}{\eta\mu^2(3x+1)}$dx ΣΤ = $\int \frac{1}{x+8}$ dx

Ζ = $\int \frac{1}{-3x+5}$dx Η = $\int 3^{2002x+3}$dx Θ = $\int \frac{32}{9x+2}$dx

Ι = $\int$ ημ (-2x+9) dx ΙΑ = $\int$ 3· συν (8x+6) dx

5.1.4. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int 2x\,\eta\mu x + (x^2 - 1)\sigma\upsilon\nu x \; dx$

$B = \int e^{-x}\,(\sigma\upsilon\nu + \eta\mu x)\,dx$ $\qquad \Gamma = \int \frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\chi}{x^2}\,dx$

$\Delta = \int e^x\,(\sigma\upsilon\nu - \eta\mu x)\,dx$ $\qquad E = \int \eta\mu x + \chi\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$\Sigma T = \int \frac{1 - \ln x}{x^2}\,dx$ $\qquad Z = \int \frac{1 - x}{e^x}\,dx$

5.1.5. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int (2x^2 + 5x)^3 \cdot (4x + 5)\,dx$ $\qquad B = \int \ln^3(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx \quad , x > 0$

$\Gamma = \int \eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$ $\qquad \Delta = \int \frac{2x + 5}{(x^2 + 5x + 3)^3}\,dx$

$E = \int (5x^3 + 3)^4 \cdot x^2\,dx$ $\qquad \Sigma T = \int 8\sigma\upsilon\nu^5 x\,\eta\mu x\,dx$

$Z = \int 3\eta\mu^3(2x)\,\sigma\upsilon\nu x(2x)\,dx$

5.1.6. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \frac{e^x}{\sqrt{k + e^x}}\,dx \quad , k \in \Re$ $\qquad B = \int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}\,dx \quad ,$

$\Gamma = \int \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}}\,dx$ $\qquad \Delta = \int \frac{9x^2 + 24x + 6}{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2x}}\,dx$

$E = \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b}}\,dx$ $\qquad \Sigma T = \int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}\,dx$

$Z = \int \frac{e^x + xe^x}{\sqrt{xe^x}}\,dx$ $\qquad H = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

5.1.7. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ $\qquad B = \int \frac{1}{x\ln x}\,dx \quad , x > 0$

$\Gamma = \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}\,dx$ $\qquad \Delta = \int \frac{4x + 10}{x^2 + 5x + 3}\,dx$

E $= \int$ ***εφx dx*** $\qquad$ ***ΣΤ*** $= \int$ ***σφx dx***

$Z = \int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$ $\qquad Z = \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}\,dx$

$H = \int \frac{1 - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}\,dx$ $\qquad \Theta = \int \frac{\eta\mu x}{5 + 2\sigma\upsilon\nu x}\,dx$

$I = \int \frac{x\eta\mu x}{2 + x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\,dx$ $\qquad IA = \int \frac{4}{2 - e^{-x}}\,dx$

5.1.8. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \quad B = \int e^{ημ^2 x} ημ2x\,dx \quad Γ = \int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$Δ = \int (1+x)e^{x^2+2x}\,dx \qquad E = \int 2^{1+x^3} x^2\,dx$

5.1.9. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int ημ^2x\,dx \quad B = \int συν^2x\,dx \quad Γ = \int συν^3x\,dx$

$Δ = \int εφ^2x\,dx \quad E = \int σφ^2\,dx \quad ΣΤ = \sqrt{x}ημ^3x\,dx$

$Z = \int ημ^2xσυν^2x\,dx \qquad H = \int ημ^2x\,συν2x\,dx$

$Θ = \int x^2\,ημ\,(x^3 + \frac{π}{4})\,dx \qquad I = \int συν^2x\,ημ2x\,dx$

$IA = \int \frac{ημ\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad IB = \int \frac{1}{x^2}συν(\frac{1}{x})\,dx$

5.1.10. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx \quad B = \int \frac{2}{x^2-1}\,dx \quad Γ = \int \frac{3x^2-5x-6}{x+1}\,dx$

$Δ = \int \frac{7x+1}{3x^2-7x+2}\,dx \quad E = \int \frac{x^3+x}{x^3-x}\,dx \quad ΣΤ = \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-2}\,dx$

$Z = \int \frac{3x-2}{x^3-3x+2}\,dx \quad H = \int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx$

$Θ = \int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

***

5.1.11. Να βρεθεί η συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις

α) $f''(x) = 2x - 3συνx$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

β) $f'(x) = 5x^4 + 2x + 1$ και $f(0)=1$

γ) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)^2 + \sqrt{x}}{x^2}$ και $f(1)= 5$

δ) $f'(x) = e^x + συνx - ημx$ και $f(0)= 3$.

ε) $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα

σημεία Α(1,2) και Β(- 1 , 3)

5.1.12. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f(x) για τις οποίες ισχύει $f'(x^2)=3x+4$ με

$f(1)= 7$

5.1.13. Να βρεθεί συνάρτηση f :R->R, αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο

$x_0 =1$ με τιμή -14 και $f''(x) =24x^4 +24x+2$

5.1.14. Να βρεθεί συνάρτηση f (0,+∞) -> R, αν η γραφική της παράσταση έχει

ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 3x+4$ και $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$.

5.1.15. Αν f :R->R και $\int f(x)e^{-x}\,dx = e^{2x} + c$, να βρεθεί η f .

5.1.16. Αν f :R->R και $f'(x) = 2e^{-f(x)}$, να βρεθεί η f ,αν επίσης γνωρίζουμε

ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5.1.17. Αν η συνάρτηση f έχει άρτια παράγουσα ,να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα .

5.1.18. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f(x) για τις οποίες ισχύει

$f'(x)συνx+f(x)ημx=f(x)συνx$ με $f(0)= 2002$ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5.1.19. Έστω η $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^3} e^{\frac{x-1}{x}}$.Να βρεθούν οι α , β $\in \Re$ ώστε η

$F(x) = \left(a + \dfrac{b}{x}\right) e^{\frac{x-1}{x}}$ να είναι αρχική της f στο $\Re^*$

5.1.20. Αν η πολυωνυμική f είναι γν. αύξουσα με $f(0)=0$ και

$(1+2f'(x))\, f'\left(\dfrac{2x+4f(x)}{6}\right) = 3$ $\forall x \in \Re$ να αποδείξετε ότι $f(x) = x$

5.1.21. Αν για την παραγωγίσιμη f ισχύουν $f(1) = 0$, $2f'(x) = 3f(2-x)$ $\forall x \in \Re$ να βρεθεί ο τύπος της f

5.1.22. Δίνονται τα ολοκληρώματα $I_\nu = \int$ εφ $^\nu x\, dx$ και $J_\nu = \int$ σφ $^\nu x\, dx$

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Να αποδείξετε ότι

α) $I_\nu = \frac{1}{\nu-1}\text{εφ}^{\nu-1}x - I_{\nu-2}, \nu \geq 3$ β) $J_\nu = \frac{1}{\nu-1}\text{σφ}^{\nu-1}x - J_{\nu-2}, \nu \geq 3$

5.1.23. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η επιτάχυνσή του σε m/sec^2 την χρονική στιγμή t είναι $a(t)= 2t-3$, $0 \leq t \leq 20$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κινητού συναρτήσει του t αν την χρονική στιγμή t = 0 το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα 2m/sec
β) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται σε θετική και πότε σε αρνητική κατεύθυνση.
γ) Αν την χρονική στιγμή t = 0 η θέση του κινητού είναι x(0) = 0 , να βρείτε την θέση του κινητού την στιγμή t = 5sec
δ) Να υπολογίσετε το συνολικό διανυθέν διάστημα από t =0 εώς και t =20 sec

5.1.24. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η επιτάχυνσή του σε m/sec^2 την χρονική στιγμή t είναι $a(t)= 2t-5$, $0 \leq t \leq 10$.
α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κινητού συναρτήσει του t αν την χρονική στιγμή t = 0 το αυτοκίνητο έχει ταχύτητα 4m/sec
β) Να βρείτε πότε το κινητό κινείται σε θετική και πότε σε αρνητική κατεύθυνση.
γ) Αν την χρονική στιγμή t = 0 η θέση του κινητού είναι x(0) = 2m , να βρείτε την θέση του κινητού την στιγμή t = 3sec
δ) Να υπολογίσετε το συνολικό διανυθέν διάστημα από t =0 εώς και t =3 sec

5.1.25. Από την πώληση x ($0 \leq x \leq 150$) μονάδων ενός προϊόντος μιας εταιρίας τα έσοδα E(x) μεταβάλλονται με ρυθμό $E'(x)= 150 - x$ χιλάδες ευρώ ανα μονάδα προϊόντος . Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι 3000 ευρώ ανα μονάδα προϊόντος . Να βρεθεί το κέρδος από την πώληση 120 μονάδων προϊόντος.

5.1.26. Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού N(t) μιας κοινωνίας βακτηριδίων είναι $N'(t)= 15 \cdot e^{\frac{3t}{2}}$ χιλιάδες ανα λεπτό . Να βρείτε τον πληθυσμό N(t) αν ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είναι 1.000.000 βακτηρίδια .

5.1.27. Μια γεώτρηση έχει ρυθμό αντλησης $\rho'(t) = 5+\frac{3}{2}t - \frac{t^2}{4}$ κυβικά μέτρα ανά ώρα. Πόσα κυβικά μέτρα νερού θα έχουν αντληθεί τις 4 πρώτες ώρες;

5.1.28. Σε ένα ορνιθοτροφείο διατίθενται για κατανάλωση 40 κιλά τροφής τις πρωινές ώρες και ο ρυθμός κατανάλωσης είναι $K'(t) = -0{,}06\sqrt{t}$ κιλά τροφή ανά λεπτό . Να βρείτε

α) Την ποσότητα της τροφής που υπάρχει στο ορνιθοτροφείο ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Σε πόσο χρόνο η τροφή θα εξαντληθεί.

5.1.29. Το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος αυξάνεται με ρυθμό $E'(t) = 4t+5$, $0 \le t \le 10$. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $E=1$ να βρεθεί το εμβαδόν ως συνάρτηση του χρόνου.

5.2 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

α. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Κατηγορίες Παραγοντικής Ολοκλήρωσης

1. $\int P(\chi)\ e^{\lambda x+\mu}\,dx = \int P(x)\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x+\mu}\right)'dx = \frac{1}{\lambda}\int P(x)\left(e^{\lambda x+\mu}\right)'dx$

   $\int P(x)\ \alpha^{\lambda x+\mu}\,dx = \int P(x)\left(\frac{1}{\lambda\ln\alpha}\alpha^{\lambda x+\mu}\right)'dx = \frac{1}{\lambda\ln\alpha}\int P(x)\left(\alpha^{\lambda x+\mu}\right)'dx$

2. $\int P(x)\ \eta\mu(\lambda x+\kappa)\,dx = -\frac{1}{\lambda}\int P(x)(\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\kappa))\,dx$

   $\int P(x)\ \sigma\upsilon\nu(\lambda x+\kappa)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int P(x)(\eta\mu(\lambda x+\kappa))'dx$

3. $\int P(x)\ln(f(x))\,dx = \int P'(x)\ln(f(x))\,dx$

4. $\int e^{kx}\eta\mu(\gamma x+\delta)\,dx = \int \left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)'\eta\mu(\gamma x+\delta)\,dx$

   $\int e^{kx}\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)\,dx = \int \left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)'\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)\,dx$

Σημειώσεις

1. Για όλα τα παραπάνω μπορεί $P(x) = 1$, οπότε $(x)' = P(x)$

2. Η εφαρμογή του τύπου της παραγοντικής ολοκλήρωσης μπορεί να γίνει πολλές φορές ώστε να καταλήξω σε πιο απλό ολοκλήρωμα
   π.χ στα ολοκληρώματα $\int P(x)\ e^{\lambda x+\mu}\,dx$, $\int P(x)\ \eta\mu(\lambda x+\kappa)\,dx$, $\int P(x)\ \sigma\upsilon\nu(\lambda x+\kappa)\,dx$ ο τύπος , εφαρμόζεται ν φορές όπου ν ο βαθμός του πολυωνύμου

3. Στα ολοκληρώματα $\int e^{kx}\eta\mu(\gamma x+\delta)\,dx$ $\int e^{kx}\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)\,dx$
   ο τύπος εφαρμόζεται 2 φορές και έτσι δημιουργείται εξίσωση με άγνωστο το αρχικό ολοκλήρωμα

β . ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int f(g(x)g'(x)dx = \int f(u)du$$
με $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

Κατηγορίες Ολοκλήρωσης με Αντικατάσταση

1. $\int \frac{1}{(x-p)^k}\,dx$

Θέτω $t = g(x)= x - p$ και διακρίνω δυο περιπτώσεις

Α) κ≠1τότε

$$\int \frac{1}{(x-p)^k}\,dx=\int \frac{1}{(x-p)^k}(\chi\text{-}p)'dx=\int \frac{dt}{t^k}=\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+c$$

Β) κ=1

$$\int \frac{1}{(x-p)^k}\,dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+c$$

2. $\int \frac{1}{x^k}P(x)\,dx$, απλά διαιρώ το P(x) με το χ και καταλήγω σε εύκολο ολοκλήρωμα

3. $\int \frac{1}{(x-p)^k}P(x)\,dx$ Θέτω $t = x - p$ και φτάνω στην προηγούμενη μορφή

4. $\int f\left(\sqrt[d1]{\frac{kx+m}{qx+n}},\sqrt[d2]{\frac{kx+m}{qx+n}},\ldots,\sqrt[dk]{\frac{kx+m}{qx+n}}\right)dx$

Θέτω $\frac{kx+m}{qx+n}=t^{\nu}$ όπου ν = ΕΚΠ(d1,d2,.....,dk)

5. $\int f(e^{\alpha x})dx$ Θέτω $t= e^{\alpha x}$, όπου αx ο μικρότερος εκθέτης του e και καταλήγω σε ολοκλήρωση ρητής .

6. Πολλές φορές για την εύρεση του $\int_a^b f(x)dx$ χρήσιμη είναι η αντικατάσταση
u = a+b-x

7. $\int \sqrt{a^2-\beta^2x^2}$ dx θέτω $x=\dfrac{\alpha}{\beta}\eta\mu t$

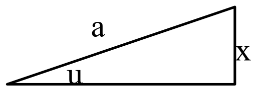
8. $\int \sqrt{a^2x^2\pm\beta^2}$ dx θέτω $\sqrt{a^2x^2\pm\beta^2} = t-|a|x$

9. $\int \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$ dx με α>0 θέτω $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$ = t - $\sqrt{\alpha}$ x

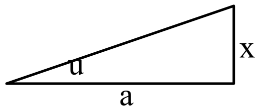
10. $\int \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$ dx με α < 0 και Δ<0 τότε το τριώνυμο μετασχηματίζεται στην μορφή $\kappa^2 - (\lambda\chi+\mu)^2$ οπότε θέτω λχ+μ= κt

11. Α) $\int \sqrt{a^2-x^2}$ dx ή Β) $\int \sqrt{a^2+x^2}$ dx ή Γ) $\int \sqrt{x^2-a^2}$

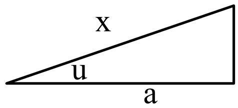
Α) $\int \sqrt{a^2-x^2}$ θέτω x= **a ημu**



Β) $\int \sqrt{a^2+x^2}$ θέτω **χ= a εφ u**



Γ) $\int \sqrt{x^2-a^2}$ θέτω χ= $\dfrac{a}{\text{συν}u}$



Κατηγορίες Ολοκλήρωσης Τριγωνομετρικών

1. $\int$ R(ημχ,συνχ)dx ρητή➔ t=εφ($\dfrac{x}{2}$)

οπότε $dt=d(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}) \Rightarrow dt=[\,\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})]' dx \Rightarrow dt=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}\,\dfrac{1}{2}\,dx \Rightarrow$

$dx = 2\ \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\,dt \Rightarrow dx = 2\,\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

Ακόμη $\eta\mu\chi = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \eta\mu\chi=\dfrac{2t}{1+t^2}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Με την παραπάνω αντικατάσταση λύνονται σχεδόν όλες οι τριγωνομετρικές επειδή όμως καταλήγουμε σε πολύπλοκες συναρτήσεις (<u>και για αυτό καταφεύγουμε σε αυτήν όταν δεν έχουμε τίποτα άλλο να κάνουμε</u>) ας δούμε κάποιες τεχνικές ανάλογα με την δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο τριγωνομετρικός αριθμός

2. $\int$ R(ημχ,συνχ)dx περιττή ώς προς ημχ ➔ t =συνχ

3. $\int$ R(ημχ,συνχ)dx περιττή ως προς συνχ ➔ t =ημχ

4. $\int$ R(ημχ,συνχ)dx άρτια ώς προς ημχ, συνχ ➔ t =εφχ

οπότε $\eta\mu^2\chi = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} = \dfrac{t}{1+t^2}$ $\quad \sigma\upsilon\nu^2\chi = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} = \dfrac{1}{1+t^2}$ και

$$dt = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}dx$$

5. $\int$ ημαχσυνβχdx ή $\int$ συναχσυνβχdx ή $\int$ ημαχημβχ dx τότε

$$\text{ημαχσυνβχ dx}=\frac{1}{2}[\text{ημ}(\alpha+\beta)\chi+\text{ημ}(\alpha-\beta)\chi]$$

$$\text{συναχσυνβχ dx}=\frac{1}{2}[\text{συν}(\alpha+\beta)\chi+\text{συν}(\alpha-\beta)\chi]$$

$$\text{ημαχημβχ dx}=\frac{1}{2}[\text{συν}(\alpha-\beta)\chi-\text{ημ}(\alpha+\beta)\chi]$$

6 $\int$ $\eta\mu^{\kappa}\chi\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx$ ή $\int$ $\eta\mu^{\kappa}\chi\,dx$ ή $\int$ $\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx$ τότε

A) **<u>Άν κ περιττός κ=2ρ+1</u>**

$\int \eta\mu^{\kappa}\chi\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx = \int \eta\mu^{2\rho+1}\,\sigma\upsilon\nu\nu^{\lambda}\chi\,dx = \int \eta\mu^{2\rho}\chi\,\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx =$

$-\int [\eta\mu^2\chi]^{\rho}\,(\sigma\upsilon\nu\chi)'\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx = -\int [1-\sigma\upsilon\nu^2\chi]^{\rho}\,(\sigma\upsilon\nu\chi)'\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx$ και θέτω t = συνχ.. .

B) **<u>Άν λ περιττός λ=2ρ+1</u>** όμοια έχω .....

$\int \eta\mu^{\kappa}\chi\,\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi\,dx = \int [1-\eta\mu^2\chi]^{\rho}\,(\eta\mu\chi)'\,\eta\mu^{\kappa}\chi\,dx$ και θέτω t=ημχ...

Σχόλιο γι τις Α , Β : Γενικά σπάω τον περιττό εκθέτη σε ζυγό και τα εκφράζω όλα βάσει του ενός τριγωνομετρικού αριθμού ημχ ή συνχ

Γ) **<u>Άν κ , λ άρτιοι</u>** τότε χρησιμοποιώ τους τύπους

$\eta\mu^2\chi = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ $\quad \sigma\upsilon\nu^2\chi = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ $\quad \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{1}{2}\eta\mu 2\chi$

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

Παραγοντική ολοκλήρωση

5.2.1. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int (1-x)e^{-x}\,dx$ $\quad B = \int x e^{x}\,dx$

$\Gamma = \int (x^2 - 3x+5)\,dx$ $\quad \Delta = \int x e^{-2x} dx$

$E = \int x^2 e^x\,dx$ $\quad ΣT = \int 4x^2 e^{-x}\,dx$

$Z = \int x^2 2^x\,dx$ $\quad H = \int x 3^{-x}\,dx$

5.2.2. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int x\,\text{συν}(5x-\pi)dx$ $\quad B = \int (x^2-1)\,\text{συν}^2 x dx$

$\Gamma = \int (x+2)\text{ημ}(x-3)dx$ $\quad \Delta = \int x^2\,\text{συν}(3x-1)dx$

$E = \int (x^2-5x+6)\,\text{ημ}^2(x)dx$ $\quad ΣT = \int x^3\,\text{συν}(3x)dx$

5.2.3. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int e^x\,\text{ημ}x\,dx$ $\quad B = \int e^{-2x}\,\text{συν}(2x+1)dx$

$\Gamma = \int e^x\,\text{συν}x\,dx$ $\quad \Delta = \int e^x\,\text{συν}(3x-4)dx$

$E = \int e^{3x}\,\text{ημ}(3x+1)\,dx$ $\quad ΣT = \int x e^x\,\text{συν}x\,dx$

5.2.4. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \ln x\,dx$ $\quad B = \int x^2 \ln x\,dx$

$\Gamma = \int x \ln x\,dx$ $\quad \Delta = \int (2x-5)\ln(x+1)\,dx$

$E = \int \ln^2 x \cdot x^{-3}\,dx$ $\quad ΣT = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

$Z = \int (x+1)\ln(x^2+x)\,dx$ $\quad H = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx$

5.2.5. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A = \int \frac{6x-5}{\text{συν}^2 x}\,dx$ $\quad B = \int \frac{3x-5}{\text{ημ}^2 x}dx$

$\Gamma = \int \frac{x}{\text{ημ}^2 x}dx$ $\quad \Delta = \int \frac{x}{\text{συν}^2 x}dx$

5.2.6. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A=\int e^{2x-1}dx \quad B=\int \frac{1-\ln x}{x^2}dx \quad \Gamma=\int (1+x)\, e^{x^2+2x}\, dx$

$\Delta=\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}dx \quad E=\int (1+x)\, e^{x^2+2x}\, dx \quad \Sigma T=\int x^2\, 2^{x^3+1}dx$

$Z=\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx \quad H=\int \frac{e^x(1+x\ln x)}{x}dx$

$\Theta=\int \eta\mu x\cdot \ln(1+\eta\mu x)dx \quad I=\int \sigma\upsilon\nu x\cdot \ln(1+\sigma\upsilon\nu x)dx$

Αντικατάσταση

5.2.7. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A=\int e^x\, \sigma\upsilon\nu\, e^x\, dx \quad B=\int \frac{x^3}{x^4+2}dx \quad \Gamma=\int \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+6x+1}}dx$

$\Delta=\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+b}}dx \quad E=\int \varepsilon\varphi x dx \quad \Sigma T=\int \sigma\varphi x dx$

5.2.8. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A=\int \sigma\varphi(x^2+2x+5)(x+1)\, dx \quad B=\int x\, \varepsilon\varphi\, (x^2)\, dx$

$\Gamma=\int \frac{e^{-x^2}}{x^3}dx \quad \Delta=\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu x}}dx$

$E=\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \quad \Sigma T=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$Z=\int \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

5.2.9. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A=\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx \quad B=\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

$\Gamma=\int x\sqrt{2x-3}\, dx \quad \Delta=\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$

$E=\int x\,(1-x)^8\, dx \quad \Sigma T=\int x^2\,(x+1)^{7/3}\, dx$

5.2.10. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$A=\int \frac{e^x-1}{e^x+2}dx \quad B=\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}dx$

$\Gamma=\int \sigma\upsilon\nu\,(\ln x)\, dx \quad \Delta=\int \eta\mu\,(\ln x)\, dx$

$\text{Ε} = \int \eta\mu(\sqrt{x})\,dx$ $\quad\quad$ $\Sigma\text{Τ} = \int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$\text{Ζ} = \int \dfrac{e^x+1}{e^x+3}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Η} = \int \dfrac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$

$\Theta = \int \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+6}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Ι} = \int \sigma\upsilon\nu^3 x \ \ln(\eta\mu x)\,dx$

$\text{ΙΑ} = \int \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{ΙΒ} = \int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

5.2.11. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$\text{Α} = \int \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Β} = \int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

$\Gamma = \int \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\quad\quad$ $\Delta = \int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$

$\text{Ε} = \int \sigma\upsilon\nu^5 x\sqrt{\eta\mu x}\,dx$ $\quad\quad$ $\Sigma\text{Τ} = \int \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx$

5.2.12. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$\text{Α} = \int \sqrt{9-4x^2}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Β} = \int \sqrt{16x^2-9}\,dx$

$\Gamma = \int \sqrt{16x^2+25}\,dx$ $\quad\quad$ $\Delta = \int \sqrt{5x^2+6x+3}\,dx$

$\text{Ε} = \int \sqrt{-2x^2+x-3}\,dx$ $\quad\quad$ $\Sigma\text{Τ} = \int \sqrt{9-x^2}\,dx$

$\text{Ζ} = \int \sqrt{25+x^2}\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Η} = \int \sqrt{x^2-4}\,dx$

Τριγωνομετρικές

5.2.13. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$\text{Α} = \int \eta\mu^2 x\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Β} = \int \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$

$\Gamma = \int \sigma\upsilon\nu^4 x\,dx$ $\quad\quad$ $\Delta = \int \eta\mu^3 x\,dx$

$\text{Ε} = \int \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$ $\quad\quad$ $\Sigma\text{Τ} = \int \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}\,dx$

$\text{Ζ} = \int \varepsilon\varphi^2 x\,dx$ $\quad\quad$ $\Theta = \int \sigma\varphi^2 x\,dx$

5.2.14. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$\text{Α} = \int \eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu^4 x\,dx$ $\quad\quad$ $\text{Β} = \int \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$

$\Gamma = \int \sigma\upsilon\nu^4 x\,dx$ $\quad\quad$ $\Delta = \int \eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$\text{Ε} = \int \eta\mu^3 x\ \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx$ $\qquad$ $\Sigma\text{Τ} = \int \dfrac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx$

$\text{Ζ} = \int \dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x}\, dx$ $\qquad$ $\text{Η} = \int \dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu x}\, dx$

5.2.15. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα*

$\text{Α} = \int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x\, dx$ $\qquad$ $\text{Β} = \int \sigma\upsilon\nu 4x \sigma\upsilon\nu 2x\, dx$

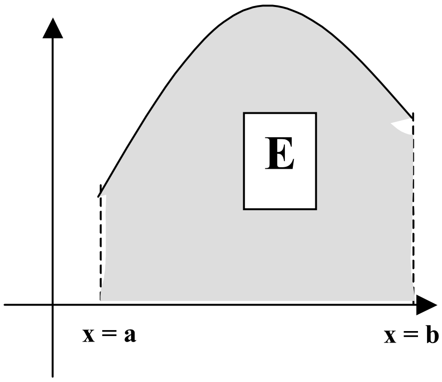
$\Gamma = \int \sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu 3x\, dx$ $\qquad$ $\Delta = \int \eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu 2x\, dx$

$\text{Ε} = \int \eta\mu 4x \eta\mu 5x\, dx$ $\qquad$ $\Sigma\text{Τ} = \int \sigma\upsilon\nu 4x \eta\mu^2 x\, dx$

$\text{Ζ} = \int \dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x}\, dx$

5.4. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [a, b] και f ***συνεχής*** στο [a, b] τότε το ολοκλήρωμα $I = \int_a^b f(x)dx$ εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα xx' και τις κατακόρυφες ευθείες με εξισώσεις x =a , x= b .



Τα a και b ονομάζονται ***άκρα ολοκλήρωσης***

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Αν f(x) , g(x) είναι συνεχείς στο [a,b] τότε

I. $\int_a^a f(x)dx = 0$

II. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

III. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

IV. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

V. Αν f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [a,b] , τότε $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

VI. Αν f(x) ≥ g(x) ∀ x ∈ [a,b] τότε $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$ *(Απόδειξη)*

VII. Αν a, b, γ ∈ Δ (χωρίς να έχει σημασία η διάταξη) τότε :

$$\int_a^\gamma f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\gamma f(x)dx$$

VIII. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,d\chi$

Παρατηρήσεις

1. *Το ορισμένο ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)dx$ *είναι πραγματικός αριθμός σε αντίθεση με το αόριστο ολοκλήρωμα που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων, και δεν εξαρτάται από το γράμμα που παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της f .Έτσι*
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$
2. *Στην έκφραση* $\int_a^b f(x)dx$ *το x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα ,π.χ* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$
3. *Αποδεικνύεται ότι* $\int_a^b cdx = c(b-a)$ *. Ειδικότερα αν c> 0 τότε το* $\int_a^b cdx$ *εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση b –a και ύψος c*

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

5.4.1. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο R . Να γραφούν στην μορφή $\int_a^b f(x)dx$ οι παραστάσεις

α) A= $\int_5^{13} f(x)dx + \int_3^{5} f(x)dx + \int_1^{3} f(x)dx$

β) B = $\int_{-3}^{5} f(x)dx - \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_5^{6} f(x)dx$

γ) Γ = $\int_1^{6} 3f(x)dx - 3\int_1^{6} (f(x)+3)dx$

5.4.2. Αν $\int_2^5 f(x)dx = -1$ και $\int_8^5 f(x)dx$ = -2 και $\int_8^{10} f(x)dx = 4$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) A= $\int_2^5 f(u)du$ β) B = $\int_2^{10} f(t)dt$

γ) Γ = $\int_5^{10} f(x)dx$ δ) Δ = $\int_2^{8} f(x)dx$ ε) Ε = $\int_5^{8} f(u)du$

5.4.3. Αν $\int_1^5 f(x)dx = 3$ και $\int_1^5 g(x)dx = 2$ να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) A= $\int_1^5$ *(f(x) – g(x)) dx* B = $\int_1^5$ *(2f(x)- 3g(x))dx*

5.4.4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^4 \frac{3x^2+10}{x^2+2}dx - \int_1^4 \frac{4}{x^2+2}dx = 9$

5.4.5. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε

$$2\int_{-4}^{k} \frac{x^2}{3x^2+12}dx - \int_{k}^{-4} \frac{8}{3x^2+12}dx = 1$$

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} 3x-5, & \alpha\nu \quad 1 < x \le 2 \\ x-1, & \alpha\nu \quad 2 < x < 4 \\ 3, & \alpha\nu \quad 4 < x \le 6 \end{cases}$

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται

$$A = \int_1^2 f(x)dx,\ B = \int_3^2 f(x)dx,\ \Gamma = \int_3^4 f(x)dx, \Delta = \int_3^5 f(x)dx, \mathrm{E} = \int_0^2 f(x)dx,$$

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

5.4.6. Αν 3 < α< β , να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$

5.4.7. Να αποδειχθεί η πρόταση (***VI)***

5.4.8. Να αποδείξετε ότι α) $\int_2^5 \frac{1}{x^2+1}dx \le \int_2^5 \frac{x}{10}dx$

β) $\int_4^{10} x^2 dx \ge \int_4^{10} (5x-6)dx$

5.4.9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5] και $\int_1^5 f(x)dx < 8$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ [1,5] τέτοιο ώστε $f(x_0) < 2$.

5.4.10. Αν m η ελάχιστη και Μ η μέγιστη τιμή της συνεχούς f στο [α,β] να αποδείξετε ότι $m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^b f(x)dx \le M(\beta-a)$

5.4.11. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x) = e^{x^2-x} , x∈[0,2]

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 f(x)dx \le 2e^2$

5.4.12. Να αποδείξετε ότι

α) $\frac{\pi}{5} \le \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{5-\sigma\upsilon\nu^2 x}}dx \le \frac{\pi}{4}$

β) $\frac{\pi}{100} \le \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(3+2\sigma\upsilon\nu t)^2}dx \le \frac{\pi}{76}$

5.5. Η συνάρτηση $\int_\gamma^x f(t)dt$

Θεώρημα 1

Αν f(x) είναι ορισμένη και συνεχής στο [a,b] τότε η συνάρτηση F με $F(x)=\int_\gamma^x f(t)dt$ και $\gamma\in[\alpha,b]$ είναι παραγωγίσιμη στο [α, b] και μάλιστα $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in\Delta$ Συνεπώς ισχύει

$$\left(\int_\gamma^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Έστω f συνεχής στο Δ Τότε για τις παρακάτω συναρτήσεις ισχύουν

❶ Αν $G(x) = \int_\gamma^x f(t)dt = -\int_x^\gamma f(t)dt = -F(x)$ τότε η $G(x)= -F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$\mathbf{G'(x) = \left(\int_\gamma^x f(t)dt\right)'} = -\left(\int_x^\gamma f(t)dt\right) = -F'(x) = \mathbf{-f(x)} \quad \forall x\in\Delta$$

❷ Αν $G(x) = \int_\gamma^{g(x)} f(t)dt$ με g παραγωγίσιμη στο Α με $g(A)\subset\Delta$ και $\gamma\in A$ τότε η $G(x)= F(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο Α με

$$\mathbf{G'(x)= \left(\int_\gamma^{g(x)} f(t)dt\right)'} = F'(g(x))g'(x) = \mathbf{f(g(x))g'(x)} \quad \forall x\in A$$

❸ Αν $G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$ με g, h παραγωγίσιμες στο Α με $g(A)\cup h(A)\subset\Delta$ και $\gamma\in A$

τότε $G(x)=\int_{h(x)}^\gamma f(t)dt + \int_\gamma^{g(x)} f(t)dt = -\int_\gamma^{h(x)} f(t)dt + \int_\gamma^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)) - F(h(x))$ πού είναι παραγωγίσιμη στο Α με

$$G'(x)= \left(\int_{h(x)}^\gamma f(t)dt + \int_\gamma^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)- f(h(x))h'(x) \quad \forall x\in\Delta$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. *Η συνάρτηση* $F(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt$ *ονομάζεται και συνάρτηση οριζόμενη από ολοκλήρωμα ή <u>ολοκλήρωμα μεταβλητού άκρου</u> . Οι ασκήσεις πάνω σε τέτοιας μορφής ολοκληρώματα παρουσιάζουν μεγάλη συγγένεια με τις ασκήσεις και τις τεχνικές των παραγώγων . Σχεδόν πάντα θα χρειαστεί να τις παραγωγίζουμε χρησιμοποιώντας τις 3 παραπάνω περιπτώσεις*

2. *Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f έχει αρχικές στο Δ.*

3. *Το πεδίο ορισμού της* $F(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt$
   - *Αν η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και* $\gamma \in \Delta$ *τότε και* $A_F = \Delta$
   - *Αν η f έχει πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α που είναι ένωση διαστημάτων και* $\gamma \in A$ *τότε η F έχει ως πεδίο ορισμού εκείνο το υποδιάστημα του Α που περιέχει το γ.*
   - *Γενικά το πεδίο ορισμού της F είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f.*

4. *Για να κάνουμε σωστή παραγώγιση συναρτήσεων οριζόμενων από ολοκλήρωμα είναι αναγκαίο να κατανοήσουμε την διαφορά της μεταβλητής παραγώγισης (που είναι η μεταβλητή της συνάρτησης)από την μεταβλητή ολοκλήρωσης. Γενικά η μεταβλητή της συνάρτησης (άρα και της παραγώγισης) είναι αυτή που βρίσκεται στο άκρο ολοκλήρωσης*

$$f(x) = \int_3^{2x} g(t)dt$$

Έτσι για παράδειγμα

Αν $f(t) = \int_2^t tg(x)dx$ *τότε η μεταβλητή παραγώγισης είναι το t και η οποία μέσα στο ολοκλήρωμα θεωρείται ως σταθερά άρα είναι* $f(t) = t \cdot \int_2^t g(x)dx$ *, οπότε*

$$f'(t) = \left(t \cdot \int_2^t g(x)dx \right)' = (t)' \cdot \int_2^t g(x)dx + t \left(\int_2^t g(x)dx \right)' = \int_2^t g(x)dx + t \cdot g(t)\ dt$$

5. ***Προσοχή***

$$\left[\int_a^x \underbrace{\left(\int_b^u f(t)dt\right)}_{\left(\text{Θέτω } \varphi(u) = \int_b^u f(t)dt\right)} du\right]' = \left[\int_a^x (\varphi(u)du\right]' = \varphi(x) = \int_b^x f(t)dt$$

Θεώρημα
(Θ.Θ.Ο.Λ – Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Αν f(x) είναι ορισμένη και συνεχής στο Δ και α, b ∈ Δ τότε αν F είναι μια παράγουσα της f στο [α,β] τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

Με βάση το παραπάνω Θεώρημα μπορούμε να βρίσκουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση των τεχνικών που μάθαμε στην εύρεση του αορίστου ολοκληρώματος :

α. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

β. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

με $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

<u>Μέθοδος</u>

1. Κάνω την αντικατάσταση $g(x) = t$, $dt = g'(x)dx$.
   <u>Μετα από αυτόν το μετασχηματισμό θα πρέπει να εμφανίζεται μόνο το γράμμα t , όχι το x</u>

2. Υπολογίζω τα νέα άκρα ολοκλήρωσης απο την σχέση $t = g(x)$
   για $x=\alpha \Rightarrow t_1=g(a)$ για $x=b \Rightarrow t_2=g(b)$

3. Είναι $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_a^b f(g(x))d(g(x))=\int_{t1}^{t2} f(t)dt =[F(t)]_{t1}^{t2}$
   (μέ $F'(t) = f(t)$)

4. Επαναφέρω την μεταβλητή x

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

5.5.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \int_{-3}^{x} \eta\mu t\,dt$ β) $f(x) = \int_{3}^{x} \sqrt{t-1}\,dt$

γ) $f(x) = \int_{2}^{x} \frac{1}{t-1}\,dt$ δ) $f(x) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\ln t}\,dt$

5.5.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = \int_{8}^{2x-5} \eta\mu\sqrt{t-1}\,dt$ β) $f(x) = \int_{-2}^{x^2-10x} \sqrt{t^2-3t}\,dt$

γ) $f(x) = \int_{2x}^{x+1} \sqrt{t^2-4t}\,dt$ δ) $f(x) = \int_{-1}^{3x} \frac{1}{t}\,dt$

ε) $f(x) = \int_{x}^{3x} \frac{1}{t}\,dt$ ε) $f(x) = \int_{2x+1}^{3x-2} \frac{1}{\ln t}$

5.5.3. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x) = \int_{a}^{\beta} xf(t)dt$ β) $g(\varphi) = \int_{a}^{\beta} xf(t)dt$

γ) $g(\beta) = \int_{a}^{\beta} 6xt^2dt$ δ) $g(t) = \int_{a}^{\beta} 6xt^2dx$

ε) $g(\alpha) = \int_{a}^{\beta} 6xt^2d\kappa$

5.5.4. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x) = \int_{1}^{x} \eta\mu(t^2)dt$ β) $g(x) = \int_{1}^{x} \eta\mu(x^2)dt$

γ) $g(x) = \int_{1}^{x} \eta\mu(\varphi^2)dt$ δ) $g(x) = \int_{1}^{t} \eta\mu(\varphi^2)d\rho$

ε) $g(x) = \int_{1}^{x} \eta\mu(xu)dt$ στ) $g(x) = \int_{3}^{u} \sigma\upsilon\nu(xt)d\varphi$

5.5.5. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x) = \int_{1}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ β) $g(x) = \int_{3}^{x} \ln t\,dt$

γ) $g(x) = \int_{x}^{2} \frac{t}{e^t+1}\,dt$ δ) $g(x) = \int_{-3}^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{1+3^t}\,dt$

ε) $g(x) = \int_{x}^{-1} (\sigma\upsilon\nu^2 t - t)\,dt$ στ) $g(x) = \int_{3}^{u} \sigma\upsilon\nu(xt)d\varphi$

5.5.6. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων των ασκήσεων 5.5.1 και 5.5.2

5.5.7. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x) = \int_1^{x^3} e^t \, dt$ β) $g(x) = \int_2^{\text{συν}x} \ln t \, dt$

γ) $g(x) = \int_x^{-1} (\text{συν}^2 t - t) dt$ δ) $g(x) = \int_{e^x}^{2} (x^2 + 1) dt$

5.5.8. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{|t|}}{t^2+1} dt$ β) $g(x) = \int_{-x+3}^{6x+x^2} \ln(1+t^2) dt$

γ) $g(x) = \int_{\text{ημ}x}^{\text{συν}x} \frac{2}{e^t+1} dt$ δ) $g(x) = \int_x^{\text{ημ}x} e^t dt$

***

5.5.9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 2) dx$ β) $\int_1^e \ln x dx$ γ) $\int_0^{\pi} \text{ημ}3x dx$

δ) $\int_1^2 \frac{32}{9x+2} dx$ ε) $\int_0^2 (5x^3+3)^4 \cdot x^2 \, dx$

στ) $\int_1^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx$ ζ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ημ}x}{\sqrt{\text{συν}x}} dx$ η) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{\varepsilon\varphi x \, dx}$

θ) $\int_0^{\pi/2} \text{ημ}^2 x \, dx$ ι) $\int_{\pi/2}^{\pi} \text{συν}^2 x \, dx$

5.5.10. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 |x^2 - x - 2| dx$

5.5.11. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 |1 - x^2| dx$

5.5.12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^4 |-x^2 + 5x - 6| dx$

5.5.13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^4 3x - |x-1| dx$

5.5.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2, x \geq -2 \\ 12, x < -2 \end{cases}$. Να υπολογίσετε (εφ'όσον ορίζονται) τα ολοκληρώματα $\int_{-2}^1 f(x)dx, \int_{-4}^{-2} f(x)dx, \int_{-4}^1 f(x)dx$

5.5.15. Έστω f : $(1,+\infty) \to \Re$ με τύπο $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

α) Να βρεθεί η f '

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

5.5.16. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(-2,1) και Β(3,5) . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{3} f'(x)dx$

5.5.17. Αν $f(x) = \int_0^x (2t^2-3t+1)dt$ να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{2} f''(x)dx$

5.5.18. Αν η f είναι συνεχής και για x > 0 είναι $\int_0^{x^2} f(t)dt = xe^x$

Να υπολογίστε τα $\int_0^1 f(t)dt$ και f(1).

5.5.19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα *(Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης)*

α) $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$ β) $\int_0^{1/2} \frac{2}{x^2-1}dx$ γ) $\int_0^1 \frac{2x^3-3x^2-1}{x^2-x-2}dx$

5.5.20. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα *(Παραγοντική ολοκλήρωση)*

α) $\int_0^1 xe^x dx$ β) $\int_0^{\pi/2} x\,\text{συν}(3x)dx$

γ) $\int_0^{\pi/4} x^2 \text{ημ}x dx$ δ) $\int_1^e \ln x dx$

ε) $\int_0^{\pi} e^x \text{συν}x dx$ στ) $\int_0^{\pi/2} e^{-x}\text{ημ}2x\, dx$ z) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\text{συν}^2 x}$

5.5.21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα (*Με αλλαγή μεταβλητής)*

α) $\int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} 2xdx$ β) $\int_0^1 x\ln(x^2+9)dx$ γ) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

δ) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ ε) $\int_0^{\pi^2} \text{ημ}(\sqrt{x})dx$ στ) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+2}dx$

ζ) $\int_0^1 x(1-x)^8 dx$

5.5.22. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα *(Τριγωνομετρικές)*

α) $\int_0^{\pi/2} \text{ημ}^3 x dx$ β) $\int_0^{\pi} \text{ημ}^2 x\, \text{συν}^3 x dx$ γ) $\int_0^{\pi/4} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{συν}x}dx$

δ) $\int_0^{\pi/6} \frac{\text{συν}^3 x}{1-\text{ημ}x}dx$ ε) $\int_0^{\pi} \frac{\text{ημ}x}{3+\text{ημ}^2 x}dx$

Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

5.5.23. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x)=\int_1^{\int_1^x \eta\mu t dt} \eta\mu t dt$ β) $f(x)=\int_0^{\int_1^x \eta\mu t dt} t dt$

γ) $f(x)=\int_{\int_0^x \eta\mu t dt}^{\int_1^x \eta\mu t dt} \eta\mu t dt$ δ) $f(x)=\int_{15}^{x}\left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2}dt\right)dy$

δ) $f(x)=\int_3^x\left(\int_5^u \eta\mu^2 t dt\right)du$ ε) $f(x)=\int_5^x\int_2^t \sqrt{u^2-u}\,du dt$

5.5.24. Αν $f(x)=\int_0^x \sqrt{x}\,\eta\mu(t^2)dt$ Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο.

5.5.25. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\int_0^x (t^2-t)dt$

5.5.26. Αν $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \eta\mu(t^2)dt$ να βρείτε

α) το $f'(0)$. β) το $f(0)$.

5.5.27. Αν $f(x)=\int_1^x \sqrt{t}dt$ να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη x = 1.

5.5.28. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{e^t}dt$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

5.5.29. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x (\ln t - t + 1)dt$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο $(0, +\infty)$.

5.5.30. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Re$ να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+e^\lambda} f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

5.5.31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt+\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt, x>0$

α) Να βρείτε την f'

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή

γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

5.5.32. Να μελετήσετε ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση f(x) = $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt, x>0$

5.5.33. Έστω f συνεχής και θετική συνάρτηση στο $\Re$ και η συνάρτηση g με g(x) = $\int_0^x (x-t)f(t)dt$

α) Να βρείτε την g'

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $\Re$.

5.5.34. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^{1/x}\frac{\ln t}{t}dt}{x-1}$

5.5.35. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x \frac{\eta\mu t}{t}dt$

5.5.36. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \eta\mu(3t)e^{t^3}dt}{x^2}$

5.5.37. Έστω f :$\Re$ -> $\Re$ με f '(0) =1 και f(0) = 0 .

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x xf(t)dt}{x-\eta\mu x}=3$

5.5.38. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής και άρτια στο [-1,1] να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = $\int_x^{x+1} f(\eta\mu\pi t)dt$ είναι σταθερή στο $\Re$.

5.5.39. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και f(x) = $\int_1^x \left(\int_0^{\pi/2} f(t)\sigma\upsilon\nu x dx\right)dt$ να αποδείξετε ότι είναι σταθερή

5.5.40. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_0^x$ f(t)dt = f(x) -e^x

5.5.41. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύει 1+$\int_0^x$ f(t)dt e^t = (x^2+1) e^x.

5.5.42. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο [0 ,π/2] για την οποία ισχύει $\int_a^\chi f(t)dt = 1-\sigma\upsilon\nu x$. Ποια είναι η τιμή του α;

5.5.43. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύει 3+ $\int_0^x$ f(t)dt = $(2x^2+x+3)e^x$

5.5.44. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ για την οποία ισχύει
e^x συνx+$\int_0^x e^t f(t)\,dt = 1+e^x f(x)$

5.5.45. α) Να υπολογίσετε το Ι(α) = $\int_{-1}^{a}(x+1)e^{-x}dx$

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$

5.5.46. α) Να υπολογίσετε το Ι(α) = $\int_a^1 (1-x-\ln(\frac{x}{x+1}))dx$

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)$

5.5.47. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\int_e^x \left(\int_1^{t^2} \ln u\,du\right)dt, x>0$

α) Να υπολογίσετε τις f ', f''
β) Να βρεθεί το σημείο καμπής της f .

***

5.5.48. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

α) $g(x)=\int_1^x f(xt)dt$ β) $g(x)=\int_1^x f(x-t)dt$

γ) $g(x)=\int_x^{x+3} f(xt)dt$ δ) $g(x)=\int_{3-x}^{x^2} f(x-t)dt$

συναρτήσει των f , f '.

5.5.49. Αν η συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο και
f(α)=f(β)=g(α)=g(β) =0 να αποδείξετε ότι
$\int_a^\beta$ g(x)f ''(x)dx = $\int_a^\beta$ f(x)g''(x)dx.

5.5.50. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ισχύει η σχέση

$\int_0^{\pi/2}$ [f '(x) ημx +f(x)συνx] = 3 .Να βρεθεί το f($\frac{\pi}{2}$).

5.5.51. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,π] και ισχύει η σχέση $\int_0^\pi$ [f(x)+f ''(x)] ημxdx = 5με f(π)=1 . Να βρεθεί το f(0).

5.5.52. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο [0,π] και ισχύει η σχέση
$\int_0^\pi$ [f '(x) e^{-x} - f(x) e^{-x}] = 1 .Να βρεθεί το f(π) , αν f(0) =1 .

5.5.53. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο [0,1] και ισχύει η σχέση
$\int_0^1$ x^2f ' (x)dx = 2004 - $\int_0^1$ xf(x)dx να βρεθεί το f(1).

5.5.54. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, α>0

5.5.55. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και συνεχής στο [-α,α] να αποδείξετε ότι

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, a > 0$

5.5.56. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α,α] να αποδείξετε ότι

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$

5.5.57. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^k (1-x)^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^k dx$, k, λ ∈N*

5.5.58. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ να αποδείξετε ότι

$\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$

5.5.59. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0,π] να αποδείξετε ότι

$\int_0^{\pi} x\, f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$

5.5.60. Να βρείτε την συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν f(0) = 2004 , f '(0)=1 και

$1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t dt$

5.5.61. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και με f περιττή c ∈ℜ να αποδείξετε ότι

$\int_a^{\beta} f(x)dx = \int_{c-a}^{c-\beta} f(x)dx$

5.5.62. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] να αποδείξετε ότι

$\int_a^{\beta} f(x)dx = (\beta - a)\int_0^1 f((\beta-\alpha)x+\alpha)dx$

5.5.63. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και ισχύει ότι f (α+β –x) = f(x) να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} xf(x) = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

5.5.64. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{\nu} x dx = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$

5.5.65. Αν $I_\nu = \int_1^e \ln x dx$ και $K_\nu = \int_1^e x\ln x dx$ να αποδείξετε ότι

α) $I_\nu = e - \nu I_{\nu-1}$ ν≥2

β) $2K_\nu + \nu K_{\nu-1} = e^2$ ν≥2

5.5.66. Αν $I_ν = \int_0^1 x^ν e^{-x}dx$, ν∈N* να αποδείξετε ότι $I_ν = -\frac{ν+1}{e} + ν(ν+1)I_{ν-2}$

5.5.67. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ℜ και $\int_3^x f(t)dt \geq x^2 - 5x + 6$, να βρείτε το f(3).

5.5.68. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και $\int_0^1 f(t)dt = 3$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $\int_0^ξ f(t)dt = e^ξ$.

5.5.69. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ℜ να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ > 0 τέτοιο ώστε $-\int_1^ξ f(t)dt = ξf(ξ)$

5.5.70. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ℜ και f(x)≥ 4 για κάθε x∈ℜ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_5^x f(t)dt = 3x-1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο [5,20].

5.5.71. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και f(x) < 1 για κάθε x∈[0,1] να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο (0,1).

5.5.72. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $\int_a^ξ f(t)dt + \int_β^ξ f(t)dt = a + β - 2ξ$

5.5.73. Να λυθεί η ανίσωση $\int_1^x \frac{e^t}{t}dt \leq \ln x$.

5.5.74. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{π}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (0,1)$ τέτοιο ώστε f(ξ) = ημ(πξ).

5.6. Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα 1

Αν f(x) είναι συνεχής στο [a,b] και μ, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [a , b] τότε

$$\mu(\beta\text{-}\alpha) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(\beta\text{-}\alpha)$$

Θεώρημα 2

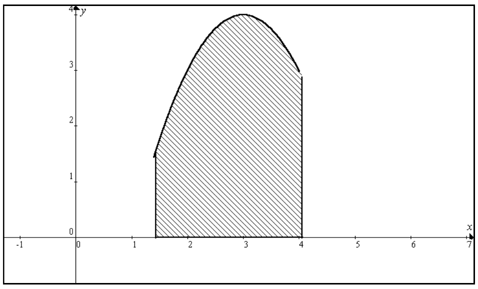
Αν f(x) είναι συνεχής στο [a,b] τότε υπάρχει ξ ∈ [a,b] τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b\text{-}a)$$

5.7. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

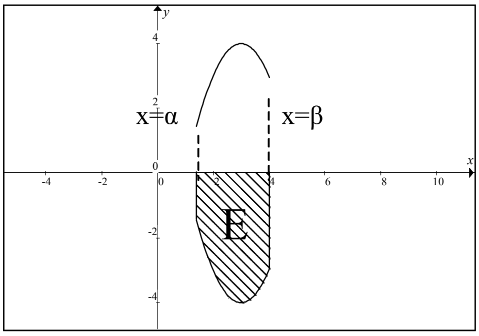
1. Εμβαδόν που ορίζεται από μια συνάρτηση

Έστω Ε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f , τον άξονα xx ' και τις ευθείες x= α και x= β . Τότε



Α . Αν ***f(x) ≥ 0*** στο [α,β]

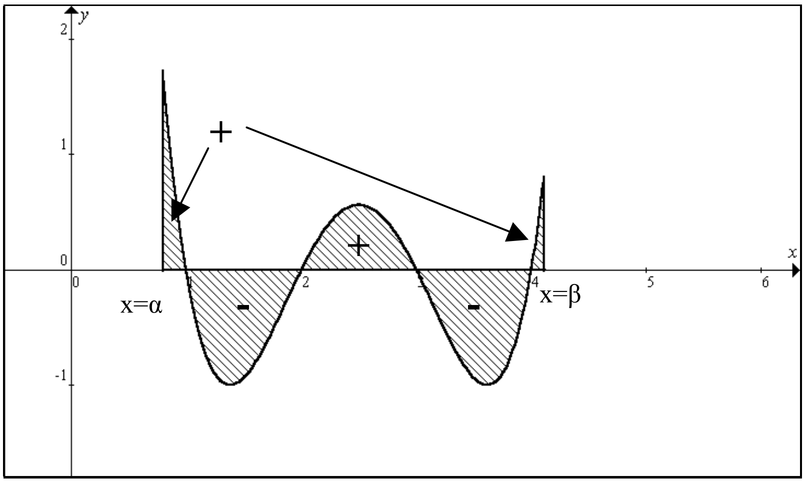
είναι $E = \int_{a}^{\beta} f(x)dx$



Β. Αν ***f(x)< 0*** στο [α,β]είναι

$E = -\int_{a}^{\beta} f(x)dx$

Γ . ***Άν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β]*** τότε βρίσκουμε τα υποδιαστήματα στα οποία η f διατηρεί σταθερό πρόσημο λύνοντας την ανίσωση f(x)>0 στο [α,β]



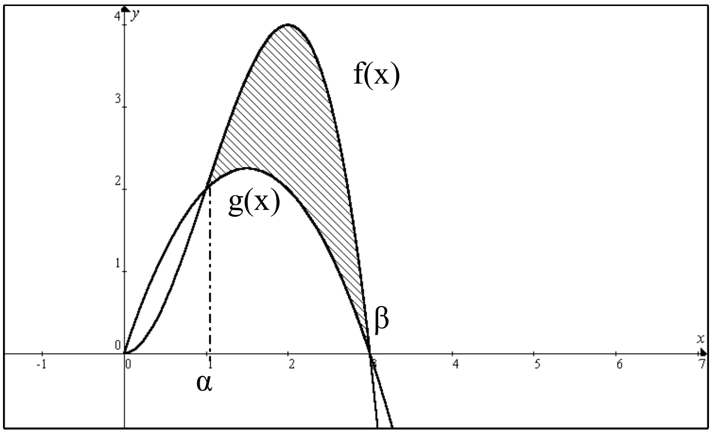
Έτσι , για παράδειγμα το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος είναι

$$E = \int_{a}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx - \int_{3}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{\beta} f(x)dx$$

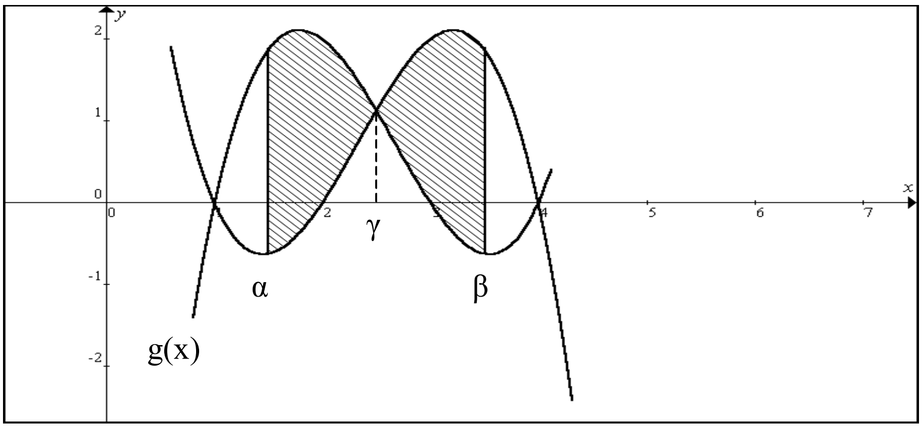
2. Εμβαδόν που ορίζεται από δυο συναρτήσεις

Έστω Ε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση δυο συνεχών συναρτήσεων f ,g , τον άξονα xx ' και τις ευθείες x= α και x= β . Τότε

A . ***Αν f(x) ≥ g(x) για κάθε x ∈[α,β]*** τότε Ε = $\int_a^{\beta}(f(x)-g(x))dx$



B ***Αν η διαφορά f(x) – g(x) δεν έχει σταθερό πρόσημο στο [α,β]*** τότε βρίσκουμε τα υποδιαστήματα στα οποία η f(x)>g(x) λύνοντας την ανίσωση f(x) >g(x) στο [α,β] είναι δηλαδή Ε = $\int_a^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$

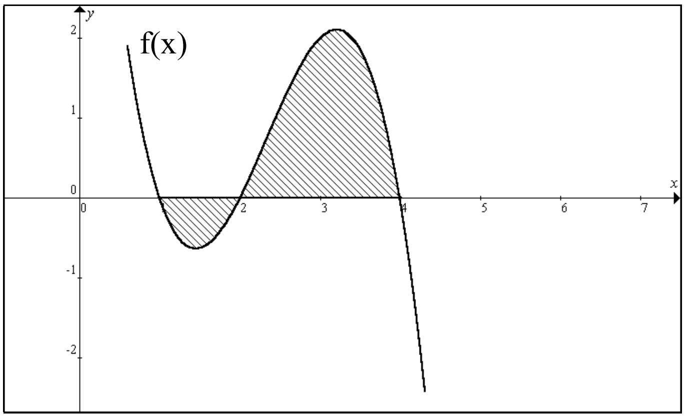


Έτσι , για παράδειγμα το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος είναι

Ε = $\int_a^{\gamma}(g(x)-f(x))+\int_{\gamma}^{\beta}(f(x)-g(x))$

3. Ειδικές περιπτώσεις

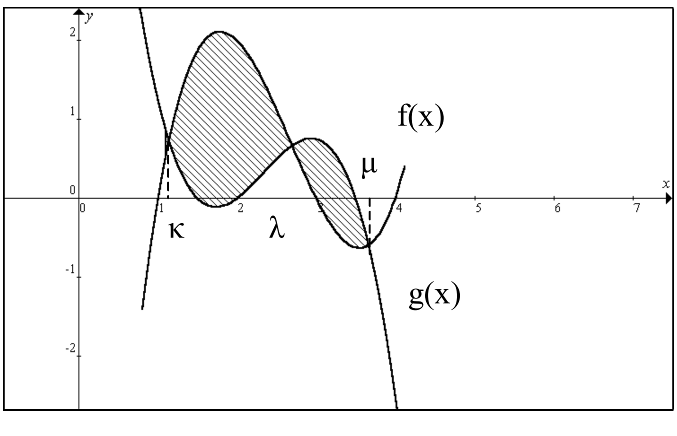
Α Αν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης και τον άξονα xx΄ , και δεν μα δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης δηλαδή τα α, β τότε θα πρέπει να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' λύνοντας την εξίσωση f(x) =0 και βρίσκοντας το πρόσημο της f(x) στα διαστήματα μεταξύ των ριζών της f λύνοντας την ανίσωση f(x)>0



Για παράδειγμα στο παραπάνω σχήμα αν λύσουμε την f(x) = 0 βρίσκουμε τις ρίζες x=1 , x=2, x=4 οπότε

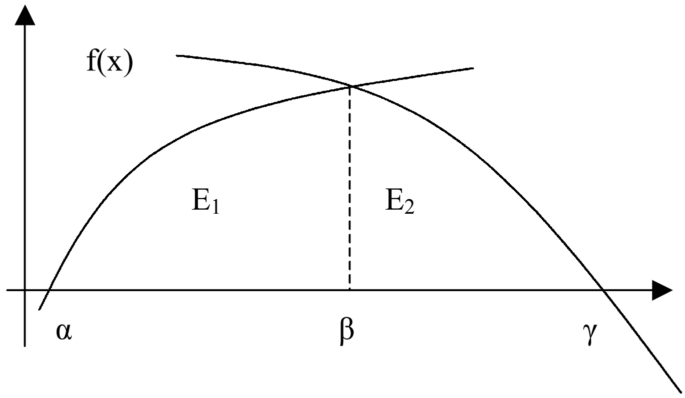
E = $-\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$

Β . Αν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δυο συνεχών συναρτήσεων και τον άξονα xx΄ , και δεν μα δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης δηλαδή τα α, β τότε θα πρέπει να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g λύνοντας την εξίσωση f(x) =g(x) και βρίσκοντας την σχετική τους θέση στα διαστήματα μεταξύ των ριζών λύνοντας την ανίσωση f(x)>g(x)



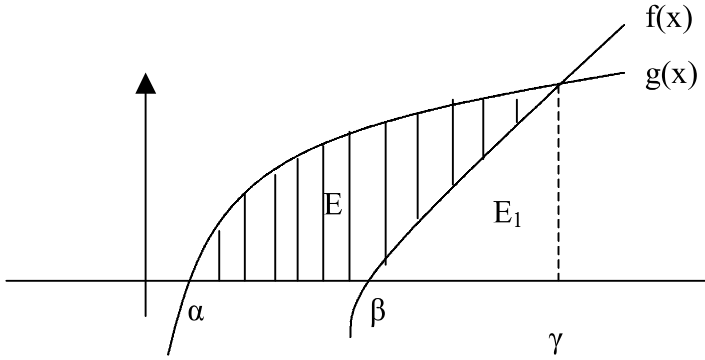
Για παράδειγμα στο παραπάνω σχήμα αν λύσουμε την f(x) = g(x) βρίσκουμε τις ρίζες x=κ , x=λ, x=μ οπότε E = $\int_k^\lambda (f(x)-g(x))dx + \int_\lambda^\mu (g(x)-f(x))dx$

Γ



$$E = E_1 + E_2 = \int_a^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} g(x)dx$$, β ρίζα της f(x)=g(x) στο [α,γ]

Δ



$$E = (E+E_1) - E_1 = \int_a^{\gamma} g(x)dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$$

Ασκήσεις Α ΄Ομάδας

5.7.1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2+1$,του άξονα xx' και των ευθειών $x=1$ και $x = 3$.

5.7.2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x+4)\, e^{-x}$,του άξονα xx' και των ευθειών $x= -1$ και $x = 1$.

5.7.3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - \frac{1}{x}$,του άξονα xx' και των ευθειών $x= 1$ και $x = e$.

5.7.4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x^2$,του άξονα xx' και των ευθειών $x= -1$ και $x = 2$.

5.7.5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = - 2^x$, του άξονα xx' και των ευθειών $x=0$ και $x = 1$.

5.7.6. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = συν2x$, του άξονα xx' και των ευθειών $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{\pi}{3}$.

5.7.7. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2- 3x+2$, του άξονα xx' και των ευθειών $x=0$ και $x = 3$.

5.7.8. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = - x^2+ 5x - 6$, του άξονα xx' και των ευθειών $x=0$ και $x = 5$.

5.7.9. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -ημx$, του άξονα xx' και των ευθειών $x= - \pi$ και $x = \pi$.

5.7.10. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$, του άξονα xx' και των ευθειών $x= 0$ και $x = 2$.

5.7.11. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$, του άξονα xx' και των ευθειών $x= - 2$ και $x = 2$.

5.7.12. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 – 3x^2 –x+3$, του άξονα xx' και των ευθειών $x= - π$ και $x = π$.

***

5.7.13. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2+2$, $g(x) = -x^2+2x$ και των ευθειών $x=0$ και $x = 4$.

5.7.14. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x-1$ και των ευθειών $x=1$ και $x = 4$.

5.7.15. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ και των ευθειών $x= - 1$ και $x = 2$.

5.7.16. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$ και των ευθειών $x= - 2$ και $x = 3$.

5.7.17. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 –5x^2$, $g(x) = x^3 – 4x^2$ και των ευθειών

α) $x= - 2$ και $x = 1$. α) $x= - 1$ και $x = 2$.

***

5.7.18. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4- x^2$, και τον άξονα xx' .

5.7.19. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 –2x – 3$, και τον άξονα xx' .

5.7.20. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 –3x + 2$, και τον άξονα xx' .

5.7.21. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, τον άξονα xx' και την $x = e$.

***

5.7.22. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$,$x\in [0,2π]$

5.7.23. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^2 - x - 1$

5.7.24. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = xe^x + 1$, $g(x) = x + e^x$.

5.7.25. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x + \frac{1}{2}$ και της ευθείας $4x - 2y + 1 = 0$.

5.7.26. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3x - x^2$, $g(x) = x\,f(x)$.

5.7.27. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$ και την $x = -1$.

5.7.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 6x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$

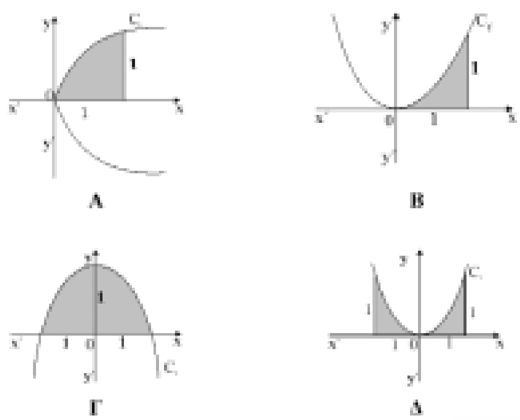
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) και των ευθειών

I) $y = 0$, $x = 0$ και $x = 1$.

II) $y = 0$, $x = -1$ και $x = 2$.

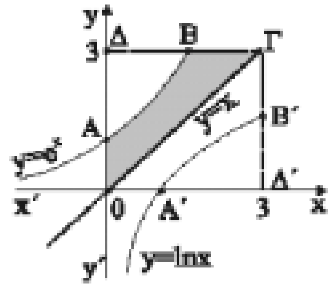
5.7.29. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη είναι παραβολή .Να υπολογίσετε τα γραμμοσκιασμένna εμβαδα



5.7.30. Στο διπλανό σχήμα

α) Να υπολογίσετε το (ΑΒ'Δ')

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου



Ασκήσεις Β ΄Ομάδας

5.7.31. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2$,της εφαπτομένης της στο σημείο Α(-2,4) και του άξονα xx' .

5.7.32. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = -x^2 - 2x + 3$,της εφαπτομένης της στο σημείο Α(2,-5) και του άξονα yy' .

5.7.33. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-1}$,της εφαπτομένης της στο σημείο Α(5,5) του άξονα xx 'και του άξονα yy' .

5.7.34. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, της $g(x) = \ln x$,της εφαπτομένης της Cg στο σημείο Α(1,0) και του άξονα xx' .

5.7.35. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2$,της $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ και της ευθείας $y = 2x$

5.7.36. α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$, $g(x) = -1$ και των ευθειών $x = -1$ και $x = m$.

β) Να βρεθεί το $m > 4$ ώστε $E = 3/2$

5.7.37. Δίνεται η συνάρτηση f: $\Re^*_+ \to \Re$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ και οι ευθείες x= 1, x= 3 και x = m , m>3

α) Να υπολογιστεί το m ώστε το εμβαδόν E_1 που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x), του άξονα xx' και των ευθειών x= 1 και x = 3 ,να είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x), του άξονα xx' και των ευθειών x= 3 και x = m

β) να βρεθεί το $\lim\limits_{m \to +\infty} E_2(m)$

5.7.38. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2}$

α) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) και των ευθειών x= 1 και x = λ. ($0 < \lambda \neq 1$) .

β) Να βρεθεί το λ ώστε Ε(λ) = 3

γ) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{\lambda \to 0} E(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

5.7.39. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{1}{x^2}$

α) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) και των ευθειών x= 1 και x = λ. (λ>0) .
β) Να βρεθεί το λ ώστε Ε(λ) = 3
γ) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$, $\lim_{\lambda\to +\infty} E(\lambda)$
δ) Να βρεθεί ο ακέραιος α για τον οποίο η ευθεία x=α χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δυο ισεμβαδικά χωρία .

5.7.40. Έστω η καμπύλη $f(x) = 2x - x^2$ και η ευθεία y = kx (0 <k< 2). Να βρεθεί η τιμή του k ώστε η ευθεία να χωρίζει το εμβαδόν που περιλαμβάνεται από την γραφική παράσταση της f , τον αξονα xx' , και την x=1 ,σε δυο ίσα μέρη για x≤1.

5.7.41. α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 2$, και τον άξονα xx' .
β) Να βρεθεί ο ακέραιος α για τον οπίο η ευθεία x=α χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε λόγο $\frac{11}{6}$

5.7.42. α) Να αποδείξετε ότι x-1 ≥ lnx , x>0
β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) την ευθεία y =x-1και των ευθειών $x= \frac{1}{e}$ και x = e

5.7.43. α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής C : x^2 =2y- 4 οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων .
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C και τις παραπάνω εφαπτομένες .

5.7.44. α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής C : x^2 =4y- 4 οι οποίες διέρχονται από το K(-2,-3) .
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C και τις παραπάνω εφαπτομένες .

Επιλεγμένα Επαναληπτικά Θέματα

Επαναληπτικά Θέματα

115

Επαναληπτικά Θέματα

+

70

Θέματα Παλαιότερων εξετάσεων

Επαναληπτικά Θέματα

Α ' Μιγαδικοί

Θέμα 1ο. A. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z+16| = 4|z+1|$

B. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z-1| = |z-i|$

Γ. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν τις σχέσεις των ερωτημάτων A , B και να τους γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή .

Θέμα 2ο. A. Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 2(\text{συνθ}) \cdot z + 1 = 0$, $\theta \in (0,\pi)$

B. Αν z_1 ,z_2 ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $\text{Im}(z_1) > \text{Im}(z_2)$ να βρείτε το θ ώστε $\text{Arg}(z_1^3 \cdot z_2) = \dfrac{\pi}{4}$

Θέμα 3ο. A. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\text{Agr}(w) = \dfrac{5\pi}{3}$ και $w = (1+\sqrt{3}\cdot i)z$

B. Έστω z, w δυο μιγαδικοί με $zw \neq 0$ και $z^2|z|^{2002} + w^2|w|^{2002} = 0$.
Άν A , B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z , w αντίστοιχα και O η αρχή των αξόνων , να αποδείξετε ότι τρίγωνο AOM να είναι ισοσκελές και ορθογώνιο .

Θέμα 4ο. Έστω $z \neq 0$ και A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z , z^2, $z^2 + i \cdot z$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο . Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με Γ = 90° τότε

α)Να αποδείξετε ότι $|z - 1 + i| = 1$

β)Να αποδείξετε ότι $\text{Arg}(1 + i - i \cdot z) = \dfrac{\pi}{2}$ ή $\dfrac{3\pi}{2}$

γ)Να βρεθεί ο z .

Θέμα 5ο. A. Αν z , w μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $w = (1+i)z + 2 - i$. Αν η εικόνα του z κινείται στην ευθεία ε : $2x + \psi - 3 = 0$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w .

B. Αν z , w μιγαδικοί αριθμοί με $z \neq \pm iw$ και $\text{Arg}(z+iw) = \text{Arg}(z - iw) + \dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $|z| = |w|$

Θέμα 6ο. α). Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 2(\text{συνθ}) \cdot z + 1 = 0$, $\theta \in (0,\pi)$

β). Αν z_1 ,z_2 ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $\text{Im}(z_1) > 0$ να τις γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $z_1^{2004} + z_2^{2004}$

δ) Αν A , B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 αντίστοιχα και M η εικόνα του μιγαδικού w , να βρείτε το M ώστε το τρίγωνο ABM να είναι ισόπλευρο .

Επαναληπτικά Θέματα

Επαναληπτικά Θέματα

Θέμα 7ο.

A.

A1 Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 2(\text{συν}\theta)\cdot z + 1 = 0$, $\theta \in (0,\pi)$

A2. Αν z_1, z_2 ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να αποδείξετε ότι $z_1^{2004} + z_2^{2004} = 2^{2005}\,\text{συν}(2004\theta)$

B.

B1. Να βρείτε ένα μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού

$$w = \frac{(\sqrt{3}+i)^{\nu}}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{6}}, \quad \nu \in N^*$$

B2 Να βρεθούν οι τιμές του ν για τις οποίες $\mathrm{Arg}(w) = \dfrac{\pi}{3}$

Θέμα 8ο. Δίνεται ο μιγαδικός $z \neq 1$ και έστω $f(z) = \dfrac{2 + i\bar{z}}{1 - \bar{z}}$

προσοχή

α) Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $z_1 = f(2)$

β) Να αποδείξετε ότι ο $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = |z|$

δ) Αν $|z|=1$ και Μ η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του f(z) .

Θέμα 9ο.

A) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός .

α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $z \in \Re \Leftrightarrow |z|^2 = z^2$

B) Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός , ο οποίος κινείται πάνω σε κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας ρ= 1 και $3\displaystyle\int_0^1 |xz + \bar{z}|^2\,dx = 7$

β) να αποδείξετε ότι $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

γ) να αποδείξετε ότι $z \in \Re$

Θέμα 10ο. Έστω ο μιγαδικός $z = \text{συν}\theta + i\cdot\text{ημ}\theta$, $\theta \in (0, \pi)$, $z \neq 1$

α) να γραφούν οι μιγαδικοί $w_1 = 1 + z$ και $w_2 = 1 - z$ σε τριγωνομετρική μορφή

β) να αποδείξετε ότι $w = \dfrac{w_1}{w_2} = i \cdot \text{σφ}\dfrac{\theta}{2}$

γ) να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |w| = \ln 2$

Θέμα 11ο. Έστω $z \neq 1$ που ικανοποιεί την σχέση $3z^{2001} + 2001\,\bar{z}^{2001} = 2004$

α) να δείξετε ότι $\bar{z}^{2001} = z^{2001} = 1$

β) να δείξετε ότι $|z| = 1$

γ) να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{1+z}{1-z} \in I$

Θέμα 12ο. Αν $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ και ισχύει $|z_1| = |z_3| = |z_3| = \alpha$, $\alpha \in R^*$, να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \alpha\,|z_1 + z_2 + z_3|$

Θέμα 13ο. Έστω $z_1, z_2 \in C$

α)Να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$

β)Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και οι μιγαδικοί

$z = \alpha^2 + i f(a)$, $w = f(\beta) + i\beta^2$, $\alpha,\beta \neq 0$ που ικανοποιούν την σχέση

$|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$

Θέμα 14ο. Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \Re$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $\alpha>0$, και $z_1 = \alpha + i f(\alpha)$, $z_2 = \beta + i f(\beta)$.

α)να δείξετε ότι αν $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, τότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_1)=0$

β) Αν Α, Β $\in \Re$ με Α≠Β και $Az_1\overline{z_2} + Bz_2\overline{z_1} = 2003$, να αποδείξετε ότι

i) $Az_2\overline{z_1} + Bz_1\overline{z_2} = 2003$

ii) $z_1\overline{z_2} \in \Re$

iii) $\beta f(\alpha) = \alpha f(\beta)$

iv) υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

Θέμα 15ο. Έστω $z = x + \dfrac{1}{x+i}\,i$

α)Να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(z) < \dfrac{1}{2}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $z \in I$

γ) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Im}(z)\eta\mu\chi$

Θέμα 16ο. Αν $x > 0$ $z = ex + i$, $w = \ln x - i$. Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{Re}(zw) = 0$

Θέμα 17ο. Έστω $z = e^x - 2i\sqrt{3x}$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z - 5|$.

Θέμα 18ο. A) Έστω f συνεχής στο $\Re$ με $f(x) \neq 0$ και $\displaystyle\int_a^\beta f(x)dx = 0$,

α, β $\in \Re$. Να δείξετε ότι α= β

B) Αν $\displaystyle\int_{|z-1|}^{|z|} t^4 + e^{\eta\mu t}\,dt = 0$ να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$

Θέμα 19ο. Έστω $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\, e^x - \frac{1}{3}x^3 - x + 3$

α) Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία – ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν την σχέση $\int_{|z-1|}^{|z-i|} f(t)\,dt = 0$

Θέμα 20ο. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες και παραγωγίσιμες στο [α, β] με $g(x) \neq 0$ στο [α, β].
Έστω ακόμα οι μιγαδικοί αριθμοί z = f(α) – if(β) και w = g(β) – ig(α) για τους οποίους ισχύει: $|z - \overline{w}| = |\overline{z} + w|$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $zw \in C \setminus IR$.

β) $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$.

Θέμα 21ο. **α)** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $z^2 = |z|^2 + 2i\left[(\mathrm{Im}\,z)^2 i + 1\right]$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) σε οποιοδήποτε σημείο της γραμμής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν.

(*Απάντηση:* **β)** Ε = 2τ.μ.)

Θέμα 22ο. Δίνεται ο μη μηδενικός αριθμός z και μια συνάρτηση f συνεχής στο IR. Αν τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|zf(x) - 3| - 3}{x}$ και $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|zf(x) + 1| - 1}{x - 1}$ υπάρχουν στο IR, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε f(ξ) = 0.

Θέμα 23ο. **α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f που έχει συνεχή παράγωγο στο [1, e] και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1 - \int_1^e f'(x)\ln x\,dx$.

Να βρείτε το f(e) = α.

β) Έστω z_1 η λύση του συστήματος: $|z - 3i| = |z + i|$ και $|z - i| = |z - 1|$.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $|z - 2i + \alpha| = \mathrm{Re}(z_1)$.

Θέμα 24ο. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν η εξίσωση $f(\alpha)z^2 + f(\beta)|z|^2 + f(\alpha) + f(\beta)i = 0$ έχει ρίζα τον 1 + Ι να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Θέμα 25ο. Έστω $z = x + yi$ και $w = \dfrac{z - \alpha i}{z + \alpha i}$ δυο μιγαδικοί αριθμοί με $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνον αν $|z| = \alpha$

β) Αν το σημείο Μ(x, y) κινείται πάνω στην γραμμή με εξίσωση $|z| = \alpha$ και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec,να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y τη χρονική t_0 κατά την οποία ισχύει $x = \dfrac{\alpha}{2}$. (*Απάντηση:* **β)** $y'(t_0) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

Θέμα 26ο. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to IR$ και τους μιγαδικούς: $z_1 = f(\alpha) + \alpha^2 i$ και $z_2 = f(\beta) - \beta^2 i$, για τους οποίους ισχύει: $|z_1 + \bar{z}_2| \le |\bar{z}_1 - z_2|$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε:
$f(\xi) = 0$.

Θέμα 27ο. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to IR$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και τους μιγαδικούς: $z_1 = \alpha^2 + f(\alpha)i$ και $z_2 = \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{f(\beta)}i$, $\alpha, \beta > 0$για τους οποίους ισχύει: $|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2|$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\xi f'(\xi) = 2f(\xi)$

Θέμα 28ο. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 + i\alpha^{\eta\mu x}$, $\alpha > 0$ και $w = 1 + \eta\mu x + i$, για τους οποίους ισχύει: $|\bar{z} - w| \le |z + \bar{w}|$.Να βρείτε τον α.
(*Απάντηση:* $\alpha = e$)

Θέμα 29ο. Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντιστοίχως $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 1$ και $|w| = |w + 1 - i|$ Να δειχθεί ότι:

α) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος C με κέντρο Κ (0, 1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

β) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = x + 1$.

γ) η ευθεία (ε) του ερωτήματος (β) τέμνει τον κύκλο C του ερωτήματος (α) σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά.

δ) αν t_1, t_2 είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι τομές των (ε) και C, τότε ισχύει: $|t_1 + t_2|^{3\nu} + |t_1 - t_2|^{2\nu} = 2^{3\nu+1}$.

Επαναληπτικά Θέματα

Β ' Ανάλυση

Θέμα 30ο. Έστω $f : \Re \to \Re$ που ικανοποιεί την σχέση

$$2f(\chi) - 3f(-\chi) = 5\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

β) Να βρεθεί ο τύπος της f

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της

δ) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της , καθώς και το σύνολο τιμών της

ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα .

στ) Αν $g(\chi) = \ln x$, να ορισθεί η $(f \circ g)(x)$

Θέμα 31ο. Έστω $f(\chi) = x^5 + \ln x - e$

α) Να βρεθεί το είδος μονοτονίας και το σύνολο τιμών της f

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) + e^x = 0$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα

δ) Αν $\lambda > 2$ να λυθεί η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 4)^5 - (\lambda+8)^5 = \ln\frac{\lambda+8}{\lambda^2-4}$$

Θέμα 32ο. Έστω $f : (0, +\infty) \to \Re$ με $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

α) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$

β) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+3) + f(x) = f(x^2+1) + f(x+1)$, αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Αν $f(\chi) > 0$ για $\chi > 0$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 33ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

Α. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $f o g = h$.

β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi o f = h$.

Β. α) Να βρείτε τις f^{-1}, g^{-1} h^{-1} (αντίστροφες των f, g, h).

β) Να βρείτε τις $f^{-1} o g^{-1}$ και $g^{-1} o f^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} o f^{-1} = h^{-1}$

Θέμα 34ο. α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το Α= [0,3] . Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x+1)$ και της

$h(x) = f(2x^2+1) + f(x-1)$

β) Αν $f(x) = 3x - 2$ και $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 2x$, να βρεθεί η συνάρτηση f

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{4-x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof

Θέμα 35ο. Α . Έστω $f(x) = x^2 - 5$ και $g(x) = e^x - 1$. Να βρεθεί και να ορισθεί η συνάρτηση $(g^{-1} of)(x)$

Β. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει $(fof)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f

Θέμα 36ο. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(f(x)) = 3x-2$

α) να δείξετε ότι $f(1) = 1$

β) να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

Θέμα 37ο. Α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

$g(x) = \dfrac{2x^2 + 2\alpha x + \alpha}{2(x^2 - 1)}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

β) Για ποια τιμή του α ισχύει f = g;

Β . Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$

Θέμα 38ο. α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

β)Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$.

γ)Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sigma\upsilon\nu x} \right)$

δ)Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\eta\mu^2 x} - \dfrac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$

Θέμα 39ο. Α . Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ell n(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

Β . Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) + \eta\mu \dfrac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{\pi}{2}$. Να υπολογίσετε

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ β) $f'(1)$

Θέμα 40ο. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}$, αν $\mu \in R$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu)$, αν $\lambda, \mu \in R$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}$, αν $\alpha > 0$ δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$, αν $\alpha > 0$

Θέμα 41ο. Α . Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x})$

β) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x})$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu^{\rho} \dfrac{1}{x})$ με $\rho \in N^*$ και $\rho \geq 2$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell n \left(\dfrac{x^2 + \kappa^2}{x} \right)$, $\kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ell nx > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ell nx)$.

Θέμα 42ο. Α. Έστω p(χ) πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύουν:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{p(x)}{x - k} = 3$, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{x - k} = m$, $m \in \Re^*$, $p(0) = -6$

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί , m, k καθώς και το πολυώνυμο p(x)

Β . Αν $f(x) = \ell n \dfrac{x - 3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

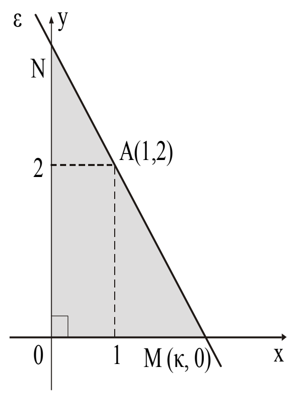
β) τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Θέμα 43ο.

Α. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α (1, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy στα Μ και Ν αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου Μ.

β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \to +\infty$ και όταν $\kappa \to 1$.



Β . Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα υ μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t, δίνεται από τη σχέση: $υ(t) = κ(1 - e^{-t})$ όπου κ μια θετική σταθερά.

α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση υ όταν $t \geq 0$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} υ(t)$.

γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ.

<u>Θέμα 44ο.</u> Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2{,}718$).

β) Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ) Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ) Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

<u>Θέμα 45ο.</u> Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηριδίων αναπτύσσεται σύμφωνα με τον τύπο: $P(t) = 6\left(\dfrac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}}$ χιλιάδες βακτηρίδια

όπου t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή της δημιουργίας της).

Πέντε ημέρες μετά εισάγεται στο περιβάλλον της καλλιέργειας ένα φάρμακο που έχει ως αποτέλεσμα η ανάπτυξη του πληθυσμού να γίνεται πλέον σύμφωνα με τον τύπο:

$$P(t) = 6\left(\frac{t+5}{t^2+12t+45}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ χιλιάδες βακτηρίδια}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες αμέσως μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να δίνει τον πληθυσμό της καλλιέργειας τις 10 πρώτες ημέρες από τη δημιουργία της.

β) Να βρείτε τον πληθυσμό σε κλάσματα του δευτερολέπτου πριν τη χορήγηση του φαρμάκου.

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της κλάσματα του δευτερολέπτου μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση του (α) ερωτήματος είναι συνεχής (στο πεδίο ορισμού της).

<u>Θέμα 46ο.</u> Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $f(0)= α$, $α > 0$ και $f(1) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (0,1)$: $f(x_0) = α \cdot x_0$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $κ, λ \in (0,1)$ με $f'(κ) \cdot f'(λ) = α^2$.

Θέμα 47ο. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $x_0 = 1$ με $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1} = 7$

α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=9$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α$(1, f(1))$.

Θέμα 48ο. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη στο [0,4] με $f(4)=1$ και $f(0)=7$

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν $\alpha \in [1, 7]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο [0 , 4].

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f, έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία $(\varepsilon): y = x+1$ στο [0,4]

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,4)$ με

$$f(x_1) = \frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$$

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $2y+3x+2004=0$

Θέμα 49ο. Έστω συνάρτηση $f: \mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ παραγωγίσιμη και συνεχής σε όλο το $\mathfrak{R}$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 5$ ii) $f(2)=2$ iii) $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$

Τότε

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=10$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Ο(0, f(0)).

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες στο (0,2)

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f(\xi) = 2-\xi$

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (0,2)$ τέτοια ώστε

$f'(\kappa)\cdot f'(\lambda) = +1$

Θέμα 50ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $g(x) = x^2+\beta x+\alpha$, $\alpha,\beta \in \mathfrak{R}$

α) να βρεθεί ο β ώστε οι C_f, C_g να έχουν ένα κοινό σημείο Α πάνω στην ευθεία $x=1$

β) να βρεθούν τα α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν στο σημείο Α κάθετες εφαπτομένες

γ) να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω εφαπτόμενων.

Θέμα 51ο. $\boxed{\text{Α.}}$ α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4+2x^3-7x^2-x+5$ και $g(x) = x^4-2x^3+2x^2+x-4$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο (1,2)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$4x^3+3(\alpha-1)x^2+2\beta x = \alpha+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathfrak{R}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ με $| x \cdot f(x) - \eta\mu^2 x | \leq x^4$ για κάθε $x \in \Re$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι

α) $f(0)=0$ και **β)** $f'(0)=1$

Θέμα 52ο. A) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση, $x \in \Re$, για την οποία ισχύει :
$f(x^2)+x \cdot f(x) = x^4+x^3+x+1$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρεθούν:

i) το $f'(1)$ ii) το $\lim_{x\to 1} \dfrac{xf(x)-2}{x-1}$

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$, $x \in \Re$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων .

ii) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha \in \Re$, ώστε οι παραπάνω ευθείες να είναι κάθετες μεταξύ τους .

Θέμα 53ο. A) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + x + 1$

α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (-1 ,1)

β)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 6x^2 + 1 = 10x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1 ,1)

B) Αν $f: \Re \to \Re$ με $f(f(x)) + f^3(x) = 2x+3$, $x \in \Re$

α) να δείξετε ότι η f είναι "1-1"

β) να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3+x) = f(4-x)$, $x \in \Re$

Θέμα 54ο. A) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,3] και παραγωγίσιμη στο (1,3) με την γραφική της παράσταση να τέμνει τον άξονα xx' στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $f(\xi) = (3-\xi) \cdot f'(\xi)$

B) Έστω συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ τέτοια ώστε $f''(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Re$. και $f(0) = f'(0) = 1$

α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ $x \in \Re$

είναι σταθερή .

β)Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 2e^x$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$

Θέμα 55ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4^x$, $g(x) = -x^2+4x+1$

α)να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g να έχουν τουλάχιστον δυο κοινά σημεία πάνω στίς ευθείες x =1 και x = 0

β)να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν παράλληλες εφαπτομένες σε ένα τουλάχιστον σημείο Α(α,β) με $\alpha \in (0,1)$

γ)να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g να δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από αυτά του ερωτήματος (α)

Θέμα 56ο. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - (10+\alpha)x^2 + \beta$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ με τιμή -2 τότε

α)Να βρεθούν τα α, β .

β)Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.

γ)Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.

δ)Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

ε)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

στ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f.

ζ) Να αποδείξετε ότι $3x^4 + 4x^3 + 32 \geq 12x^2$.

Θέμα 57ο. A) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για $x > 0$, και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $1 + \ln x = x$

B) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύει $x \cdot f(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$, $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$

Θέμα 58ο. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x + x^2 - x - 1$

α) Να βρείτε την f' , και την f'' .

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο (0, f(0)).

γ) Να βρείτε την μονοτονία και το πρόσημο της f'.

δ) Να βρείτε την μονοτονία και το πρόσημο της f.

ε) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο .

στ) Να λυθεί η εξίσωση $e^x + x^2 = x + 1$

ζ) Να αποδείξετε ότι $e^x - 1 \geq x \cdot (1 - x)$

Θέμα 59ο. Έστω $f(x) = \ln x - \dfrac{\alpha}{x} + \alpha$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(2\lambda^2+2) - \dfrac{1}{\lambda^2+3} > \ln(\lambda^2+3) - \dfrac{1}{2\lambda^2+2}$

Θέμα 60ο. Έστω $f(x) = \ln x - \dfrac{e}{x}$ με , $x > 0$

α) Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Αν $\alpha^x \geq \alpha + \ln x$, $x>0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Θέμα 61ο. A α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$, $x \in \Re$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 \cdot e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Re$.

B. Αν η ευθεία ε: $y = x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}\, f(x) + 3\mu x^2 + 4}{x^2 f(x) + \sqrt{x^4+1} - x^3 + 2} = 10$$

Θέμα 62ο. A) Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύει $[f'(x)]^3 + f'(x) = e^x + x^3$,για κάθε $x \in \Re$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής .

B) Έστω f συνεχής στο [0,4] , παραγωγίσιμη στο (0,4) και $f(1) = f(2) = 0$. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [0,4] να αποδείξετε ότι

i) $f(0) \cdot f(4) > 0$

ii) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο (0,4)

Επαναληπτικά Θέματα

Επαναληπτικά Θέματα

Θέμα 63ο. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f με $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{2}{e^x}$ με $f(x)\neq 0$, $f'(x)\neq 0$ και $f(0)=1$.

α)Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

β)Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq x+1$ για κάθε $x\in\Re$

γ)Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\pi} f(x)\,\text{ημ}x\,dx$

Θέμα 64ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\leq 1 \\ (1-e^{1-x})\ln(x-1), & x\in(1,2] \end{cases}$, $a\in\Re$

α)Να υπολογίσετε το όρια $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{1-x}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1)$

β)Να βρεθεί ο α ώστε η f συνεχής στο $\Re$

γ)Για α = - 1 να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στο άξονα xx'

Θέμα 65ο. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2}{ax+\beta}$, $a\neq 0$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=x+1$

α)Να αποδείξετε ότι α=1 , β= -1

β)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\text{ημ}\left(\dfrac{2004}{x}\right)$

γ)Να υπολογίσετε το $I=\int_2^6 f(x)\,dx$

Θέμα 66ο. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-a}$, $a\in\Re$

α)να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=4$

β)να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ (0,1) να διέρχεται από το σημείο Α (5,2)

γ)αν α > 2 να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον xx '

Θέμα 67ο. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{(a-1)x+6}{x+\beta}$, $a,\beta\in\Re$, x > - 1 η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=2$ και $x=-1$

προσομοίωση

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}$, x > - 1

β) Να βρείτε συνάρτηση $G(x)$, με $G'(x)=f(x)$ για κάθε x > - 1 της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(0,2)

γ) να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση

$h(x) = \dfrac{G(x)}{x+1}, x > -1$

Θέμα 68ο. Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = 0$ και $x\cdot f''(x) > f'(x)$, για κάθε x>0

A. Να αποδείξετε ότι

α) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο$(0,+\infty)$

β)Η συνάρτηση $h(t) = f(x)\, t^2 - x^2 f(t)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,x] με x > 0.

γ) Για κάθε x>0 υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0,x)$ με $2f(x)\cdot\xi = x^2 \cdot f'(\xi)$

B. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $x^2 f(x) > f(x^2)$ στο $(0,+\infty)$

Θέμα 69ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x - \alpha\eta\mu x + 2, & x < 0 \\ \beta + \alpha \ln(1+x^4), & x \ge 0 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι α, β ώστε η $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη.

β) Για α=1 και β=2 να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$.

Θέμα 70ο. A. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η

$f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x \le 0 \\ \eta\mu 2x + \beta\sigma\upsilon\nu 3x, & x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ η οποία για κάθε x $\in \Re$ ικανοποιεί την σχέση $f^3(x) + f(x) - 2 = e^x - \dfrac{1}{2}x^2 - x - 1$. Να αποδείξετε ότι

α) $e^x - x - 1 > 0$, για κάθε x $\in \Re^*$

β) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα

Θέμα 71ο. Μια συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και για κάθε $\chi \in \Re$ ισχύει $(f'(x))^3 + (f'(x))^2 + f'(x) = e^x + x - 1$.

Να αποδείξετε ότι

α) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με οριζόντια εφαπτομένη

β)Η f είναι κυρτή στο $\Re$

Θέμα 72ο. Έστω f ορισμένη στο [0,1] με $f(x) = \dfrac{1-x}{3} e^x$

α)Να μελετηθεί ως προς μονοτονία

β)Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

δ)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,\frac{1}{3})$

Θέμα 73ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$.Να βρεθούν οι f', f'' και έπειτα:
α)Να μελετηθεί ως προς μονοτονία
β)Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f
γ) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1+\ln(x+1)$, $x > -1$
δ)Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
ε) Αν $\alpha^x \geq 1+\ln(x+1)$, $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Θέμα 74ο. $\boxed{\text{Α.}}$ α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$, $x \in [0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

γ) Να αποδείξετε ότι $x^4 - 12x^2 > 24\,\sigma\upsilon\nu x - 24$

$\boxed{\text{Β.}}$ Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(1)=3$ και $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 75ο. Α . Δυο συναρτήσεις f, g έχουν την ιδιότητα
$f'(x) - g'(x) = (x^2+2x-1)e^x$
α) Αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ διέρχεται από το Α(0,-1) να βρεθεί η f
β) Να υπολογίσετε το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)$, $g(x)$
Β . Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση
$\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \Re$.

Θέμα 76ο. Έστω f ,g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\Re$ τέτοιες ώστε
$f(2) = g(2)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για $x \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι
α) $g(x) = f(x) + x - 2$.
β)Αν ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 2 < \rho_2$, ρίζες της $f(x)$ τότε η g έχει μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)
γ)Αν x_1 , x_2 με $x_1 < x_2$, ρίζες της $g(x)$ τότε η εξίσωση
$f'(x) + 1 = 0$ έχει μια ρίζα στο (x_1, x_2)
δ)να υπολογίσετε το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f'(x)$, $g'(x)$ τον xx' και τις $x=1$, $x=2$

Θέμα 77ο. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1+x) - x$ και $g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$

α) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία στο $(0, +\infty)$

β) Να δείξετε ότι για $x > 0$ ισχύει $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

γ) Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Θέμα 78ο. Έστω $f(x) = \ln^2 x - x\ln x + x - 1$

α)Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β)Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των πραγματικών ριζών της $f(x) = 0$

γ) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες

δ)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

Θέμα 79ο. $\boxed{\text{A .}}$ Δίνεται f γνησίως αύξουσα που ορίζεται στο $\Re$.

α) Να δείξετε ότι η $g(x) = e^{f(x)} + f(x)$ είναι επίσης γν. αύξουσα

β) Αν $f(0) = 1$ να λυθεί η $e^{f(x)} + f(x) = e + 1$

$\boxed{\text{B.}}$ Έστω η $f(x) = x + 1 + \ln(x^2+1)$

α) να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$

β) να βρείτε τα όρια της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

γ) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα

Θέμα 80ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$

α)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β)Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το οποίο και να βρείτε

γ)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ)Να μελετηθεί ως προς τις ασύμπτωτες

ε)Να υπολογιστεί το $I = \int f(x)dx$

στ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον xx' , και την ευθεία $x = e$.

Θέμα 81ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2 + \ln(x-1)$ *και* $g(x) = 2 - \ln(x-1)$ *με* $x > 1$ και με γραφικές παραστάσεις C_f και C_g αντίστοιχα

α)Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g

β)Να βρείτε την μονοτονία και το σύνολο τιμών των f, g

γ)Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κάθετες εφαπτομένες στα σημεία τους με την ίδια τεταγμένη.

Θέμα 82ο. $\boxed{\text{A.}}$ Έστω $f: \Re \to \Re$ παραγωγίσιμη με την ιδιότητα $f^3(x) + x^3 + 1 = 3x\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\Re$, που παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = \alpha$

α) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = \alpha^2$

β) Να βρεθεί το α.

$\boxed{\text{B}}$ Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Θέμα 83ο. $\boxed{\text{A}}$. Έστω $f : [0,1] \to \Re$ συνεχής συνάρτηση και $\int_0^1 f(t)dt < 1$, $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 + \int_0^x f(t)dt = 2\cdot x$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

$\boxed{\text{B}}$. Άν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\Re$ και $f(0) = 0, f'(0) = 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2}\int_0^x x^2 f(t)dt$

$\boxed{\Gamma}$. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] και $\int_\alpha^\beta f'(x)dx = \int_\alpha^\beta g'(x)\,dx$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = g'(\xi)$

$\boxed{\Delta}$. Έστω $f : \Re \to \Re$ με $f'(x) = 2e^{x^2}$, για κάθε $x \in \Re$, και $f(1) = e$. Να υπολογιστεί το $\int_0^1 f(t)dt$

Θέμα 84ο. $\boxed{A}$. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\Re$ με $f(0) = 0$ και η συνάρτηση. $g(x) = \int_0^{f(x)} t^2 dt - 1 + e^x$

α) Να βρεθεί η $g'(x)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα στο $\Re$

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο (0 , g(0)).

$\boxed{B}$. Έστω $f : \Re \to \Re$ συνεχής συνάρτηση με $\int_2^x f(x)dx \geq x^2 - 4$, για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε το $f(2)$

Θέμα 85ο. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$\int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x) - x^2 + 2002$$

α)Να βρεθεί ο τύπος της f

β)Να βρεθεί το $\int_0^1 f(t)dt$

γ)Να μελετηθεί η f ως προς μονοτονία – ακρότατα – κοίλα .

Θέμα 86ο. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \int_0^x (2t - t^2)dt$.

α)Να βρεθεί η $f(x)$

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ(3,f(3))

γ)Να βρεθεί βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον xx ', και την εφαπτομένη στο σημείο Μ(3, f(3)).

Θέμα 87ο. **Α.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$ και $F(x) = \int_0^x t\left(\int_1^{x^2} e^x f(t)dt\right)dt$

α)Να αποδείξετε ότι $F(x) = \dfrac{x^2 e^x}{2} \int_1^{x^2} f(t)dt$

β)Αν $f(x) > 0$ και $F(2) = 6e^2$ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον xx ', και τις ευθείες $x=1$, $x=4$.

Β . Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) που ικανοποιεί την σχέση $\int_a^\beta f(\alpha + \beta - t - x)dt \geq \int_a^\beta f(t)dt$, για κάθε $x \in \Re$.

α)Να δείξετε ότι $\int_{a-x}^{\beta - x} f(t)dt \geq \int_a^\beta f(t)dt$

β)Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta) : f'(\xi) = 0$

Επαναληπτικά Θέματα

Θέμα 88ο. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f με $f(x) + \int_x^0 f(x-t)dt = 1$

α) Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+f(-x)+2(x^3-x^2-1)}{2(e^x-x+1)} = -1$

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$, και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

Θέμα 89ο. Έστω η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f(x) = \dfrac{1}{x} + \int_1^x \dfrac{tf(t)}{x^2}dt$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}, x>0$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα xx', και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

Θέμα 90ο. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο $\Re$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

προσομοίωση

- $\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = x^2 - 2x + 1$, $x\in\Re$ και
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2)

ii) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = -2$

β) Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\Re$ να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\Re$

ii) Η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο , το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_0 = \xi$ του ερωτήματος α) ii

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον αξονα yy'

Θέμα 91ο. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ με τις εξής ιδιότητες

$f(1) = 0$ (I) , $\int_0^x f(t)dt + e^{-x} \geq x+1$, $x\in\Re$ (II)

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $\int_0^{x_1} f(t)dt = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $2y - x = 2002$

Θέμα 92ο. Έστω α,β $\in \Re$ με 0<α<β και f: (0,+∞) ->$\Re$ με $\int_a^\beta f(t)dt = 0$. Έστω ακόμη η συνάρτηση g με g(x) = $2+\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt$ x > 0 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in$ (α,β) τέτοιο ώστε

α)Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο (χ_0, $g_{(\chi_0)}$) να είναι παράλληλη στον άξονα χχ ‘

β)$g(x_0) = 2 + f(x_0)$.

Θέμα 93ο. Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\Re$ και f ‘ (χ) > 0 για κάθε χ $\in \Re$. Αν η συνάρτηση F (x) = $\int_a^\beta f(x-t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\Re$ και υπάρχει κάποιο $\chi_0 \in \Re$ με

$F'(x_0) = 0$ τότε να αποδείξετε ότι F (x) =0 .

Β. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \int_1^{2x} \frac{1}{1+t}dt$, χ≥ 0 . Να αποδείξετε ότι

$$\frac{4}{15} < f(7) - f(5) < \frac{4}{11}$$

Θέμα 94ο. α) Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in$ [α, β] να αποδείξετε

ότι $\int_a^\beta f(x)dx \le \int_a^\beta g(x)dx$

β) Αν $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in$ [α, β] να αποδείξετε

ότι $m(\beta-\alpha) \le \int_a^\beta f(x)\,dx \le M(\beta-\alpha)$

γ) Να μελετήσετε την $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x^2}}$ ως προς την μονοτονία

δ)Να αποδείξετε ότι για $x > 1$ είναι

$$2f(x-1) \le \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \le 2f(x+1)$$

ε)Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}\int_{x-1}^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{3+2t^2}}dt = 0$

Θέμα 95ο. α) Να μελετήσετε την $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, χ > 0 ως προς την μονοτονία

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt$

Θέμα 96ο. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 1+\dfrac{1}{x^2}$

α)Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β)Να αποδείξετε ότι $1 \le \int_1^2 f(x)dx \le 2$

γ)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα χχ' και τις ευθείες χ=2, χ=4

δ)Να βρεθεί η ευθεία χ=α που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε 2 ισεμβαδικά χωρία .

Θέμα 97ο. Για την παραγωγή *x* μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα μια εταιρεία έχει κόστος *K(x) = (500x+50000)* δρχ .Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει στην τιμή *T(x) = (2000 – 2x)* δρχ την κάθε μια

α) Να δείξετε ότι τα κέρδη της εταιρείας δίνονται από την συνάρτηση $P(x) = 1500x - 2x^2 - 50.000,\ x>0$

β) Για ποιο επίπεδο παραγωγής η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος;

γ) Ποια είναι η τιμή πώλησης όταν η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος;

δ) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος της εταιρείας ;

ε) Αν επιβληθεί επιπλέον φόρος 200 δρχ ανα μονάδα προϊόντος , ποια πρέπει να είναι η τιμή πώλησης ,ώστε η εταιρεία να έχει μέγιστο κέρδος;

Θέμα 98ο. Σε έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη πλάγια σκάλα μήκους *5μ*. Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό *1μ/sec*. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3μ να βρείτε:

α)Σε τι ύψος είναι στερεωμένη η σκάλα

β)Με τι ρυθμό πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας

γ)Με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου , που σχηματίζεται από την σκάλα , τον τοίχο και το έδαφος

δ)Με τι ρυθμό μεταβάλλεται η γωνία θ που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο.

Θέμα 99ο. Έστω συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, πού ικανοποιεί τις συνθήκες

α)$f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x,y \in \Re$

β)Υπάρχει $\alpha \in \Re$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) \ne 0$

Να αποδείξετε ότι

α)$f(x) \ne 0$

β)$f(x) > 0$ για κάθε x, y, $\in \Re$

γ) $f(0) = 1$

δ)$f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

ε) Αν η εξίσωση f(x) =1 έχει μοναδική ρίζα στο $\Re$, τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(\alpha\beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$, $\alpha, \beta \in \Re$

στ) Αν η f είναι συνεχής στο 0 να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\Re$

ζ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 2$

i)να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Re$ με $f'(x_0) = 2f(x_0)$

ii) να βρεθεί ο τύπος της f .

η) Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^{a} \dfrac{1}{f(x)}dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx$

Θέμα 100ο. Έστω $f(\chi) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Α. α) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f

γ) Να βρείτε την μονοτονία της f(x)

δ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = \chi$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (-5 , 1) .

στ) Να βρεθεί το Εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη f , τον χχ' και τις ευθείες χ= 0 , χ= ln2

Β. α) Να δείξετε ότι η $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι «1-1»

β) Αν $h(x) = \int_x^{x^2-2} f(t)dt$ τότε

i) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η C_h τέμνει τον χχ '

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει χ_0 στο οποίο η C_h δέχεται οριζόντια εφαπτομένη

Θέμα 101ο. Έστω $f : \Re \to \Re$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ με $\chi \in \Re$ και

$g'(x) = f(x) + \dfrac{f(\frac{1}{x})}{x^2}$ με $x > 0$

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = f(\frac{1}{x})$

β) Να δείξετε ότι $f'(x) \le 1$

γ) Αν α, β$\in\Re$ με 0<α< β να δείξετε ότι $f(\frac{1}{\beta}) - f(\frac{1}{\alpha}) \le \beta - \alpha$

δ) να αποδείξετε ότι g(x) = ln(x)+1

Θέμα 102ο. Δίνεται η συνάρτηση f: (0, π) → IR με f(x) > 0, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}$ και

$f(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x$, για κάθε x∈ (0, π).

Να δείξετε ότι:

α) $f(x) = e^x\eta\mu x$, x∈ (0, π).

β) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}e^{\pi/4} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\eta\mu x dx \le \dfrac{\pi}{4}e^{\pi/2}$.

Θέμα 103ο. **α)** Έστω $f(x) = \alpha x^2$ και $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\alpha}$, α > 0.

Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δυο παραπάνω συναρτήσεων είναι: $E(\alpha) = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}}$

β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το Ε(α) γίνεται μέγιστο καθώς και την μέγιστη αυτή τιμή. (*Απάντηση:* **β)** α = 1)

Θέμα 104ο. **α)** Έστω f, g: $[0, \alpha] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:
$f(x) = f(\alpha - x)$ και $g(x) + g(\alpha - x) = \lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in [0, \alpha]$.

Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} f(x)g(x)dx = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\alpha} f(x)dx$

β) Αν h(x) είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, \pi]$,

να δείξετε ότι: $\int_0^{\pi} x \cdot h(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} h(\eta\mu x)dx$.

Θέμα 105ο. Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα:
$f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 2$.
Να δείξετε ότι:
α) $f(\nu x) = \nu e^{(\nu-1)x} f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$
β) $f'(x) = f(x) + 2e^x$
γ) $f(x) = 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 106ο. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.
β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε τα α και β ώστε η συνάρτηση $F(x) = \frac{\alpha \ln x + \beta}{x}$ να είναι μια παράγουσα της f(x) στο $(0, +\infty)$.
δ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(κ) του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τις ευθείες $x = 1$, $x = \kappa > 1$ και τον άξονα $x'x$.
ε) Να βρείτε το όριο $L = \lim_{\kappa \to +\infty} E(\kappa)$.
(*Απάντηση:* α) $x = 0$, $y = 0$, γ) $\alpha = \beta = -1$, ε) $L = 1$)

Θέμα 107ο. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$.
είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$.
$f(3) = 7$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$, $f(2) = 6$, $f(8) = -1$.
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σωστές ή Λανθασμένες:
α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
γ) Η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο διάστημα [10, 15].
δ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (3, 5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
ε) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (4, 5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2$.
στ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 8)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θέμα 108ο. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] με $\alpha < 0 < \beta$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\frac{1}{x} - \int_0^x tf(t)dt & , x \in [\alpha,\beta] \setminus 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η F είναι συνεχής στο 0.
β) Να αποδείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και να βρείτε την $F'(x)$.
(*Απάντηση:*

β) ($F'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} - xf(x), & x \in [\alpha,\beta] \setminus 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$)

Επαναληπτικά Θέματα

Θέμα 109ο. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR και α, β, γ, δ∈ IR με α < β < γ < δ έτσι ώστε f(α)f(β) < 0, f(γ) = 0.
Δίνεται επίσης ότι στο σημείο $x_0 = δ$ η f παρουσιάζει μέγιστο.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει θ∈ (α, δ) τέτοιο ώστε $f''(θ) = (f'(θ))^2$.
(*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε τα θεωρήματα Bolzano, Rolle και Fermat).

Θέμα 110ο. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2du = 2\int_0^x\left(\int_0^u\left(\int_0^t f(y)dy\right)dt\right)du \text{ για κάθε } x\in IR$$

Θέμα 111ο. Έστω f: (0, +∞) → IR συνεχής συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι: $\ln t \le f(t) \le t-1$ για κάθε t > 0. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1) = 1$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\int_1^x f(t)dt + x^2 + 1 - 2e^{x-1}}{(x-1)^2} = 1$

γ) Η εξίσωση $2 + 2\int_1^x f(t)dt = 2\ln x + x^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (1, e).

Θέμα 112ο. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α, β] και 0 < λ < 1.Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0∈ [α, β] τέτοιο ώστε: $\lambda\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^{x_0} f(t)dt$.

Θέμα 113ο. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο [0, α], γνησίως αύξουσα στο [0, α] και έχει σύνολο τιμών το [0, β].

Θέμα 114ο. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^\alpha f(t)dt + \int_0^\beta f^{-1}(t)dt = \alpha\beta$.

Θέμα 115ο.

Έστω $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ και $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ και

$\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{1+e^{f(x)}}}$, για κάθε χ∈ℜ με $\boxed{f'(0)=1}$

α) Να αποδείξετε ότι η f
- i) είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της . [2μ]
- ii) είναι κοίλη στο ℜ. [1 μ]

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$. [4 μ]

γ) Να αποδείξετε ότι $α < f(α) < α f'(α) = \dfrac{2a}{1+e^{f(a)}}$ για α > 0. [6 μ]

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(χ) = 6 – 2x$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (2,3)

ε) Να αποδείξετε ότι
- i) Ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$ για κάθε χ∈ℜ . [3 μ]
- ii) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της. [2 μ]
- iii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων . [2μ]

στ)
- i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο - ∞ . [3μ]
- ii) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ [2μ]

Θέματα Εξετάσεων

1. ***($1^{η}$ Δέσμη 1983)***

Η συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β], έχει παράγωγο στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και f(α) = f(β) = 0. Να αποδειχθεί:

α) ότι για τη συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c \notin$ [α, β], υπάρχει $c_0 \in$ (α, β) τέτοιο, ώστε $F'(c_0) = 0$.

β) αν $c \notin [α,β]$, ότι υπάρχει $c_0 \in$ (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$της γραμμής με εξίσωση y = f(x) διέρχεται από το σημείο (c, 0).

2. ***($1^{η}$ Δέσμη 1983)***

Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x > 0 ισχύει η σχέση: $\ln x \le x-1$.

Β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [0, +∞) με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & αν\ 0<x\neq 1 \\ 0 & αν\ x=0 \\ -1 & αν\ x=1 \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

β) είναι φθίνουσα στο διάστημα (0, 1) και

γ) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

3. ***($1^{η}$ Δέσμη 1988)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f, τον άξονα Ox και τις ευθείες x = 2 και x = 5.

4. ***(1η Δέσμη 1989)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την γραφική παράσταση τη f και από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy.

5. ***(1η Δέσμη 1989)***

Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:
i) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ
ii) $f'' = g''$
iii) $0 \in \Delta$ και f(0) = g(0)

Να δειχθεί ότι:
α) Για κάθε $x \in \Delta$, f(x) – g(x) = cx, όπου $c \in$ IR .

β) Αν η f(x) = 0 έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

6. ***(1η Δέσμη 1990)***

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με: $f(x) = \dfrac{\alpha x^3}{3} + \left(\dfrac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$ όπου α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

7. ***(1η Δέσμη 1990)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \dfrac{1}{2x^2}$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης τη f τις ευθείες με εξισώσεις y = 3x, x = 1 και x = α με α > 1.

γ) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του παραπάνω χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

8. ***(4η Δέσμη 1990)***

Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο IR δυο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει ότι g(–1) = 7.
Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3(x – 2)^2 g(2x – 5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

9. ***(4η Δέσμη 1990)***

Έστω α πραγματικός αριθμός και f συνάρτηση με:

$$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

10. ***(1η Δέσμη 1991)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, x > 0.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράστασης της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x = 1 και x = 4.

11. ***(4η Δέσμη 1991)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x = 0 και x = e.

12. ***(4η Δέσμη 1991)***

Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0 \in \Delta$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

13. ***(4η Δέσμη 1991)***

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

i) είναι συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β)

ii) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $g(x)\neq 0$ και για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $g'(x)\neq 0$ και

iii) f(β)g(α) – f(α)g(β) = 0.

Να αποδείξετε ότι:

α) Για τη συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **,** εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β].

β) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

14. (1η Δέσμη 1992)

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x,\ x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει η ισότητα:
$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$ όπου $0 < \alpha < 1$.

15. (1η Δέσμη 1992)

α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν $f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $g'(x)συνx + g(x)ημx = g(x)συνx$ και $g(0) = 1992$.

16. ***(4η Δέσμη 1992)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1),\ x > 0$.

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x > 0$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $E(t) = \int_1^t (x-2)\ln x\,dx$ για κάθε $t > 1$.

δ) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{E'(t)}{t\ln t}$.

17. ***(4η Δέσμη 1992)***

Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$ και α, β, γ πραγματικούς αριθμούς η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

i) η συνάρτηση f είναι περιττή,

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$,

iii) $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

18. ***(4η Δέσμη 1992)***

Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [0, π] και $g(\pi) = e^{-\pi}$.

Αν $\int_0^\pi \left(g(x) + g'(x)\right)e^x dx = 2$, να βρεθεί η τιμή της συνάρτησης g στο σημείο x = 0.

19. (<u>1η Δέσμη 1993</u>)

Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως.
Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα u = 2m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t) = ut, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.
α) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m.

20. ***(<u>4η Δέσμη 1993</u>)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu, \quad x \in IR$ όπου μ πραγματικός αριθμός.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο ανοιχτό διάστημα (1, 2).

21. ***(<u>4η Δέσμη 1993</u>)***

Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$ όπου το x διατρέχει το ανοιχτό διάστημα $(0,+\infty)$ και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.
Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$, $x \in (0,+\infty)$
και το κέρδος από τη συνάρτηση f(x) = E(x) – K(x), $x \in (0,+\infty)$.
α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε M(α).

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το M(α) γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

22. ***(<u>4η Δέσμη 1993</u>)***

Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^1 xg'(x)dx = 1993 - \int_0^1 g(x)dx$ να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για x = 1.

23. ***(<u>1η Δέσμη 1994</u>)***

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in IR$. Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, α > 0, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C, την ευθεία ε και τον άξονα $y'y$.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία MO, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ, όταν το α μεταβάλλεται (α > 0).

24. *(1η Δέσμη 1994)*

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, e] με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in [1, e]$,
να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0\in (1, e)$, τέτοιος ώστε
$f(x_0) + x_0\ln x_0 = x_0$.

25. *(1η Δέσμη 1994)*

α) Έστω ρ πραγματικός αριθμός, A(x), B(x) πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, ώστε $B(\rho)\neq 0$, και το A(x) έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο f(x) τέτοιο ώστε $A(x)B(x) = (x - \rho)^2f(x)$
αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

β) Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1.
Να βρείτε τις τιμές των κ και λ για τις οποίες το πολυώνυμο
$Q(x) = x^\nu(\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.

26. ***(4η Δέσμη 1994)***

Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α
και η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(1, f(1)) και να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

27. ***(4η Δέσμη 1994)***

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR, η οποία έχει συνεχή f'' στο IR,
παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$
και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(0, 1).

Αν ισχύει: $\displaystyle\int_0^2 \left[xf''(x)+3f'(x)\right]dx = -\frac{8}{3}$,

να υπολογίσετε το f(2).

28. ***(4η Δέσμη 1994)***

Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$.

29. ***(1η Δέσμη 1995)***

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με κ < λ και η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5(x - \lambda)^3$ με $x\in IR$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\displaystyle\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa}+\frac{3}{x-\lambda}$ για κάθε $x\neq\kappa$ και $x\neq\lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ).

30. ***(1η Δέσμη 1995)***

Η συνάρτηση f: IR $\to$ IR είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in$ IR.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt$ με α, β πραγματικούς αριθμούς, είναι παραγωγίσιμη και ότι, αν υπάρχει $x_0 \in$ IR με $F'(x_0) = 0$

τότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in$ IR.

31. ***(1η Δέσμη 1995)***

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$,

τη συνεχή συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to$ IR για την οποία ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$

και τη συνάρτηση $g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in (0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και

β) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$.

32. ***(1η Δέσμη 1995)***

Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to$ IR με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

$f(0) = 1995$, $f'(0) = 1$ και $1 + \int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt = \sigma\upsilon\nu^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$.

33. ***(4η Δέσμη 1995)***

Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση: $f(t) = \frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}},\ t \geq 0$ όπου Α ένας θετικός αριθμό.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t), κατά την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση: $K'(t) = \frac{A}{4}e^{\frac{-t}{7}},\ t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

34. (4η Δέσμη 1995)

Αν $G(x) = \int_1^x f(t)dt$ όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $x > 0$, $t > 0$, να βρείτε:

α) Την $G''(1)$. **β)** Το $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$.

35. ($4^η$ Δέσμη 1996)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{1/2} + \lambda x$, λ∈ IR.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)}\,dx.$$

36. ($4^η$ Δέσμη 1996)

Έστω f(t) η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου $t \geq 0$ και

f: $[0, +\infty) \to$ IR είναι πραγματική συνάρτηση με $f\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = 1 - 2^{\frac{-t^{1/2}}{499}}$.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το 1/16 του ρυθμού απορρόφησης κατά την χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

37. ***($4^η$ Δέσμη 1996)***

Δίνεται η συνάρτηση g, συνεχής στο IR και $f(x) = \int_0^x (x - t)g(t)dt$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, όταν $g(x) \neq 0$ για κάθε x∈ IR.

38. ($4^η$ Δέσμη 1997)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο IR και ικανοποιούν τις σχέσεις: $f''(x) - g''(x) = 4$, για κάθε x∈ IR, $f'(1) = g'(1)$, $f(2) = g(2)$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση t(x) = f(x) – g(x).

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

39. ($4^η$ Δέσμη 1997)

Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο IR, τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$ για κάθε x∈ IR.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, x∈ IR.

α) Να αποδείξετε ότι g(–3)g(0) < 0.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x) = 0 έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα (–3, 0).

40. ***($1^η$ Δέσμη 1998)***

Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει g(x) μονάδες του παραγόμενου προϊόντος.

Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g(x). Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

41. (4η Δέσμη 1998)

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu$, $t \in IR$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές, με τον τύπο: $E(t) = (t - 1)\,\varphi(t)$, $t \geq 0$, που t συμβολίζει το χρόνο σε έτη.
Το κόστος λειτουργίας $K(t)$, της επιχείρησης δίνεται, επίσης σε εκατομμύρια δραχμές, σύμφωνα με τον τύπο: $K(t) = \varphi(t + 4)$, $t \geq 0$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t \geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος: $I = \dfrac{111}{2}\displaystyle\int_0^6 P(t)dt.$

42. (4η Δέσμη 1998)

Δίνεται η συνάρτηση: $h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-\alpha x})$, $x \geq 0$, όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.
α) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)$.

γ) Αν x_1 είναι η ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι η ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(x)$, να βρείτε την σχέση που συνδέει τα x_1, x_2.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $M = \dfrac{334}{75}\displaystyle\int_0^{\ln 2} h(x)dx$, όταν $\alpha = 8$.

43. (4η Δέσμη 1999)

α) Να αποδείξετε ότι:
$\ln(x + 1) > x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{5}$, για κάθε x ανήκει $[0, +\infty)$.

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:
$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$
για κάθε x ανήκει $[0, +\infty)$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

44. (4η Δέσμη 1999)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(\alpha x)$, $x \in IR$ και $\alpha \in IR$.
Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει: $f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in IR$.

45. (4η Δέσμη 1999)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in IR$.
α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f
και να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

46. <u>($1^η$ Δέσμη 2000)</u>

Έστω $f: IR \to IR$ συνάρτηση συνεχής στο IR.
Έστω $I: IR \to IR$ η συνάρτηση με:

$$I(x) = \int_0^1 \left[(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4\right]dt, \text{ για } x \in IR.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o = 5\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

47. ***<u>($1^η$ Δέσμη 2000)</u>***

Έστω $h: [1,+\infty) \to IR$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(x) = 1999(x-1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t}dt, \text{ για κάθε } x \geq 1.$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $h(x) = 1999x\ln x$, $x \geq 1$.

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

48. <u>($1^η$ Δέσμη 2000)</u>

Έστω $f, g: IR \to IR$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο IR τέτοιες, ώστε να ισχύει:
$f(x) - g(x) = x - 4$, για $x \in IR$.
Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.
α) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) + 3x + ημ2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$.

49. <u>($4^η$ Δέσμη 2000)</u>

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: IR \to IR$ τέτοια ώστε:
$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in IR$, με $f(0) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in IR$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

50. <u>($4^η$ Δέσμη 2000)</u>

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f: IR \to IR$ που ικανοποιεί την ισότητα:

$$\int_0^x (1 + t^2)f(t)dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2 + t)dt, \; x \in IR.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α (0, f(0)).

51. ***(Θετική Κατεύθυνση 2000)***

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν f(0) = 2 και f(1) = 4, να δείξετε ότι:

α) η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

γ) υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x + 2000.

52. ***(Θετική Κατεύθυνση 2000)***

Τη χρονική στιγμή t = 0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο.
Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0,$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες.
Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες,
να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

53. ***(Τεχνολογική Κατεύθυνση 2000)***

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e) + 2(\alpha+1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$.

α) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

β) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in IR$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

γ) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος **β)** να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

54. ***<u>(Τεχνολογική Κατεύθυνση 2000)</u>***

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\dfrac{8}{t+1} - 2$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t =10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

(Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$).

55. ***<u>(1η Δέσμη 2001)</u>***

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2\ln x$, x > 0.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$,
όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακρότατου της f.

56. ***<u>(1η Δέσμη 2001)</u>***

Έστω η συνάρτηση f: [α, β] $\rightarrow$ IR, η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α) = 2β, f(β) = 2α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε
$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

57. ***<u>(1η Δέσμη 2001)</u>***

Έστω η συνάρτηση:
$f(x) = x^3 - 3x^2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2x\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha$, $x \in$ IR και $\alpha \in$ IR.
Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

58. ***(1η Δέσμη 2001)***

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR με $f^{/}(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}$$, για κάθε $x \in$ IR.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, f(0)).

59. ***(4η Δέσμη 2001)***

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - ημ2x$, $x \in$ IR, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = ημ2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0, 1).

60. ***(4η Δέσμη 2001)***

Η συνάρτηση f: IR $\rightarrow$ IR έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_\alpha^\beta f^{/}(x)e^{f(x)}dx = 0$$ όπου α, β $\in$ IR με α < β.

Να αποδείξετε ότι:

α) f(α) = f(β)

β) Η εξίσωση $f^{/}(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

61. ***(4η Δέσμη 2001)***

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = 2x + \frac{4}{x}, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = λ, x = λ + 1,

όπου λ > 0, είναι $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$.

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν Ε(λ) γίνεται ελάχιστο.

62. ***(4η Δέσμη 2001)***

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \int_0^x xσυνt dt, \quad x \in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$g^{//}(x) = 2συνx - xημx$, $x \in$ IR.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

63. ***(4η Δέσμη 2001)***

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, $x\in IR\setminus\{2\}$ όπου α, β∈ IR.

Αν η ευθεία ε: y = 2x – 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, ποιες είναι οι τιμές των α, β;

64. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2001)***

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & x\le 3\\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3\end{cases}$.

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x = 1 και x = 2.

65. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2001)***

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR ισχύει ότι:

$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε x∈R

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0, 1).

66. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2001)***

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x)\neq 0$, για κάθε x∈R

ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$, για κάθε x∈R.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε x∈R.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

δ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right)$.

67. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2002)***
Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το IR .
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1–1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1–1.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$
έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

68. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2002)***
α) Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο IR συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in$ IR και $f(0) = 0$.

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα $x'x$,
να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$

69. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2003)***

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$ για κάθε $x \in$ IR.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3.

70. ***(Θετική - Τεχνολογική Κατεύθυνση 2002)***
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β).
Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:
α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.