2015

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΝΔΡΕΣΑΚΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Περιεχόμενα

0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

α) Ονομάζουμε σύνολο των **φυσικών αριθμών** και συμβολίζουμε με $\aleph$ το σύνολο των αριθμών 0,1,2.... Δηλ

$$\aleph = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$
και $\aleph^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$

β) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ δεν έχει πάντοτε λύση (π.χ. αν $x + 5=1$ τότε $x = -4$ που δεν ανήκει στο $\aleph$). Έτσι κάνουμε επέκταση στο σύνολο $\aleph$ των φυσικών αριθμών έτσι ώστε η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ να έχει πάντοτε λύση , και δημιουργούμε το σύνολο **Z** των **ακεραίων αριθμών** . Δηλ

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$$
και $Z^*=\{\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$

γ) Επειδή στο σύνολο των ακεραίων αριθμών η εξίσωση $\alpha\cdot x= \beta$ δεν έχει πάντοτε λύση (π.χ. αν $2x=3$ τότε $x=3/2$ που δεν ανήκει στο Z).Έτσι κάνουμε επέκταση στο σύνολο Z των ακεραίων αριθμών έτσι ώστε η εξίσωση $\alpha\cdot x=\beta$ να έχει πάντοτε λύση , και δημιουργούμε το σύνολο **Q** των **ρητών αριθμών** . Δηλ

$$Q =\{\alpha / \beta, \text{ με } \alpha \in Z \text{ και } \beta \in Z^* \}$$

δ) Τέλος επειδή η εξίσωση $x=\alpha$ με $\alpha \in Q$ δεν έχει πάντοτε λύση στο Q (π.χ η εξίσωση $x^2 = 2$, δεν έχει λύση στο Q , αφού $x=\sqrt{2} \notin Q$) .Έτσι κάνουμε επέκταση στο σύνολο Q των ρητών αριθμών έτσι ώστε η εξίσωση $x^2=\alpha$ να έχει πάντοτε λύση , και δημιουργούμε το σύνολο $\Re$ των **πραγματικών αριθμών**

Εδώ να πούμε ότι το σύνολο **$\Re$-Q** ονομάζεται το σύνολο των **άρρητων αριθμών** και περιέχει αριθμούς όπως τους $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$, **π** =3.141719... , **e** = 2,718....., δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τα σύνολα των ρητών αριθμών και των άρρητων αριθμών .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα σύνολα των φυσικών και τα σύνολα των ακεραίων αριθμών

Για όσα θα ακολουθήσουν είναι σκόπιμο να έχουμε υπόψη μας τις ακόλουθες ιδιότητες των ακεραίων αριθμών και φυσικών αριθμών γιατί με τα σύνολα αυτά θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα από εδώ και στο εξής

1. Αν $\alpha,\beta \in Z$ τότε $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha \cdot \beta \in Z$

2. Αν $\alpha \in Z$, $\beta \in Z^*$ τότε το πηλίκο $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$ <u>δεν</u> είναι πάντα ακέραιος αλλά ρητός αριθμός . Ακέραιος είναι το π όταν το α είναι πολλαπλάσιο του β

3. Μια δύναμη α^ν , $\alpha \in Z^*$ και $\nu \in N$ είναι

α) ακέραιος όταν ο ν είναι φυσικός αριθμός π.χ 3^2 , $(-2)^5$,5^0

β) κλασματικός αριθμός όταν $\alpha \neq 0,+1,-1$ και ν ακέραιος αρνητικός π.χ.

$4^{-1}=\frac{1}{4}$, $3^{-2}=\frac{1}{9}$

4. Οι ακέραιοι χωρίζονται σε 2 σύνολα . Τους **άρτιους** και τους **περιττούς** . Οπότε αν δοθεί ένας ακέραιος α αυτός θα είναι άρτιος (θα έχει την μορφή **α = 2.κ** , $\kappa \in Z$) ή θα είναι περιττός (θα έχει την μορφή

α = **2κ+1** ή **α = 2κ-1**)

Παρακάτω υπάρχουν κάποιες βασικές σχέσεις που πρέπει να γνωρίζουμε για τους άρτιους και τους περιττούς

(Σημ : Οι I , IV , V, VI , VII , IX , X, XII μπορούν εύκολα να αποδειχθούν σαν άσκηση)

I. *Το άθροισμα άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός*

(2+6= 8 , 4+14+18 = 36)

II. *Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών είναι άρτιος*

(3+7 +9+11=30)

III. *Το άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός (3+7 +9 =30)*

IV. *Το άθροισμα ή η διαφορά περιττού και άρτιου είναι περιττός (9+8 = 17)*

V. *Το γινόμενο άρτιων είναι άρτιος*

VI. *Το γινόμενο περιττών είναι περιττός*

VII. *Το γινόμενο άρτιου με περιττό είναι περιττός*

VIII. *Το γινόμενο ακεραίων με έναν τουλάχιστο άρτιο παράγοντα είναι άρτιος*

IX. *Αν α άρτιος τότε* α^{ν} *άρτιος , για* $\nu \in N^*$

X. *Αν α περιττός τότε* α^{ν} *περιττός για* $\nu \in N$ *(για ν= 0* $\alpha^0 = 1$ *περιττός)*

XI. *Αν το γινόμενο ακεραίων είναι περιττός τότε όλοι είναι περιττοί .*

XII. *Εάν έχω δυο διαδοχικούς ακέραιους ο ένας θα είναι άρτιος και ο άλλος περιττός άρα το γινόμενό τους θα είναι περιττός δηλ* $\kappa(\kappa+1) = 2\rho$ *,* $\rho \in Z$

5. Αν ένα γινόμενο παραγόντων ακεραίων $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ είναι ίσο με 1 ή -1 τότε κάθε παράγοντάς του θα είναι ίσος με 1 ή –1
π.χ $\alpha\cdot\beta=1$ τότε $\alpha=\beta=1$ ή $\alpha = \beta= -1$ ενώ $\alpha\cdot\beta = -1$ τότε $\alpha = 1, \beta = -1$ ή $\alpha = -1 , \beta = 1$

6. Αν α, ν ακέραιοι τότε $\alpha > \nu \Leftrightarrow \alpha \geq \nu+1$

7. Αν α ακέραιος και $\alpha \neq 0$ τότε $|\alpha| \geq 1$

8. Το πλήθος των ακεραίων μεταξύ των ακεραίων μ,ν με μ<ν είναι

$$\nu-\mu+1$$

Έτσι το πλήθος των ακεραίων μεταξύ το –3 και του 8 είναι $8-(-3)+1 = 12$

9. ν διαδοχικούς ακεραίους τους συμβολίζω $\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\ldots,\alpha+\nu-1$
πχ 5 διαδοχικούς ακεραίους τους συμβολίζω $\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\alpha+3,\alpha+4$

10. ***Αρχή του ελαχίστου φυσικού ή αρχή καλής διάταξης***

Κάθε μη κενό υποσύνολο του Ν των φυσικών αριθμών περιέχει ένα και μοναδικό ελάχιστο στοιχείο

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΘΕΩΡΙΑ

Μαθηματική ή **τέλεια επαγωγή** ονομάζεται εκείνη η αποδεικτική μέθοδος, την οποία χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός P(ν), ο οποίος εξαρτάται από ένα θετικό ακέραιο ν, ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής :

Έστω P(ν) ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους
Αν :
i) Ο ισχυρισμός ισχύει για ν = 1 δηλαδή ο P(1) είναι αληθής
ii) Αν το γεγονός ότι ισχύει για το ν δηλαδή ο P(ν) είναι αληθής δίνει ότι ισχύει για ν +1 δηλαδή ο P(ν+1) είναι αληθής τότε ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν

Σημείωση : Πολλές φορές πρέπει να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός P(ν) ισχύει για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιο ορισμένο φυσικό $ν_0$. Στην περίπτωση αυτή το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε την αλήθεια του ισχυρισμού για τον ακέραιο $ν_0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει**

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2ν = ν(ν+1)$$

<u>Για ν =1 :</u> Ισχύει, αφού $2\cdot1 = 1(1+1) = 1\cdot2 = 1$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2κ = κ(κ+1) \qquad [1]$$

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

2 + 4 + 6 + ... + 2(κ+1) = (κ+1)(κ+2) [2]

Πράγματι

$2 + 4 + 6 + ... + 2(\kappa+1) = 2 + 4 + 6 + ... +2\kappa+ 2(\kappa+1) \overset{[1]}{=} \kappa(\kappa+1) +2(\kappa+1) =$
$= (\kappa+1) [(\kappa+2)$

2.. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1^2+2^2+3^2+....+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

<u>Για ν =1 :</u> Ισχύει , αφού $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}\ \frac{6}{6}=1$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$$1^2+2^2+3^2+....+k^2=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6} \quad [1]$$

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

$$1^2+2^2+3^2+....+(\kappa+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad [2]$$

Πράγματι

$$1^2+2^2+3^2+....+(\kappa+1)^2 = = 1^2+2^2+3^2+....+k^2+(\kappa+1)^2 \overset{[1]}{=}$$

$$\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}+(\kappa+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)}{6}=$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}\overset{(*)}{=}\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$, άρα δείχθηκε

(*) Για το τριώνυμο $2k^2 +7k+6$ είναι $\Delta = (7)^2 - 4\cdot2\cdot6 = 49 - 48 =1$ άρα έχει ρίζες

$\kappa_{1,2} = \frac{-7\pm1}{2\cdot2} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}\right.$ οπότε $2k^2 +7k+6 = 2\,(\kappa+\frac{3}{2})\,(\kappa+2)= (2\kappa+3)(\kappa+1)$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε ν≥4 είναι $3^\nu > \nu^2$

<u>Για ν = 4 :</u> Ισχύει , αφού $3^4 > 4^2 \Rightarrow 81 >16$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$3^k > k^2$ [1]

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

$3^{k+1} > (k+1)^2$ [2]

Πράγματι $3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \overset{[1]}{>} 3k^2$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $3\kappa^2 > (\kappa+1)^2 \Leftrightarrow 3\kappa^2 > \kappa^2+2\kappa+1 \Leftrightarrow 2\kappa^2 - 2\kappa - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$2\kappa(\kappa-1) - 1 > 0$ πράγμα που ισχύει για $\kappa > 4$

4. ***Ανισότητα Bernoulli***

Αν $\alpha > -1$ τότε για κάθε $\nu \in \aleph^*$ είναι $(1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\alpha$

<u>Για ν =1 :</u> Ισχύει , αφού $(1+\alpha)^1 \geq 1+1\cdot\alpha \Rightarrow 1+\alpha \geq 1+\alpha$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$(1+\alpha)^\kappa \geq 1+\kappa\cdot\alpha$ [1]

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

$(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)\cdot\alpha$ [2]

Πράγματι

$(1+\alpha)^{\kappa+1} = (1+\alpha)^\kappa \cdot (1+\alpha) \overset{[1]}{\geq} (1+\kappa\alpha)(1+\alpha) = 1+\alpha+\kappa\alpha+\kappa\alpha^2$

$= 1+(\kappa+1)\alpha+\kappa\alpha^2 > 1+(\kappa+1)\alpha$ άρα δείχθηκε

5. **Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \aleph^*$ είναι $7^\nu + 9^\nu + 11^\nu > 24\nu$**

Είναι $7^\nu = (1+6)^\nu > 1+6\nu$ [1] (από ανισότητα Bernoulli)

$9^\nu = (1+8)^\nu > 1+8\nu$ [2] (από ανισότητα Bernoulli)

$11^\nu = (1+10)^\nu > 1+10\nu$ [3] (από ανισότητα Bernoulli)

Με πρόσθεση κατά μέλη $7^\nu+9^\nu+11^\nu > 1+6\nu+1+8\nu+1+10\nu = 3+24\nu > 24\nu$

6. **Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \aleph^*$ είναι $5^\nu > 5\nu - 1$**

<u>Για ν = 1 :</u> Ισχύει , αφού $5^1 > 5\cdot1-1 \Rightarrow 5 > 4$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$5^k > 5k-1$ [1]

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

$5^{k+1} > 5(k+1)-1 \Leftrightarrow 5^{k+1} > 5k+4$ [2]

Πράγματι $5^{k+1} = 5^k \cdot 5 \overset{[1]}{>} (5\kappa-1)5 = 25\kappa - 5$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $25\kappa-5 > 5\kappa+4 \Leftrightarrow 20\kappa > 9 \Leftrightarrow \kappa > \frac{9}{20}$ που ισχύει

7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν∈ℵ* είναι $(\frac{4}{3})^{\nu} > \nu$, ν ≥7

<u>Για ν = 7 :</u> Ισχύει , αφού $(\frac{4}{3})^{7} > 7 \Rightarrow \frac{16384}{2187} > 7 \Leftrightarrow 16384 > 15309$

<u>Για ν = κ :</u> Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$(\frac{4}{3})^{k} > k$ [1]

<u>Για ν= κ+1 : Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση</u>

$(\frac{4}{3})^{k+1} > k+1$ [2]

Πράγματι $(\frac{4}{3})^{k+1} = (\frac{4}{3})^{k} \cdot (\frac{4}{3}) \overset{[1]}{>} \kappa(\frac{4}{3}) = \frac{4k}{3}$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\frac{4k}{3} > \kappa+1 \Leftrightarrow 4\kappa > 3\kappa+3 \Leftrightarrow \kappa > 3$ που ισχύει

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Έστω ο ισχυρισμός P(ν) : $1+2+3+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$. Να γραφτούν οι ισχυρισμοί P(1) , P(2) , P(ν-1)

1.2. Αν ισχύει $1 + 4 + 7 + ... + (3\nu-2) = \frac{\nu(3\nu-1)}{2}$ να υπολογίσετε το άθροισμα

$1 + 4 + 7 + ...+(3\nu-2) + [\,3(\nu+1)-2]$

1.3. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1+2+3+...+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

1.4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + \nu^3 = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$$

1.5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1+4+7+\dots+(3\nu-2) = \frac{\nu(3\nu-1)}{2}$$

1.6. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+\nu\cdot(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$$

1.7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

1.8. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2\nu-1) + (2\nu+1) = (\nu+1)^2$$

1.9. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1 + 2 + 2^2 +\dots+2^{\nu-1} = 2^\nu -1$$

1.10. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει

$$1 + 4 + 4^2 +\dots+4^{\nu-1} = \frac{1}{3}(4^\nu -1)$$

1.11. ***Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει ο αριθμός***

$$\alpha_\nu = 4^\nu+15\nu -1$$

παίρνει τη μορφή 9λ για κάθε $\nu\in\aleph^*$***, λ*** $\in Z$.

1.12. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ ο αριθμός $x = 3^{2\nu} +56\nu+ 127$ είναι πολλαπλάσιο του 64

1.13. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ είναι

$$\eta\mu x+\eta\mu 2x+\dots+\eta\mu\nu x = \frac{\eta\mu\frac{(\nu+1)x}{2}}{\eta\mu\frac{x}{2}}\eta\mu\frac{\nu x}{2}$$

1.14. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ είναι $|\eta\mu\nu x|\le\nu|\eta\mu x|$

1.15. Αν $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_\nu = 1$ να αποδειχθεί ότι $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu \ge \nu$ για κάθε $\nu\in\aleph^*$

1.16. Να αποδείξετε ότι για κάθε ν≥4 είναι $2^\nu > \nu^2$

1.17. Να αποδείξετε ότι για κάθε ν≥4 είναι $3^\nu > \nu^3$

1.18. Αν α < 1 τότε για κάθε $\nu\in\aleph^*$ είναι $(1-\alpha)^\nu \ge 1-\nu\alpha$

1.19. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ είναι $2^\nu+5^\nu+7^\nu >11\nu$

1.20. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\aleph^*$ είναι $\alpha^\nu+\beta^\nu >(\alpha - \beta - 2)\cdot\nu$, α,β > 1

1.21. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \aleph$ είναι $10^{\nu} \geq (1+\nu)(1+4\nu)$

1.22. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \aleph$ είναι $27^{\nu} \geq (1+2\nu)^{3}$

1.23. Με την βοήθεια της ανισότητας Bernoulli να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$\left[1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}\right]^{\nu+1} > 1+\frac{1}{\nu+1}$$

1.24. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 3$ ισχύει $\nu^{\nu+1} > (\nu+1)^{\nu}$

1.25. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 4$ ισχύει $3^{\nu} \geq 2(\nu+1)^{2}$

1.26. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \geq 4$ ισχύει $5^{\nu} \geq 5\nu^{3} + 2$

1.27. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\nu \in N^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^{\nu} > \nu^{2}$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

1.28. Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	**Αριθμός διαγωνίων**
τετράπλευρο (ν = 4)	$2=\frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο (ν = 5)	$5=\frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο (ν = 6)	$9=\frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο (ν = 7)	$14=\frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

1.29. **Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \lambda\beta$, $\lambda \in Z$ και $\nu \in N$.**

1.30. **Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(\alpha - \beta)^{\nu} = (-1)^{\nu}\alpha^{\nu} + \lambda\beta$, $\lambda \in Z$ και $\nu \in N$.**

1.31. **Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = \lambda\cdot(\alpha - \beta)$, $\lambda \in Z^*$ και $\nu \in N$.**

1.32. **Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $\alpha^{2\nu+1} - \beta^{2\nu+1} = \lambda\cdot(\alpha + \beta)$, $\lambda \in Z^*$ και $\nu \in N$..**

1.33. **Αν α, β ακέραιοι με $\alpha \neq -\beta$ δείξτε ότι $\alpha^\nu + \beta^\nu = \lambda\cdot(\alpha+\beta)$, $\lambda \in Z^*$ και <u>ν περιττός</u>**

1.34. **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει
$2+4+6+\cdots+2\nu = \nu(\nu+1)$

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2+4+\cdots+2\nu = \nu(\nu+1)-1$ αν αληθεύει για ν, τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\nu \in N^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.35. **i)** Αποδείξτε ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$.

ii) Έστω ότι ισχύει $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}<2$ για κ το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για κ + 1 πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας

1.36. Να αποδειχθεί ότι: $2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+\nu\cdot 2^{\nu-1}=(\nu-1)\cdot 2^\nu$
για κάθε $\nu \in N$ με $\nu \geq 2$.

1.37. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει:

α) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)=\dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$

β) $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2\nu)^3=2\nu^2(\nu+1)^2$

1.38. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο αριθμός
$x=\dfrac{4^\nu}{36}+\dfrac{5\nu}{3}+\dfrac{2}{9}$ είναι ακέραιος

1.39. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$ ο αριθμός
$x=2^{2^\nu}+1$;έχει τελευταίο ψηφίο το 7

2. ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1
Θεώρημα της Ευκλείδειας διαίρεσης
Αν α, β ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$ τότε υπάρχούν μοναδικοί ακέραιοι π και υ τέτοιοι ώστε $\alpha = \pi \cdot \beta + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon \leq |\beta|$.

Η διαδικασία εύρεσης των π και υ λέγεται **Ευκλείδεια διαίρεση** του α με τον β. Το π ονομάζεται **πηλίκο** της ευκλείδειας διαίρεσης και το υ **υπόλοιπο** της ευκλείδειας διαίρεσης.

Παρατηρήσεις

Π.1. Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης είναι πάντα μη αρνητικός

Π.2. Αν $\upsilon = 0$ τότε η ευκλείδεια διαίρεση λέγεται **τέλεια** .

Π.3. Το υπόλοιπο υ της ευκλείδειας διαίρεσης είναι μικρότερο από την απόλυτη τιμή του διαιρέτη β. Οπότε τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης α : β είναι τα 0 ,1,2,....., $|\beta| - 1$.
π.χ τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης 9 : (-4) είναι $\upsilon = 0,1,2,3$

Π.4. Κάθε ισότητα της μορφής $\alpha=\kappa\cdot\beta+\lambda$ δεν υποδηλώνει την Ευκλείδια διαίρεση του α με τον β αφού πρέπει $0 \leq \lambda \leq |\beta|$.π.χ η ισότητα $37 = 2\cdot12+13$ δεν υποδηλώνει την Ευκλείδια διαίρεση του 37 με τον 12 αφού πρέπει *δεν ισχύει* $0 \leq 13 \leq |12|$ **.**

Π.5. Αν με οποιοδήποτε τρόπο ένας ακέραιο γραφεί στην μορφή $\alpha=\beta\cdot\kappa+x$ με $0\leq x \leq|\beta|$ τότε ή ισότητα $\alpha=\beta\cdot\kappa+x$ αντιπροσωπεύει την Ευκλείδια διαίρεση του α με τον β

Π.6. Εάν έχω Ευκλείδεια διαίρεση ενός ακεραίου α με β=2 τότε τα πιθανά υπόλοιπα είναι $\upsilon = 0,1$.
Εάν $\upsilon = 0$ τότε $\alpha = 2.\pi$ $\pi \in Z$ και ονομάζεται *άρτιος* .
Εάν $\upsilon = 0$ τότε $\alpha = 2.\pi+1$ $\pi \in Z$ και ονομάζεται *περιττός* .
Ιδιότητες για τους άρτιους και τους περιττούς είδαμε στην εισαγωγή .

Π.7. Εάν θέλω να δείξω ότι ένας ακέραιος είναι άρτιος πρέπει να τον φέρω στην μορφή $\alpha = 2\kappa$ ($\kappa \in Z$) (η κάνω χρήση των βασικών σχέσεων . Βλέπε βασικές εφαρμογές)
π.χ ο $\alpha = 4\lambda + 2 + 10\lambda^2$, $\lambda \in Z$ είναι άρτιος αφού $\alpha = 2(4\lambda + 2 + 10\lambda^2) = 2\cdot\kappa$ με $\kappa = 4\lambda + 2 + 10\lambda^2 \in Z$

Π.8. Εάν θέλω να δείξω ότι ένας ακέραιος είναι περιττός πρέπει να τον φέρω στην μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$ ($\kappa \in Z$) (η κάνω χρήση των βασικών σχέσεων . Βλέπε βασικές εφαρμογές)
π.χ ο $\alpha = 8\lambda + 5$, $\lambda \in Z$ είναι περιττός αφού $\alpha = 8\lambda + 4 + 1 = 2(4\lambda + 2) + 1 = 2\kappa + 1$ με $\kappa = 4\lambda + 2 \in Z$

Π.9. Εάν θέλω να δείξω ότι μια παράσταση είναι ακέραιος αρκεί να δείξω ότι δεν γράφεται σε κλασματική μορφή ή να δείξω ότι γράφεται σαν γινόμενο ή άθροισμα ακεραίων

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος*

Έστω α,α+1 δυο διαδοχικοί ακέραιοι τότε
Αν α άρτιος τότε $\alpha = 2\cdot\kappa$, $\kappa \in Z$ $\alpha(\alpha+1) = 2\cdot\underbrace{k\cdot(k+1)}_{\lambda} = 2\cdot\lambda$ άρα άρτιος

Αν α περιττός τότε $\alpha = 2\cdot\kappa + 1$, $\kappa \in Z$ $\alpha(\alpha+1) = (2\kappa+1)\cdot(2\kappa+1+1) = (2\kappa+1)\cdot(2\kappa+2) = 2\underbrace{(2k+2)(k+1)}_{\lambda} = 2\lambda$ άρα άρτιος

2. *Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου α είναι της μορφής $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in Z$ ή $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, $\lambda \in Z$*

Αν α περιττός τότε $\alpha = 2\cdot\kappa + 1$, $\kappa \in Z$ άρα
$\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{\lambda} + 1 = 4\cdot2\cdot\lambda + 1 = 8\lambda + 1$

3. *Αν ο ακέραιος α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε ο α^2 είναι της μορφής $3\lambda + 1$, $\lambda \in Z$*

Αφού ο α δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα αν ο α διαιρεθεί με το 3 θα αφήνει υπόλοιπο 1 ή 2 (όχι 0 δηλαδή)
Άρα $\alpha = 3\kappa + 1$ ή $\alpha = 3\kappa + 2$
Αν $\alpha = 3\kappa + 1$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa+1)^2 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 1 = 3\underbrace{k(3k+2)}_{\lambda} + 1 = 3\lambda + 1$

Αν $\alpha = 3\kappa + 2$ τότε $\alpha^2 = (3\kappa+2)^2 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 4 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 3 + 1 = 3\underbrace{(3\kappa^2 + 2\kappa + 1)}_{\lambda} + 1 = 3\lambda + 1$

4. *Να δείξετε ότι το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3*

Αυτή η άσκηση θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής
" *Να δείξετε ότι ο αριθμός* $A=\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3}\in Z$"
Σε τέτοιες περιπτώσεις επειδή έχουμε διαιρεση με το 3 (παρονομαστής) διακρίνω τις περιπτώσεις
α) **α=3κ** τότε $A=\dfrac{3\kappa(3\kappa+1)(3\kappa+2)}{3}=\kappa(3\kappa+1)(3\kappa+2)\in \mathrm{Z}$
β) **α=3κ+1**τότε Α=
$$\frac{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}{3}=\frac{(3k+1)(3k+2)3(k+1)}{3}=(3k+1)(3k+2)(k+1)\in \mathrm{Z}$$
γ) **α=3κ+1**τότε Α=
$$\frac{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}{3}=\frac{(3k+1)3(k+1)(3k+4)}{3}=(3k+1)(3k+4)(k+1)\in \mathrm{Z}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση του 33 με το 7***

   άρα *33 = 7 4+5* . Άρα π = 4 και υ = 5 >0

2. ***Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση του 33 με το -7***

   Κάνω την ευκλείδεια διαίρεση του 33 με το 7 είναι $\begin{array}{cc} 33 & 7 \\ 5 & 4 \end{array}$ άρα

   33 = 7.4+5 .
   Όμως *33 = (-7)(-4) +5* (*Το κάνω αυτό γιατί θέλω να εμφανίσω το β = - 7*).
   Άρα π = - 4 και υ = 5

3. ***Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση του - 33 με το 7***

   Είναι 33 = 7.4+5
   $\Rightarrow$ -33 = -7.4-5 (*Το κάνω αυτό γιατί θέλω να εμφανίσω το α = - 33)*
   $\Rightarrow$ -33 = 7(-4) - 5 (*επειδή υ= -5 < 0 προσθέτω και αφαιρώ στο β μέλος το β= 7*)
   $\Rightarrow$ -33 = 7(-4) -7+7-5
   $\Rightarrow$ -33 = 7(- 4 - 1) + 2
   $\Rightarrow$ *-33 = 7(-5) +2* . Άρα π = - 5 και υ = 2 >0

4. ***Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση του - 33 με το – 7***

   Είναι 33 = 7.4+5 $\Rightarrow$ -33 = -7.4 - 5 $\Rightarrow$ -33 = (-7)4 -5 $\Rightarrow$ -33 = (-7)4 -7+7-5 $\Rightarrow$
   -33 = (-7) (4+1) +2 $\Rightarrow$ *-33 = (-7) 5 +2* . Άρα π = 5 και υ = 2 >0

5. ***Έστω α ,β $\in Z$ και ν $\in N^*$. Αν οι α , β διαιρούμενοι με το ν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha-\beta}{\nu}$ είναι ακέραιος .***

Από την υπόθεση $\alpha = \kappa \cdot \nu + \upsilon$ και $\beta = \lambda\cdot\nu + \upsilon$ άρα $\alpha-\beta = (\kappa\cdot\nu+\upsilon)-(\lambda\cdot\nu+\upsilon)$
$= \kappa\cdot\nu+\upsilon-\lambda\cdot\nu-\upsilon = (\kappa-\lambda)\cdot\nu$, άρα $\alpha-\beta = (\kappa-\lambda)\,\nu \Rightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\nu} = \kappa-\lambda$. Όμως ο $\kappa-\lambda \in \mathbb{Z}$ ως διαφορά ακεραίων .

6. ***Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ με $\gamma\neq 0$. Αν $\alpha-\beta = \lambda\,\gamma$ με $\lambda \in Z$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β διαιρούμενοι με τον γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.***

   Έστω ότι υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2 \in Z$ με $\alpha = \kappa_1\gamma + \upsilon_1$ και $\beta = \kappa_2\gamma + \upsilon_2$. Θέλω να δείξω ότι $\upsilon_1=\upsilon_2$
   Όμως $\alpha - \beta = \lambda\gamma \Rightarrow \alpha = \beta + \lambda\gamma \Rightarrow \alpha = \kappa_2\gamma + \upsilon_2 + \lambda\gamma \Rightarrow \alpha = (\lambda+\kappa_2)\gamma+\upsilon_2$.
   Άρα $\upsilon_1=\upsilon_2$.

7. ***Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι οι οποίοι διαιρούμενοι με το 5 δίνουν πηλίκο και υπόλοιπο ίσους ακέραιους αριθμούς***

   Έστω $\alpha > 0$ τότε από την εκφώνηση θα είναι $\alpha = 5\,.\,\pi + \upsilon$ με $\pi = \upsilon$ και $0 \le \upsilon < 5$.Άρα $\alpha = 5.\pi + \pi$ με $0 \le \pi < 5$. Έτσι $\alpha= 5(\pi+1)$ με $0 \le \pi < 5$. Δηλαδή $\pi = 0,1,2,3,4$.
   Για $\pi= 0$ $\alpha = 5$. Για $\pi= 1$ $\alpha = 10$. Για $\pi= 2$ $\alpha = 15$. Για $\pi= 3$ $\alpha = 20$.
   Για $\pi= 4$ $\alpha = 25$.
   Τελικά $\alpha = 5$ ή 10ή 15 ή 20 ή 25

8. ***Το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας διαίρεσης α: β είναι αντίστοιχα 8 και 11 . Να βρεθούν οι α και β εάν γνωρίζουμε ότι α <150***

   Από την εκφώνηση είναι $\alpha = 8\cdot\beta + 11$ με $\upsilon = 11 < \beta$. Όμως $\alpha < 150$. Άρα $8\cdot\beta+11<150 \Rightarrow 8\cdot\beta < 139 \Rightarrow \beta < 17.375$.
   Έτσι $11 < \beta < 17.375$ άρα και αφού $\beta\in Z$ είναι $\beta = 12,13,14,15,16,17$.οπότε $\alpha = 107 , 115, 123, 131 , 139 , 147$

9. ***Αν α, β , γ είναι περιττοί ακέραιοι τότε η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις***

   Έστω ότι έχει ακέραια λύση x .Τότε ή $x=2\kappa$ (άρτιος) ή $x=2\kappa+1$ (περιττός)
   Είναι
   Αν x άρτιος τότε
   x^2 άρτιος οπότε αx^2 άρτιος , βx άρτιος , γ περιττός
   Άρα $\underbrace{\alpha\chi^2+\beta\chi}_{\alpha\rho\tau\iota o\varsigma} + \underbrace{\gamma}_{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} =$ περιττός Άτοπο αφού $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ (= άρτιος)

   Αν χ περιττός τότε
   x^2 περιττός οπότε αx^2 περιττός , βx περιττός , γ περιττός
   Άρα $\underbrace{\alpha\chi^2+\beta\chi}_{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} + \underbrace{\gamma}_{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} =$ περιττός Άτοπο αφού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (= άρτιος)

10. ***Μπορεί ο αριθμός 25 να γραφεί σαν άθροισμα 10 προσθετέων καθένας από τους οποίους να είναι ίσος με 1 ή3 ή 5***

Από την βασική σχέση 2 είναι Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών είναι άρτιος . Επειδή οι 1, 3, 5 είναι περιττοί το άθροισμα 10 τέτοιων προσθετέων θα είναι άρτιος . Όμως ο 25 είναι περιττός άρα δεν γίνεται .

11. ***Αν ο α είναι περιττός ακέραιος να δείξατε ότι*** $\dfrac{\alpha^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+4)^2+1}{12} \in Z$

Ο α είναι περιττός ακέραιος άρα α = 2κ+1 ,κ∈Ζ άρα $\dfrac{\alpha^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+4)^2+1}{12}=$

$$\frac{(2\kappa+1)^2+(2\kappa+1+2)^2+(2\kappa+1+4)^2+1}{12}=$$

$$\frac{4\kappa^2+4\kappa+1+4\kappa^2+12\kappa+9+4\kappa^2+20\kappa+25+1}{12}=\frac{12\kappa^2+36\kappa+36}{12}=$$

$$\frac{12(\kappa^2+3\kappa+3)}{12}=\kappa^2+3\kappa+3\in Z$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α ' ΟΜΑΔΑ

2.1. Αν π και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του α δια του β > 0, τότε να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του -α δια - β.

2.2. Έστω α = β·κ + υ, $0 \le υ < |β|$, $β \neq 0$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του (α + λβ) με το β είναι πάλι υ.

2.3. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

α) α =211 , β =85 **β)** α =-145, β = 31

γ) α =117 , β = -37 **δ)** α =-93 , β = -13

ε) α =0 , β =-3

2.4. Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι ή περιττοί

2ν+7 4ν+1 $2ν^2+3$ 4κ+2 $κ^2+2$, κ,ν ∈Ν .

2.5. Αν α, β είναι άρτιοι και γ,δ είναι περιττοί ,να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι ή περιττοί

α+β γ+δ αβ γδ α+γ

3·α+2·β 5·γ+7δ $α^3$ $β^{2000}$ $γ^{1999}$

2.6. Αν α = 7κ+3 τότε να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $α^2$ με το 7

2.7. Αν $\alpha = 2\lambda+1$ τότε να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α^2 με το 8

2.8. Να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $\alpha = \nu^4 - \nu^2 + 1$ με το 2 .

2.9. Αν η διαίρεση του ακεραίου α με το 3 δεν είναι τέλεια να δείξετε ότι ο α^2 διαιρούμενος με το 3 δίνει υπόλοιπο 1

2.10. Αν $\alpha = 2\kappa+2$, $\beta = 6\kappa+7$ να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $2\beta-\alpha$ με τον 10 είναι το 2 .

2.11. Να βρείτε ποιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί όταν διαιρεθούν με το 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου .

2.12. Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.

2.13. Για τον ακέραιο α το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 12 είναι 7. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

$$\alpha : 3 \qquad \alpha : 4 \qquad \alpha : 6$$

2.14. Ένας ακέραιος κ διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1 . Να αποδείξετε ότι η διαίρεση του $\alpha = \kappa^2+2\kappa+1$ με το 4 είναι τέλεια.

2.15. Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π.

2.16. Αν $\alpha = 3\cdot\kappa+2$, $\kappa\in Z$ να δείξετε ότι η διαίρεση $(\alpha^3 - 3\cdot\alpha - 2) : 27$ είναι τέλεια .

2.17. Να δείξετε ότι η διαφορά των κύβων 2 διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός αριθμός

2.18. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ με $\gamma\neq 0$.και $\alpha-\beta= \lambda\gamma$, $\lambda\in Z$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β διαιρούμενοι με το γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο .

2.19. Να βρεθεί ο ακέραιος α ο οποίος αν διαιρεθεί με το 27 δίνει υπόλοιπο ίσο με το τετράγωνο του πηλίκου

2.20. Η διαίρεση ενός ακεραίου α με το 65 δίνει πηλίκο έναν άρτιο αριθμό λ και υπόλοιπο λ^3. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο α;

2.21. Αν η ευκλείδεια διαίρεση του α με το 5 δίνει υπόλοιπο 2 και η ευκλείδεια διαίρεση του β με το 5 δίνει υπόλοιπο 4 να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $\alpha+\beta$ με το 5

2.22. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος δ, ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.

2.23. **α)** Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής 2κ ή 2κ + 1 ($\kappa \in Z$).

β) Για κάθε ακέραιο α ισχύει: $α^2 = 4κ$ ή $α^2 = 4κ + 1$.

γ) Για κάθε ακέραιο α δείξτε ότι ο αριθμός $α^2 + α + 1$ είναι περιττός.

2.24. Να αποδείξετε ότι αν διαιρέσουμε το γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων με το 3 το υπόλοιπο είναι 0 ή 2

2.25. Αν α ένας ακέραιος αριθμός να δείξετε ότι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $α^2$ με το 5 μπορεί να είναι 0 ή 1 ή 4

2.26. Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.

2.27. Σε μια Ευκλείδια διαίρεση θετικών ακεραίων το πηλίκο είναι 7 και το υπόλοιπο 5. Να βρείτε τον διαιρετέο και τον διαιρέτη αν είναι γνωστό ότι ο διαιρετέος είναι μικρότερος κατά 25

2.28. Έστω α,β 2 φυσικοί αριθμοί με α>β. Αν το άθροισμά τους είναι 6612 και η ευκλείδεια διαίρεση του α με το β δίνει πηλίκο 75 να βρείτε τους α,β

2.29. Να δείξετε ότι ο αριθμός $(5\cdot x+2)(3\cdot x+7)$ είναι άρτιος

2.30. Να δείξετε ότι ο αριθμός $(3\cdot x+2)(x + 5)$ είναι άρτιος

2.31. Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.

2.32. **Να δείξετε ότι το γινόμενο δυο διαδοχικών αρτίων είναι πολλαπλάσιο του 8 (*δηλ είναι της μορφής 8λ, λ ∈Ζ.*)**

2.33. Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων διαδοχικών φυσικών αριθμών.

2.34. Να δείξετε ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 6

2.35. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε ακεραίου είναι της μορφής 5λ ή 5λ+1 ή 5λ+4 .

2.36. Να δείξετε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 8

2.37. Αν α είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι $\frac{α^2-1}{8} \in Z$

2.38. Αν α είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι $\frac{α^4-1}{16} \in Z$

2.39. Αν α , β ∈Z και α·β = 2001^{2000} να δείξετε ότι ο αριθμός $α^4+β^4-2$ διαιρείται με το 16.

2.40. Να εξετασθεί εάν ο αριθμός 75 μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα 20 προσθετέων καθένας από τους οποίους να είναι ίσος με 1ή 3ή 5ή 7 ή 9.

2.41. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= $\dfrac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{6}$ είναι ακέραιος .

2.42. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= $\dfrac{\alpha(a-1)}{3}$ είναι ακέραιος .

2.43. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= $\dfrac{\alpha^3-a}{3}$ είναι ακέραιος .

2.44. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= a^5-a διαιρείται με το 5

2.45. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= $\dfrac{a^3+3a^2-4a}{6}$ είναι ακέραιος .

2.46. Αν α ∈ Z να δείξετε ότι ο αριθμός A= $\dfrac{a^2+1}{3}$ δεν είναι ακέραιος .

2.47. Για ποιες τιμές του κ (*ζητείται η μορφή τους*) ο αριθμοί

A= $\dfrac{2k+1}{3}$ B= $\dfrac{3k+2}{4}$ Γ= $\dfrac{k+4}{3}$ είναι ακέραιοι;

2.48. Να βρεθούν οι ακέραιοι ν ώστε ο αριθμός $\dfrac{\nu^2+\nu+1}{3}$ να είναι ακέραιος .

2.49. Αν α, β, γ είναι περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^{40}+\beta x^{13}+\gamma=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες .

Β ' ΟΜΑΔΑ

2.50. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος περιττός χ τέτοιος ώστε

$x^2 = 8888\cdot 10^{9999}+3$

(Υπόδειξη : Ξέρουμε ότι άν χ περιττός ακέραιος τότε x^2 = 8λ+1)

2.51. Αν α = $\nu^{2000}+\nu^{1000}+1$, ν ∈Z να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 3.

2.52. Υπάρχουν α και β ακέραιοι ώστε $α^2+β^2=2223$.

2.53. Αν α άρτιος να δείξετε ότι ο αριθμός β= $\dfrac{a^4}{2}+8$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τετραγώνων δυο ακεραίων.

2.54. Αν α,β,χ ακέραιοι και α - β άρτιος να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{a^2+\beta^2}{2}$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τετραγώνων δυο ακεραίων.

2.55. Να αποδείξετε ότι αν για τον ακέραιο χ ισχύει $\frac{x-1}{3} \in Z$ τότε και $\frac{x^3-1}{3} \in Z$

2.56. Αν κ φυσικός αριθμός να δείξετε ότι ο αριθμός α= $\sqrt{4k+2}$ είναι άρρητος **(απαγωγή σε άτοπο)**

2.57. Δίνονται οι ακέραιοι α, β με α> β .Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων α : (α-β) και β: (α-β) είναι ίσα . Να δείξετε ότι τα πηλίκα τους διαφέρουν κατά 1 μονάδα.

2.58. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού α=1·2·3·…·11·12+50 με το 33

2.59. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού α = $999^9+99^{99}+9^{999}+1$ με το 9

2.60. Αν α=2^{25} – 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με το 7.

Υπόδειξη $2^{25} - 1 = 2\cdot(2^3)^8 - 1 = 2\cdot 8^8 - 2 + 1$…………

2.61. Βρείτε τους θετικούς ακέραιους α,β,γ με 0≤α<6 και 0≤β<3 έτσι ώστε α+6β+18γ=245

2.62. Βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α,β,γ,δ με α<1 και β<6 , γ<5 έτσι ώστε α+4β+24γ+120δ= 782

2.63. Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος α της μορφής α= 4λ+3 παίρνει την μορφή α =2κ+1. Ισχύει το αντίστροφο;

3. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός
Δίνονται δυο ακέραιοι α,β με β≠0. Τότε λέμε ότι ο ακέραιος α διαιρεί τον β και συμβολίζουμε α / β όταν η διαίρεση β: α είναι τέλεια . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει λ ∈ Z τέτοιος ώστε β = λ ·α Δηλαδή έχουμε ότι
β / α ⇔ α = λ·β για κάποιο λ∈Z.

Η ΕΚΦΡΑΣΗ Α / Β ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΚΑΘΕ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ

- ***Ο Β ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΤΟΥ Α***
- ***Ο Β ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΤΟΥ Α***
- ***Ο Α ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ Β***
- ***Ο Α ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΤΟΥ Β ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ Α = ΠΟΛ.Β .***

Όταν ο β ***δεν διαιρεί*** τον α τότε γράφουμε ***α ∤ β ή ότι α ≠ πολ.β***

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν α , β∈Z και β≠0 με β /α τότε (−β) / α
   Πράγματι β / α ⇔ α = λ· β⇔α = (-λ)·(-β) ⇔ (-β) /α.
2. ±1/α Για κάθε α∈Z
3. ±α / α Για κάθε α∈Z
4. Αν α , β∈Z και κ∈Z* τότε αν β / α έχουμε ότι κ·β/κ·α .
5. Αν α , β∈Z και κ∈Z* τότε αν κ· β/ κ ·α έχουμε ότι β/α .
6. β/0 Για κάθε β∈Z

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ .

Αν α,β,γ ακέραιοι αριθμοί . Ισχύουν ότι

1. α/β και β/α	τότε	$\lvert α \rvert = \lvert β \rvert$
2. α/β και β/γ	τότε	α/γ
3. α/β και λ∈Z	τότε	α/ λβ (Άρα και α/β ⇒ α/$β^2$ = β·β και α/$β^ν$)
4. α/β και α/γ	τότε	α/(β±γ)
5. α/β και α/γ και κ , λ ∈Z	τότε	α/ (κβ+λγ)

6. α/β και $\beta\neq 0$ τότε $|\alpha| \leq |\beta|$
7. **α/β και γ/δ τότε $\alpha\cdot\gamma/\beta\cdot\delta$ (Να αποδειχθεί)**
8. **$\beta\gamma/\alpha$ τότε β/α και γ/α (Να αποδειχθεί)**
9. **$\alpha/(\beta+\gamma)$ και α/γ τότε α/β (Να αποδειχθεί)**

Τέλος γνωρίζουμε από την άλγεβρα ότι

Αν ν περιττός τότε $\alpha^\nu+\beta^\nu = (\alpha+\beta)\underbrace{(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1})}_{\lambda} = \lambda\cdot(\alpha+\beta)$

Αν ν φυσικός τότε $\alpha^\nu-\beta^\nu = (\alpha-\beta)\underbrace{(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1})}_{\lambda} = \lambda\cdot(\alpha-\beta)$

Άρα $\boxed{\alpha^\nu+\beta^\nu = \text{πολ}\,(\alpha+\beta) \quad [10]}$ και $\boxed{\alpha^\nu-\beta^\nu = \text{πολ.}(\alpha-\beta) \quad [11]}$

Σημ : Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται κα με επαγωγή (αφήνεται σαν άσκηση)

Επίσης μπορούμε επίσης με την μέθοδο της επαγωγής να αποδείξουμε τις παρακάτω αρκετά χρήσιμες σχέσεις .

$\boxed{(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu \pm \text{πολ.}\beta \quad [12]}$ και $\boxed{(\alpha-\beta)^\nu = \alpha^\nu \pm \text{πολ.}\beta \quad [13]}$

Πράγματι η [12]:

Για ν =1 ισχύει αφού $(\alpha+\beta)^1 = \alpha+\beta = \alpha^1 + 1\cdot\beta$

Για ν=κ υποθέτω ότι ισχύει δηλαδή $(\alpha+\beta)^\kappa = \alpha^\kappa + \mu\cdot\beta$, $\mu\in Z$

Για ν = κ + 1 θα δείξω ότι ισχύει δηλαδή $(\alpha+\beta)^{\kappa+1} = \alpha^{\kappa+1} + \lambda\cdot\beta$, $\lambda\in Z$

Είναι

$$\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)^{\kappa+1} = \\
&(\alpha+\beta)^\kappa(\alpha+\beta) = \\
&(\alpha^\kappa+\mu\cdot\beta)(\alpha+\beta) = \\
&\alpha^{\kappa+1}+\beta\cdot\alpha^\kappa+\mu\cdot\alpha\cdot\beta+\mu\cdot\beta^2 = \\
&\alpha^{\kappa+1}+\beta(\alpha^\kappa+\mu\cdot\alpha+\mu\cdot\beta) = \\
&\alpha^{\kappa+1}+\lambda\cdot\beta \text{ , με } \lambda = \alpha^\kappa+\mu\cdot\alpha+\mu\cdot\beta.
\end{aligned}$$

Προσοχή <u>δέν</u> ισχύουν οι ιδιότητες

1. $\alpha/\beta\cdot\gamma$ τότε α/β ή α/γ ($8/6\cdot 4$ αλλά $8\nmid 6$ και $8\nmid 4$)
2. $\alpha/\beta\cdot\gamma$ και $\alpha\nmid\beta$ τότε α/γ ($6/2\cdot 15$ αλλά $6\nmid 2$ και $6\nmid 15$
3. α/γ και β/γ τότε $\alpha\cdot\beta/\gamma$ ($4/16$ και $8/16$ αλλά $32\nmid 16$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Αν α,β,γ ∈Z και γ/(5·α + 17·β) και γ/ (2·α+7·β) να δείξετε ότι γ/α***

   Αφού γ/(5·α + 17·β) άρα γ/ 7 · (5·α + 17·β) [1]
   ,ακόμη
   αφού γ/ (2·α+7·β) άρα γ/ 17·(2·α+7·β) [2]
   Έτσι :
   γ / 7 · (5·α + 17·β) - 17·(2·α+7·β) ⇔
   γ/ 35·α + 119·β −14·α -119·β ⇔ γ / α

   (Όμοια να δειχθεί ότι γ / β)

   ⓘ

   Σε πολλές περιπτώσεις διαιρετότητας χρησιμοποιούμε την συμπλ. ιδιότητα 5 του γραμμικού συνδυασμού

2. ***Αν α, β ακέραιοι με β/α και β>2 να δείξετε ότι ο β δεν διαιρεί το α+2***

   Έστω β/α+2 τότε αφού β/α θα είναι β/α+2-α⇒β/2 άτοπο αφού β>2

3. ***Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ότι ισχύει $4^{ν}$ +6·ν-1= πολ9***

   Είναι (με επαγωγή)

   Για ν = 1 είναι 4^{1} +6·1 −1 = 9 = πολ9
   Για ν=κ υποθέτω ότι ισχύει δηλαδή $4^{κ}$ +6·κ-1= πολ9 = λ·9
   (άρα $4^{κ}$= 9·λ -6·κ+1)
   Για ν=κ+1 θα δείξω ότι ισχύει δηλαδή $4^{κ+1}$ +6·(κ+1)-1= πολ9 = μ·9

   Πράγματι :

   $4^{κ+1}$ +6·(κ+1)-1 = $4^{κ}$ ·4 +6·κ+6-1 =
   (9·λ -6·κ+1)·4 +6·κ+6-1 =
   4·9·λ - 24·κ + 4 +6·k+5 =
   4·9·λ -18·κ +9 =
   9·(4·λ - 2 ·κ + 1) =
   πολ 9.

4. ***Να βρείτε τις θετικές τιμές του ακεραίου α για τις οποίες είναι α/$α^{2}$+6***
   Είναι
   $$\left.\begin{cases} a/a^2 \\ a/a^2+6 \end{cases}\right\} \Rightarrow a/a^2+6-a^2 \Rightarrow α / 6 \Rightarrow \text{ α=1 ή α=2 ή α=3 ή α=6}$$

5. ***Να βρείτε τις θετικές τιμές του ακεραίου α για τις οποίες είναι α-1 / $α^{2}$+6***
   Είναι
   $$\left.\begin{cases} a-1/a^2+6 \\ a-1/a-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} a-1/a^2+6 \\ a-1/(a-1)(a+1)=a^2-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow α/α^2+6-α^2+1 \Rightarrow$$

$\alpha / 7 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha=7$

6. ***Αν α, β ∈Z και 23/ (5·α+4·β) να δείξετε ότι 23 / (3·α +7·β)***

Είναι $\begin{cases} 23/5\alpha+4\beta \\ 23/23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23/5\alpha+4\beta \\ 23/23(\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23/5\alpha+4\beta \\ 23/23\alpha+23\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23/4(5\alpha+4\beta) \\ 23/23\alpha+23\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$23/ (23\cdot\alpha+ 23\cdot\beta) -4\cdot (5\cdot\alpha +7\cdot\beta) \Leftrightarrow 23 / 3\cdot\alpha + 7\cdot\beta$

7. ***Να δείξετε ότι $2^{55}+1$ = πολ11***

Είναι $2^{55}+1 = (2^5)^{11}+1 = 32^{11}+1 = 32^{11}+1^{11} \overset{[10]}{=}$ πολ $(32+1)$ = πολ33 = πολ11.

8. ***Αν α και β ακέραιοι και β/α , β>2 να δείξετε ότι $\beta \nmid (\alpha+2)$***

Έστω ότι β/α+2 τοτε αφού β/α θα είναι $\beta/\alpha+2-\alpha \Rightarrow \beta/ 2$ άτοπο αφού β>2

9. ***Να αποδείξετε ότι***
   α) το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6 .[6/α(α+1)(α+2)]
   β) 6/α(α+1)(4α+14)

α) Για το ερώτημα αυτό θα δουλέψουμε όπως μάθαμε στην παράγραφο 1 του παρόντος κεφαλαίου διακρίνοντας περιπτώσεις για το α . α= 6κ+υ , υ = 0,…5

Ισχύει λοιπόν ότι 6/α(α+1)(α+2)

β) Είναι

$\alpha(\alpha+1)(4\alpha+14) = \alpha(\alpha+1)[(2\alpha+8)+6] = \alpha(\alpha+1)(2\alpha+8) + \alpha(\alpha+1)\cdot 6 =$

$4\underbrace{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}_{6\lambda} + \underbrace{6\alpha(\alpha+1)}_{6\mu} = 4\cdot 6\lambda+6\mu = 6\underbrace{(4\lambda+\mu)}_{\rho} = 6\rho =$ πολ6 , άρα 6/α(α+1)(4α+14)

10. ***Αν α ∈Z και 3/α να δείξετε ότι $26/(3^\alpha-1)$***

Είναι

Αν α=0 τότε ισχύει

Αν $\alpha \neq 0$ τότε αφού 3/α άρα α=3λ , οπότε

$3^\alpha-1 = 3^{3\lambda}-1 = (3^3)^\lambda-1 = 27^\lambda-1 =$ πολ $(27-1)$ = πολ26 άρα

$26/(3^\alpha-1)$

11. ***Έστω α,β ∈Z και 7/3·α + 4·β να δείξετε ότι 7/4·α+3·β***

Είναι $\begin{cases} 7/3\alpha+4\beta \\ 7/7(\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7/3\alpha+4\beta \\ 7/7\alpha+7\beta) \end{cases} \Leftrightarrow 7 / 7\cdot\alpha+7\cdot\beta-(3\cdot\alpha+4\cdot\beta) \Leftrightarrow 7/4\cdot\alpha+3\cdot\beta$

12. ***Αν α θετικός ακέραιος και α / ν+1 και α / $2\nu^3$-ν να βρεθεί ο α***

$$\begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/2v^3-v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/2v^3-v \\ \alpha/-2v^2(v+1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/2v^3-v \\ \alpha/-2v^3-2v^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/-2v^2-v \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/2v(v+1) \\ \alpha/-2v^2-v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/2v^2+2v \\ \alpha/2v^2-v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a/v+1 \\ \alpha/v \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha/v+1-v \Rightarrow \alpha/1 \Rightarrow \alpha=1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑ

3.1. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 2.

3.2. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

3.3. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 5 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 5.

3.4. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ν διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το ν.

3.5. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα 3 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

3.6. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα 4 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 4.

3.7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα 5 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 5.

3.8. Να αποδείξετε ότι μεταξύ κ διαδοχικών ακεραίων α, α+1, α+2 , …,α + κ – 1 , υπάρχει ένας ο οποίος διαιρείται με το κ .

3.9. Να αποδείξετε ότι από 3 διαδοχικούς περιττούς ακεραίους υπάρχει ένας ο οποίος διαιρείται με το 3

[**Υπόδειξη**: θεωρείστε τους 2κ+1 ,2κ+3, 2κ+5 και εξετάστε τις περιπτώσεις κ=3λ,κ=3λ+1, κ=3λ+2]

3.10. **α)** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6

β) Να αποδείξετε ότι 6/ α(α+1)(4·α+14)

γ) Να αποδείξετε ότι 6/ α(α+1)(2·α+1)

δ) Να αποδείξετε ότι 6 / α(α+1)(α+5)

ε) Να αποδείξετε ότι 6 / $α^3+6·α^2 +11·α + 6$

στ) Να αποδείξετε ότι 6/ $α^3+5·α$. [**Υπόδειξη**: $α^3+5α=α^3+α – 6α$ = ….]

***

3.11. Αν α, β περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι $8 / \alpha^2-\beta^2$.

3.12. Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα α + β ή η διαφορά α - β διαιρείται με τον 3.

3.13. Αν τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.

3.14. Εάν ν = 1 + πολ5 να αποδείξετε ότι: $3\nu^2 + 3\nu - 1 =$ πολ5

3.15. Εάν ν = 2 + πολ5 να αποδείξετε ότι:

α) 2ν + 1 = πολ5 **β)** ν + 3 = πολ5

3.16. Αν ν = 3 + πολ5 ή ν = 1 + πολ5, να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον $3\nu^2 + 3\nu - 1$.

***

3.17. Να αποδείξετε ότι $5 / \nu^5-\nu$ για κάθε ακέραιο ν .

3.18. Να αποδείξετε ότι $3/\alpha\cdot(\alpha^2+2)$ για κάθε ακέραιο α .

3.19. Να αποδείξετε ότι $3/\alpha\cdot(2\alpha+1)\cdot(7\cdot\alpha+1)$ για κάθε ακέραιο $\alpha\neq 0$.

3.20. Να βρεθεί η τιμή των ακεραίων κ ώστε ο αριθμός $\alpha=\kappa^2-1$ να διαιρείται με το 3

***

3.21. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι : αν $7 / 45+\alpha$ και $7/ 3-\beta$ τότε $7 / \alpha+\beta$.

3.22. Αν $7/\alpha+3$ και $7 / 24-\beta$ να δείξετε ότι $7/\alpha+\beta$, $\alpha , \beta \in Z$

3.23. Αν $7/\alpha+5$ και $7 / 3\beta+47$ να δείξετε ότι $7/\alpha - 3\cdot\beta$, $\alpha , \beta \in Z$

3.24. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι : αν $11 / 5\cdot\alpha+6\cdot\beta$ $\quad 11 / 6\cdot\alpha+5\cdot\beta$.

3.25. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι αν $7 / 2\cdot\alpha +3\cdot\beta$ τότε $7 / 17\cdot\alpha + \beta$

3.26. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι αν $17 / 2\cdot\alpha +3\cdot\beta$ τότε $7 / 9\cdot\alpha + 5\cdot \beta$

3.27. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι αν $23 / 3\cdot\alpha +8\cdot\beta$ τότε $23 / 4\cdot\alpha +3\cdot \beta$

3.28. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι αν $23 / 5\cdot\alpha +4\cdot\beta$ τότε $23 / 3\cdot\alpha +7\cdot \beta$

3.29. Αν $\alpha , \beta \in Z$ να δείξετε ότι αν $7 / 3\cdot\alpha - 5\cdot\beta$ τότε $49 / (\alpha+3\cdot\beta)\cdot (\alpha -11\cdot\beta)$

3.30. Αν $x , y \in Z$ να δείξετε ότι αν $17 / 5\cdot x +2\cdot y$ τότε $17 / 2\cdot x + 11\cdot y$

3.31. Αν $x , y \in Z$ να δείξετε ότι αν $13 / 3\cdot x +2\cdot y$ τότε $13 / x +5\cdot y$

3.32. Αν $x , y \in Z$ να δείξετε ότι αν $11 / 2\cdot x +5\cdot y$ τότε $11 / 7\cdot x + y$

3.33. Αν $\alpha,\beta\in Z$ και $13 / 8\cdot\alpha+5\cdot\beta$ να δείξετε ότι $13/5\cdot\alpha+8\cdot\beta$

3.34. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\kappa,\lambda \in Z$ να δείξετε ότι αν $\lambda / \gamma\kappa+\delta$ και λ $\alpha\kappa+\beta$ τότε $\lambda / (\alpha\delta-\beta\gamma)$.

3.35. Αν $\delta / \nu^3+\nu+1$ και $\delta/ \nu^2- \nu + 1$ να δείξετε ότι $\delta=1$ ή $\delta = - 1$.

3.36. Αν $\delta,\nu\in N^*$ και $\delta / 5\cdot\nu+3$ και $\delta/8\cdot\nu+5$ να δείξετε ότι $\delta=1$.

3.37. Αν $\delta \in N^*$ και $\delta / 4\kappa+2$ και $\delta / \kappa^2+\kappa$, $\kappa \in Z$ να δείξετε ότι

α) Οι αριθμοί $4\kappa+2$ και $\kappa^2+\kappa$ είναι άρτιοι

β) $\delta = 2$

3.38. Αν $\nu \in Z$ να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{\nu^3+\nu+1}{\nu^2-\nu+1}$ δεν απλοποιείται

3.39. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος φυσικός ο οποίος διαιρεί ταυτοχρόνως τους αριθμούς $\alpha = \nu^2+\nu+2$ και $\beta = \nu^2 - \nu+2$

3.40. Αν $\alpha,\beta \in Z$ και $3/(2\cdot\alpha+\beta)$ και $3/(5\cdot\alpha+3\cdot\beta)$ να δείξετε ότι $9/\alpha\cdot\beta$

[**Υπόδειξη**: αποδείξτε ότι $3/\alpha$ και $3/\beta$]

3.41. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in Z$ και $\gamma/5\cdot\alpha+17\cdot\beta$ και $\gamma/2\cdot\alpha+7\cdot\beta$ να δείξετε ότι γ/α και γ/β

3.42. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in Z$ και γ/α και $\gamma/(\alpha+\beta)^3$ να δείξετε ότι

α) $\gamma/\alpha^3+\beta^3$ **β)** γ/β^3 .

***

3.43. Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί α για τους οποίους $\alpha+2/\alpha^2+4$

3.44. Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί α για τους οποίους $\alpha+1/\alpha^2+1$

3.45. Αν α και β ακέραιοι και $\beta/3\cdot\alpha+1$ και $\beta/4\cdot\alpha-3$ να βρεθούν οι πιθανές τιμές του β.

3.46. Αν α και β ακέραιοι και Αν $\alpha/5\cdot\beta-3$ και $\alpha/3\cdot\beta+8$ να βρεθούν οι πιθανές τιμές του β.

3.47. Αν α και β ακέραιοι και Αν $\beta/4\cdot\alpha+1$ και $\beta/3\cdot\alpha-2$ να βρεθούν οι πιθανές τιμές του β.

3.48. Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α, β με $\alpha^2-\beta^2 = 36$.

***

3.49. Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4\nu}-1$ για $\nu = 1, 2, 3, 4$ είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4\nu}-1 = \pi o\lambda 15$, $\nu \in N^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;

3.50. Να αποδείξετε ότι με επαγωγή τα παρακάτω

α) $4^{2\nu+1}+3^{\nu+2} = \pi o\lambda 13$ **β)** $4^\nu+6\nu-1 = \pi o\lambda 19$

γ) $16/3^{4\cdot\nu-3}+2\cdot3^{2\cdot\nu-2}-1$ **δ)** $6/\nu(\nu^2+5)$

ε) $7/2^{\nu+2}+3^{2\nu+1}$ **στ)** $6/2+2^2+2^3+\ldots+2^{2\nu}$

ζ) $9/10^\nu+3\cdot4^{\nu+2}+5$ **η)** Αν ν άρτιος $\nu \geq 2$ $48/\nu^3+20\cdot\nu$

3.51. Να αποδείξετε χωρίς επαγωγή ότι $13/63^\nu+7^{\nu+1}3^{2\nu+1}-21^\nu 3^{\nu+2}$

(**Απ** $\alpha = 13\cdot63^\nu$)

3.52. Να αποδείξετε χωρίς επαγωγή ότι

α) $13 / 63^{ν}+7^{ν+1}3^{2ν+1}-21^{ν}3^{ν+2}$

β) $3^{ν+2} + 3^{ν} \cdot 5^{ν+2} - 5\cdot 15^{ν}$ = πολ29 = πολ435

γ) $7 / 3^{2\cdot ν+1} +2^{ν+2}$ **δ)** $3^{2ν}+7$ = πολ 8 **ε)** $36 / 7^{ν+1}-6ν-7$

3.53. Για κάθε $ν \in N^*$, να αποδείξετε ότι $2^{2ν} + 15ν - 1$ = πολ9.

3.54. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^{ν} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $ν \in N^*$.

3.55. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^{ν} - 6ν - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε $ν \in N$, με $ν \geq 2$.

3.56. Για κάθε $ν \in N^*$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$(ν + 1)(ν + 2)(ν + 3) \dots (2ν - 1)\, 2ν$ = πολ$2^{ν}$

3.57. Να δείξετε ότι :

α) Αν $ν = 2κ$ να δείξετε ότι $3 / 2^{ν} - 1$, $κ \in \aleph^*$

β) Αν $ν = 4κ$ να δείξετε ότι $15 / 2^{ν}-1$, $κ \in \aleph^*$

3.58. **α)** Να δείξετε ότι $ν^3 - ν$ = πολ2 = πολ3= πολ6 .

β) Να δείξετε ότι

i) $3 / 2^{ν^3-ν} - 1$, $ν \in \aleph$, $ν>1$

ii) $7 / 2^{ν^3-ν} - 1$, $ν \in \aleph$, $ν>1$

iii) $63 / 2^{ν^3-ν} - 1$, $ν \in \aleph$, $ν>1$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

3.59. Να αποδείξετε ότι

α) $α / (β+γ)$ και $α/γ$ τότε $α/β$

β) $β\cdot γ/α$ τότε $β/α$ και $γ/α$

γ) $α/β$ και $γ/δ$ τότε $α\cdot β/γ\cdot δ$

γ) Αν $3 / 4α$ να δείξετε ότι $3/α$, $α \in Z$

δ) Αν $2\cdot α -3\cdot β+8\cdot γ=0$ να δείξετε ότι $6/ β\cdot(α+γ)$

ε) Αν $15\cdot α +9\cdot β - 4\cdot γ=0$ να δείξετε ότι $12/ γ\cdot(3\cdot α+β)$

στ) Αν $α,β,γ \in Z$ με $α - 10β - γ = 0$ και $11/ β - γ$ να δείξετε ότι $11/α$.

3.60. Αν το άθροισμα 2 ακεραίων είναι άρτιος να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4

3.61. Αν α,β περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι 16/ $\alpha^4+\beta^4-2$

3.62. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ να δείξετε ότι ο $A=\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{2}$ είναι ακέραιος

3.63. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου $\alpha\neq 1,-1$ για τις οποίες ο αριθμός $\dfrac{4\alpha^2-1}{\alpha^2-1}$ είναι ακέραιος .

3.64. Αν 2 / α^2 να δείξετε ότι 2/α

[**Υπόδειξη**: θεωρείστε ότι ο 2 δεν διαιρεί το α άρα α = 2κ+1….]

3.65. Αν α, β ακέραιοι με β>2 και β/α^2 +1 να δείξετε ότι ο β δεν διαιρεί το α^4+1

[**Υπόδειξη**: Έστω β / α^4+1 άρα α^4 +1= κβ , ακόμη β/α^2+1 άρα α^2+1=λβ $\Rightarrow\alpha^2$ =1-λβ και …άτοπο]

3.66. Αν $\alpha\in Z$ να δείξετε ότι ο A= $\alpha(\alpha^2-1)(4\alpha^2-1)$ διαιρείται με τον 5

3.67. Αν α , β περιττοί ακέραιοι και 7/ $\alpha^2+\beta^2$ να δείξετε ότι 7 /α και 7 /β .

3.68. Να αποδείξετε ότι αν 3/α και 3/β τότε 3/$\alpha^3+\beta^2$ και αντίστροφα

3.69. Να αποδείξετε ότι ο 5 ***δεν*** διαιρεί τον ν^2+2 για κάθε ακέραιο ν

3.70. Αν 2/ (α – β) (α +β) , $\alpha,\beta\in Z$ να δείξετε ότι 4/ (α – β) (α +β)

3.71. Αν α είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και β ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον α, όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά α - β διαιρείται με τον 9.

3.72. Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό αβγ. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής αβγαβγ. Να αποδείξετε ότι:

i) αβγαβγ = 1001 (100α +10β + γ)
ii) Ο αριθμός αβγαβγ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.

3.73. Αν ο 2 δεν διαιρεί τον xψ, τότε να αποδείξετε ότι:

i) x, ψ περιττοί αριθμοί

ii) ο 2 διαιρεί το $x^2+\psi^2$

iii) ο 4 δεν διαιρεί το $x^2+\psi^2$

3.74. Να λυθεί η εξίσωση $x^2+2=y\cdot(x+3)$, x,y θετικοί ακέραιοι .

3.75. Να λυθεί στο Z η εξίσωση $x+y=x\cdot y$.

4 . ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

ΘΕΩΡΙΑ

4.1 ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ορισμός

Κοινός Διαιρέτης των ακεραίων αριθμών α και β ονομάζεται ο ακέραιος που είναι διαιρέτης (διαρεί τέλεια) και του α και του β . ◪

Έτσι για παράδειγμα οι κοινοί διαιρέτες του 18 και του 27 είναι οι ±1 , ±3 , ±6 , ±9.

Οι <u>θετικοί</u> κοινοί διαιρέτες δυο ακεραίων α και β όπου κάποιος από τους δυο είναι διάφορος του 0 δημιουργούν ένα μη κενό σύνολο με πεπερασμένα στοιχεία αφού ας μην ξεχνάμε ότι :

- Κάθε αριθμός διαιρείται από το 1 .
- Το 0 διαιρείται από οποιονδήποτε αριθμό αλλά δεν διαρεί κανένα .
- Ο μεγαλύτερος διαιρέτης ενός ακεραίου α είναι ο | α | .

Επομένως εάν κάποιος από τους α και β είναι διάφορος του 0 χρησιμοποιώντας ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο :

« Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\Re$ έχει μέγιστο στοιχείο «

συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των θετικών διαιρετών του α και β έχει μέγιστο στοιχείο .

Αν όμως και οι δύο ακέραιοι είναι μηδέν , α = β = 0 τότε έχουν άπειρους (όσοι και οι θετικοί ακέραιοι) διαιρέτες ο καθένας οπότε το σύνολο των θετικών διαιρετών του α και β έχει και πάλι μέγιστο στοιχείο .

Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό

Ορισμός

Έστω α, β δυο ακέραιοι , από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διαφορετικός από το 0 .
Ονομάζουμε *Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη* (Μ . Κ .Δ) των α και β και σμβ (α,β) τον μεγαλύτερο από τους <u>θετικούς</u> κοινούς διαιρέτες τους . ◪

Επομένως ο ακέραιος δ είναι ο ΜΚΔ δύο ακεραίων α,β αν και μόνο αν :

- Είναι θετικός
- Είναι διαιρέτης και του α και του β .
- Κάθε άλλος διαιρέτης του α και του β είναι μικρότερος ή ίσος του δ.

Δηλαδή
$$\boxed{\delta=(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\delta>0\\ \delta/\alpha,\delta/\beta\\ \text{Άν } \chi/\alpha \text{ και } \chi/\beta \text{ τότε } \chi\le\delta\end{cases}}$$

Παράδειγμα

Έστω α = 28 , β = - 24

Οι θετικοί διαιρέτες του –24 είναι οι : 1,2,3,4,6,8,12,24

Οι θετικοί διαιρέτες του 28 είναι οι : 1,2,4,7,14,28

Οι κοινοί διαιρέτες είναι οι : 1,2,4

Άρα (28,-24) = 4 ▲

Βασικές Ιδιότητες του ΜΚΔ

1) Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι
(α,β) = (| α | ,| β|)
2) Για κάθε θετικό ακέραιο α ισχύει
   i) (α,α) = α
      (9,9)=9
   ii) (α,0) = α
      (17,0)=17
   iii) (α,1) = 1
      (6,1)=1
3) Αν α, β θετικοί ακέραιοι και β / α (α =πολβ) τότε (α,β) =β
   (12,24)=12

(-28,24) = (28,24) = 4

Τέλος ένας ορισμός ακόμη

Ορισμός

Οι ακέραιοι α και β λέγονται *πρώτοι μεταξύ τους* **αν και μόνο αν (α , β) =1** ◪

Παράδειγμα

Είναι (5 ,19) = 1 άρα οι 5 και 9 είναι πρώτοι μεταξύ τους ▲

Πώς όμως βρίσκουμε τον ΜΚΔ δυο μεγάλων αριθμών ; Προφανώς όχι όπως στο παραπάνω παράδειγμα γιατί θα ήταν πολύ χρονοβόρο .

Σε αυτό μας βοηθάει το παρακάτω θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ)
Αν α , β φυσικοί αριθμοί και α = κ·β +υ τότε ισχύει (α,β) = (β,υ)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι δ = (α,β) και δ’ =(β,υ) . Θα δείξουμε ότι δ =δ’ .
Καταρχάς είναι υ = α-κ·β και ακόμη

Είναι $\delta=(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\delta/\alpha\\ \delta/\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta/\alpha\\ \delta/\kappa\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta/\beta\\ \delta/\alpha-\kappa\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta/\beta\\ \delta/\upsilon\end{cases}\Leftrightarrow\delta\le(\beta,\upsilon)=\delta'$ [1]

Επίσης $\delta'=(\beta,\upsilon)\Leftrightarrow\begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\upsilon\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta'/\kappa\beta\\ \delta'/\upsilon\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\upsilon+\kappa\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\delta'\le(\alpha,\beta)=\delta$ [2]

Από [1] και [2] είναι δ= δ’ ●▬

Η διαδικασία εύρεσης του ΜΚΔ δυο ακεραίων με τον παραπάνω τρόπο ονομάζεται ***Ευκλείδειος αλγόριθμος***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω α = 123 και β=75
Εκτελούμε τις διαδοχικές ευκλείδειες διαιρέσεις

α	=	π·	β	+	υ
123	=	1·	75	+	48
75	=	1·	48	+	27
48	=	1·	27	+	21
27	=	1·	21	+	6
21	=	3·	6	+	3
6	=	2	3	+	0
3	=	0·	0	+	3

Συνεπώς θα έχουμε

(123,75) =

= (75,48) =

= (48,27) =

Τελικά (125,73) =3 ▲

Γενικεύοντας τώρα για 2 ακεραίους α, β με α>β είναι

$\alpha = \kappa_1 \cdot \beta + \upsilon_1 \qquad 0 \leq \upsilon_1 < \beta$

$\beta = \kappa_2 . \upsilon_1 + \upsilon_2 \qquad 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1$

$\upsilon_1 = \kappa_3 \cdot \upsilon_2 + \upsilon_3 \qquad 0 \leq \upsilon_3 < \upsilon_2$

…………………………………

$\upsilon_{\nu-2} = \kappa_\nu \cdot \upsilon_{\nu-1} + \upsilon_\nu \qquad 0 \leq \upsilon_{\nu-1} < \upsilon_\nu$

$\upsilon_{\nu-1} = \kappa_{\nu+1} \cdot \upsilon_\nu + 0$ (Για κάποιον θα έχουμε τέλεια διαίρεση)

Οπότε

$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon_1) = (\upsilon_1,\upsilon_2) = \ldots\ldots(\upsilon_\nu , 0) = \upsilon_\nu$

, δηλαδή ο (α,β) θα είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των παραπάνω αλγοριθμικών διαιρέσεων .

4.2 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Τα παρακάτω 3 Θεωρήματα είναι συνέπειες του Ευκλείδειου Αλγόριθμού

ΘΕΩΡΗΜΑ 2
Αν δ= (α,β) τότε υπάρχουν κ , λ ακέραιοι (όχι μοναδικοί) με δ = κ·α+λ·β (ΧΑ)

Παράδειγμα

Σε παραπάνω παράδειγμα είδαμε την εύρεση του (125,73) Επιλύοντας κάθε μια από τις ευκλείδειες διαιρέσεις ως προς το υπόλοιπο είναι

$48=123 - 1\cdot 75$
$27 = 75-1\cdot 48$
$21=48-1\cdot 27$
$6=27-1\cdot 21$
$3=21-3\cdot 6$

Αρχίζοντας από το τέλος είναι :

$(123,75) = 3 =$

$=21-3\cdot 6 =$

$=21-3\cdot(27-1\cdot 21) =$

$= - 3\cdot 27+4\cdot 21=$

$=-3\cdot 27+4(48-1\cdot 27)=$

$=4\cdot 48 – 7\cdot 27$

$=4\cdot 48 -7\cdot (75-1\cdot 48)$

$= 11\cdot 48 -7\cdot 75$

$= 11\cdot(123-1\cdot 75) -7\cdot 75=$

$=11\cdot 123 -18\cdot 75$ ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ 3
Οι κοινοί διαιρέτες 2 ακεραίων είναι και διαιρέτες του ΜΚΔ τους δηλαδή
Αν δ =(α,β) και χ/α και χ/β τότε χ/δ και αντίστροφα

Αποδειξη

Ευθύ : Αν δ =(α,β) και χ/α και χ/β τότε χ/δ

Είναι δ=(α,β) οπότε από Θεώρημα 2 υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με δ= κ·α+λ·β

Ακόμη χ/α και χ/β άρα χ/ κ·α+λ·β=δ Άρα χ/δ

Αντίστροφο : Αν χ/δ , δ =(α,β) τότε χ/α και χ/β

Είναι χ/δ άλλα δ/α και δ/β (ορισμός του ΜΚΔ) οπότε χ/α και χ/β ●▬

ΘΕΩΡΗΜΑ 4
Αν α ,β ακέραιοι και (α,β) =1 τότε υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=1 και αντίστροφα

Απόδειξη

Ευθύ : Αν α ,β ακέραιοι και (α,β) =1 τότε υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=1

Αφού (α,β)=δ=1 από θεώρημα 2 υπάρχουν κ, λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=1

Αντίστροφο Αν α ,β ακέραιοι και υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=1 τότε (α,β)=1

Έστω δ= (α,β) Θα δείξουμε ότι δ=1

Είναι δ/α και δ/β άρα δ/κ·α+λ·β Άρα δ/1 . Όμως δ>0 (ορισμός του ΜΚΔ) Άρα δ=1 ●▬

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι και η εξής

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1
Αν διαιρέσουμε δυο ακεραίους με το ΜΚΔ τους τότε προκύπτουν αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους

Πράγματι αν (α,β) = δ τότε υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=δ $\Leftrightarrow \kappa\cdot\frac{\alpha}{\delta}+\lambda\cdot\frac{\beta}{\delta}=1$

οπότε $(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta})=1$

Γενικότερα ισχύει $(\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)},\frac{\beta}{(\alpha,\beta)})=1$ για κάθε ακέραιους α,β

Οπότε για παράδειγμα αφού (28,24)=4 έχουμε ότι $(\frac{28}{4},\frac{24}{4})=(7,6)=1$

Μια τελευταία συνέπεια είναι και το εξής Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ 5
Αν α,β,γ ακέραιοι και α/β·γ και (α,β)=1 τότε α/γ

Απόδειξη

Αφού (α,β)=1 υπάρχουν κ,λ ακέραιοι με κ·α+λ·β=1 [1]

Από την [1] είναι κ·α+λ·β=1 ⇔ κ·α·γ+λ·β·γ= γ

Ακόμη α/β·γ και α/α·γ άρα α / κ·α·γ +λ·β·γ =γ άρα α/γ. ●▬

4.3. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΤΡΙΩΝ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Η έννοια του ΜΚΔ γενικεύεται και για περισσότερους από 2 ακεραίους

¨Έτσι ως ΜΚΔ των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$: $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο από τους κοινούς θετικούς διαιρέτες των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$.

Για την εύρεση του ΜΚΔ των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$ κάνουμε χρήση της εξής πρότασης ;

“ Ο ΜΚΔ 3 ή περισσοτέρων αριθμών Δε μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δυο από αυτούς με τον ΜΚΔ τους “

Δηλαδή **$(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha,\beta),\gamma)$**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

(9, 27,12) = ((9,27) ,12) = (9,12) = 3 ▲

Επίσης ισχύουν ως γενικεύσεις οι ιδιότητες που είδαμε στον ΜΚΔ 2 ακεραίων

Δηλαδή

- Αν $\delta=(\alpha,\beta,\gamma)$ τότε υπάρχουν κ, λ ,μ ακέραιοι με $\kappa\cdot\alpha+\lambda\cdot\beta+\mu\cdot\gamma=\delta$
- Αν $\delta=(\alpha,\beta,\gamma)$ τότε $(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta},\frac{\gamma}{\delta})=1$

4.4 ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ορισμός

Κοινό Πολλαπλάσιο των ακεραίων αριθμών α και β ονομάζεται ο ακέραιος που είναι πολλαπλάσιο και του α και του β . ◪

Έτσι για παράδειγμα τα πολλαπλάσιο του 3 και του 4 είναι
του 3 : 3,6,9,**12**,15,**18**,21,**24**,27….
του 4: 4,8,**12**,16,**18** , 24,**27**

Οπότε τρία κοινά τους πολλαπλάσια είναι τα 12 , 18 και 24

Τα θετικά κοινά πολλαπλάσιο δυο ακεραίων α και β όπου και οι δυο είναι διάφοροι του 0 δημιουργούν ένα μη κενό σύνολο με πεπερασμένα στοιχεία αφού ας μην ξεχνάμε ότι :το $|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των α,β
Το ελάχιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι το Ελάχιστο κοινό πολαπλλάσιο των α , β
Άρα

Ορισμός

Έστω α, β δυο ακέραιοι , διαφορετικοί από το 0 .
Ονομάζουμε *Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π)* των α και β και σμβ [α,β] το μικρότερο από τους <u>θετικά</u> κοινά πολλαπλάσιά τους . ◪

Επομένως ο ακέραιος ε είναι το ΕΚΠ δύο ακεραίων α,β αν και μόνο αν :

- Είναι θετικός
- Είναι πολλαπλάσιο και του α και του β .
- Κάθε άλλο πολλαπλάσιο του α και του β είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ε

Δηλαδή $\boxed{\varepsilon=[\alpha,\beta]\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon>0\\ \varepsilon=\pi o\lambda\alpha,\varepsilon=\pi o\lambda\beta\\ \text{Άν } \chi=\text{πολα και } \chi=\text{πολβ τότε } \chi\geq\varepsilon\end{cases}}$

του 3 : 3,6,9,**12**,15,**18**,21,**24**,27….
του 4: 4,8,**12**,16,**18** , 24,**27**

Παραδειγμα

Έστω α = 3 , β = 4

Τα θετικά πολλαπλάσια του 3 : 3,6,9,**12**,15,**18**,21,**24**,27….
Τα θετικά πολλαπλάσια του 4 : 4,8,**12**,16,**18** , 24,**27**

Τα κοινά πολλαπλάσια : 12,18,24,….
Άρα [3,4] = 12 ▲

Βασικες Ιδιοτητες του ΕΚΠ

1) Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι
   [α,β] = [| α | ,| β|]
2) Για κάθε ακέραιο α ισχύει
   i) [α,1] = |α|
   ii) Αν β/α τότε [α,β] = |α|
   [18,3]=18

[-4 ,3] =
[4,3] = 12

[9,1]=9

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

Αν α , β είναι θετικοί ακέραιοι τότε (α,β)·[α,β]=α·β
Γενικότερα Αν α , β είναι ακέραιοι τότε (α,β)·[α,β]=|α| · |β|

Τα παρακάτω 3 Θεωρήματα είναι συνέπειες του Θεωρήματος 6

ΘΕΩΡΗΜΑ 7
Αν (α,β)=1 δηλαδή οι α,β είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε [α,β] = |α|·|β|

Απόδειξη : Είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 6

ΘΕΩΡΗΜΑ 8
Το ΕΚΠ των α,β διαιρεί κάθε κοινό πολλαπλάσιο τους δηλαδή αν χ= πολα και χ=πολβ τότε χ= πολ[α,β]

Η έννοια του ΕΚΠ γενικεύεται και για περισσότερους από 2 ακεραίους

¨Έτσι ως ΕΚΠ των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$: $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu]$ ονομάζουμε το μικρότερο από τα κοινά θετικά πολλαπλάσια των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$.

Για την εύρεση του ΕΚΠ των $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$ κάνουμε χρήση της εξής πρότασης ;

“ το ΕΚΠ 3 ή περισσοτέρων αριθμών Δε μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δυο από αυτούς με το ΕΚΠ τους “

Δηλαδή

$$[\alpha,\beta,\gamma] = [[\alpha,\beta],\gamma]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

[9, 3,4] = [[9,3] ,4] = (9,4) = 9·4 = 36 αφού (4,9)=1 ▲

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) ***Αν α,β,κ ακέραιοι τότε (α,β) = (α-κ·β,β)***

Έστω δ= (α,β) και δ’ =(α-κ·β,β)

Είναι $\delta=(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases}\delta/\alpha\\ \delta/\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta/\alpha\\ \delta/\kappa\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta/\beta\\ \delta/\alpha-\kappa\beta\end{cases} \Leftrightarrow \delta/(\beta,a-k\beta)=\delta'$

Άρα δ/δ’ έτσι δ≤ δ’ και

$$\delta'=(\alpha-\kappa\beta,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\alpha-\kappa\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta'/\kappa\beta\\ \delta'/\beta\\ \delta'/\alpha-\kappa\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\alpha-\kappa\beta+\kappa\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\delta'/\beta\\ \delta'/\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \delta'\leq\delta$$

Άρα δ’/δ έτσι δ’≤δ οπότε δ=δ’

2) ***Αν α ακέραιος τότε (α,α+1) = 1 . Δηλαδή δυο διαδοχικοί ακέραιοι είναι πρώτοι*** μεταξύ τους
Από 1) είναι (α+1,α) = (α+1 -1·α ,α) = (1,α)=1

3) ***Αν α,β,κ ακέραιοι και κ>0 τότε (κ·α,κ·β)= κ·(α,β)***

Έστω δ=(α,β) και δ’=(κ·α,κ·β)
Καταρχάς υπάρχουν ακέραιοι λ,μ με λ·α+μ·β=δ ⇔ κ·λ·α+κ·μ·β=κ·δ
Είναι

$$\delta = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta / \alpha \\ \delta / \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa\delta / \kappa\alpha \\ \kappa\delta / \kappa\beta \end{cases} \Leftrightarrow \kappa\delta /(\kappa\alpha,\kappa\beta) \Leftrightarrow \kappa\delta / \delta'$$

Ακόμη

$$\delta' = (k\alpha, k\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta' / \kappa\alpha \\ \delta' / \kappa\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta' / \kappa\mu\alpha \\ \delta' / \kappa\lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \delta' /(\kappa\mu\alpha + \kappa\lambda\beta) \Leftrightarrow \delta' / \kappa\delta$$

άρα δ' =κδ ⇔ (κ·α,κ·β)= κ·(α,β)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(120,160) = (10·12 , 10·16)=10·(12,16)=10·(3·4 ,4·4) =10·4·(3,4)=10·4·1= 40 ▲

4) ***Αν α,β,κ ακέραιοι και κ>0 τότε [κ·α,κ·β]= κ·[α,β]***

Είναι $[\alpha,\beta] = \dfrac{(\kappa\alpha)(\kappa\beta)}{(\kappa\alpha,\kappa\beta)} = \dfrac{\kappa^2\alpha\beta}{\kappa(\alpha,\beta)} = \kappa\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha,\beta)} = \kappa[\alpha,\beta]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

[120,160] =
= [10·12 , 10·16]=10·[12,16]=10·[3·4 ,4·4] =10·4·[3,4]=10·4·12= 480 ▲

5) ***Έστω α,β ακέραιοι με (α,β)= δ . Αν α=κδ και β=λδ να δείξετε ότι (κ,λ)=1 . κ,λ ∈Z***

Αφού (α,β)=δ άρα χα + ψβ = δ ⇒ χ(κδ) + ψ(λδ) = δ ⇒ (χκ)δ+(ψλ)δ =δ⇒ χκ+ψλ=1⇒ (κ,λ)=1 (επίσης (χ,ψ)=1)

6) ***Έστω α,β,γ ακέραιοι άν α/γ , β/γ και (α,β)=1 τότε αβ / γ***

Είναι
α/γ άρα γ= λα και β/γ άρα γ = κ β
Επίσης (α,β)=1 άρα υπάρχουν ακέραιοι χ, ψ με
χα+ψβ=1 ⇒ χαγ+ψβγ=γ ⇒
χκβ+ψβλα = γ ⇒ (χκ)(αβ)+ψλ(αβ)=γ ⇒ (χκ+ψλ)αβ=γ ⇒ αβ/γ

7) ***Έστω α,β,γ ακέραιοι να δείξετε ότι (α,β) = [α,β] ⇔ α = β***

Ευθύ (α,β) = [α,β] ⇒ α = β

Έστω (α,β) = [α,β] =δ
Άρα δ/α και δ/β αφού δ=(α,β)
και α/δ και β/δ αφού δ=[α,β]
Άρα α/δ και δ/β ⇒ α/β και
β/δ και δ/α ⇒ β/α οπότε β/α και α/β ⇒ α=β

Αντίστροφο α=β ⇒ (α,β) = [α,β]

Αν α=β τότε (α,β)=(α,α) = α
και [α,β]= [α,α] =α οπότε (α,β)=[α,β]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Να αποδείξετε τα παρακάτω

i) **(2·κ+2,2·κ)=2 κ∈Z**
Είναι (2·κ+2,2·κ) = (2·κ+2-2·κ, 2·κ) = (2, 2·κ)=2·(1,κ) =2·1=2

ii) **(2·ν-1,2·ν+1) = 1 ν∈ℵ***

Είναι (2·ν-1,2·ν+1) =(2·ν-1-(2·ν+1),2·ν+1) = (2,2·ν+1) =(2, 2·ν+1-2·ν) = (2,1) =1

iii) **(ν+2,2) / ν , ν∈ℵ***

(ν+2,2) = (ν+2-2,2) = (ν,2) . Αλλά (ν,2) / 2 Επομένως (ν+2,2)/2

iv) **(2·α -3·β) ,4·α-5·β) /β**

Έστω δ=(2·α-3β , 4·α-5β) άρα (δ/2·α-3β και δ/4·α-5β) ⇒ (δ/4·α-6β και δ/4·α – 5β) ⇒ ⇒(δ/ /4·α - 5β – (4·α – 6β))⇒ δ/1⇒ δ=1 (αφού δ>0)

v) **(2·α+3 , 4·α+5) =1**

Έστω δ=(2·α+3 , 4·α+5) άρα (δ/2·α+3 και δ/4·α+5) ⇒ (δ/4·α+6 και δ/4·α+5) ⇒ (δ/ 4·α+6 – (4·α+5))⇒ δ/1⇒ δ=1 (αφού δ>0)

vi) **(5·α+2,7·α+3)=1**
Έστω δ=(5·α+2 , 7·α+3) άρα (δ/5·α+2 και δ / 7·α+3) ⇒ (δ/35·α+14 και δ/35·α+15) ⇒(δ / 35·α+15 – (35·α+14) ⇒ δ/1⇒ δ=1 (αφού δ>0)

vii) $\mathbf{(2\kappa+1,\frac{\kappa(\kappa+1)}{2})=1}$ **κ∈Z**

Έστω δ= $(2\kappa+1,\frac{\kappa(\kappa+1)}{2})$ οπότε (δ/2κ+1 και δ/ $\frac{k(k+1)}{2}$) άρα

(δ/(2κ+1)·2κ και δ/ $\frac{k(k+1)}{2}$ 8) ⇒(δ/4κ^2+1 και δ/4κ^2+4κ) ⇒

δ/4κ^2+4κ -4κ^2-2κ ⇒ δ/2κ Επίσης όμως δ/2κ+1 άρα δ/2κ+1-2κ
⇒δ/1⇒δ=1

viii) **¨Αν (α,β)=1 να δείξετε ότι (α , β, α +β)=1**
Είναι (α,β,α+β) = (α , (β,α+β)) = (α , (β, α+β-β)) =(α, (β,α)) =(α,β,α)=(α,β)

2) **Να δείξετε ότι (α,β) ≤ (α+β,α-β)**
Έστω δ=(α,β) άρα δ/α και δ/β άρα δ/α+β και δ/α-β οπότε δ/(α+β,α-β) άρα δ ≤(α+β,α-β)

3) **Αν (α,β)=1 να δείξετε ότι (α+β,α-β)=1 ή 2**

Είναι δ= (α+β ,α-β) οπότε δ/α+β και δ/α-β άρα δ/ α+β-α+β και
δ/α-β+α-β άρα δ/2β και δ/2·α οπότε δ/(2·α,2·β) Αλλά (2·α,2·β) = 2·(α,β) = 2 ⇒
δ/2 ⇒ δ =1 ή δ=2
i)

4) **Αν (α,4) = 2 και (β,4) =2 να δείξετε ότι (α+β,4)=4**

Είναι α= 4·κ+υ , υ = 0,1,2,3 Όμως (α,4)=(4,υ)=2 άρα υ=2 Όμοια
β= 4·π+ρ , ρ = 0,1,2,3 Όμως (α,4)=(4,ρ)=2 άρα ρ=2 Οπότε
(α+β,4) = (4κ+2+ 4π+2 ,4) = (4κ+4π+4,4) = 4(κ+π+1,1) = 4·1=1

5) **Να εξετάσετε αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ν για τους οποίου το κλάσμα $\frac{2\nu+3}{5\nu+7}$ είναι ανάγωγο.**

Έστω δ= (2ν+3,5ν+7) και είναι
δ/2ν+2 και δ/5ν+7 άρα δ/5ν+7 – 2(2ν+3) ⇒ δ/ ν+1
Οπότε δ/ν+1 και δ/2ν+3 άρα δ/ 2ν+3 – 2(ν+1)⇒ δ / 1 άρα δ=1 οπότε το κλάσμα είναι ανάγωγο

6) **Αν (α , κ)=1 να δείξετε ότι (α , κ·β)=(α ,β) , α,β,κ, ∈ℵ***

Έστω δ = (α,β) και δ’ =(α,κβ) . δ=(α,β) ⇒ δ/α και δ/β ⇒δ/α και δ/κβ ⇒
δ/(α,κβ) ⇒ δ/δ’ [1]
Είναι (α,κ)=1 άρα υπάρχουν μ,ν ακέραιοι με μα +νκ=1 ⇒ μαβ +νκβ=β
Όμως δ’ /α και δ΄/κβ Άρα δ’/ μβα και δ’ / νκβ ⇒ δ’ /α και δ’/μβα +νκβ=β ⇒
δ’/α και δ’/ β άρα δ’ / (α,β) ⇒ δ’/δ [2]
Από [1] και [2] ⇒ δ’=δ

7) **Έστω α,β,x,y ∈ Z με αx-βy=1 να δείξετε ότι (α+β,x+y)=1**

Έστω δ= (α+β,χ+ψ) οπότε δ/α+β και δ/χ+ψ ⇒δ/αχ+βχ και δ/ βχ+βψ ⇒
δ/αχ+βχ-βχ-βψ ⇒δ/αχ-βψ⇒δ/1⇒δ=1

8) **Να δείξετε ότι 6 /Α = $\nu^3 + 3\nu^2+2\nu$**

Είναι Α= $\nu^3+3\nu^2+2\nu = \nu (\nu^2+2\nu+2) = \nu(\nu+1)(\nu+2)$

Όμως 2/ ν(ν+1) ⇒ 2/Α (γιατί;)
και 3/ν(ν+1)(ν+2)⇒ 3/Α (γιατί;)

και επειδή (2,3)=1 άρα $2\cdot3 / A \Rightarrow 6 / A$

9) **Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α,β για τους οποίους αβ=500 και (α,β)=10**

(α,β)=10 άρα α=10λ και β= 10κ με (λ,μ)=1
Οπότε $αβ=500 \Rightarrow 10κ\cdot10λ=500 \Rightarrow 100κλ=500 \Rightarrow κλ=5$ με (κ,λ)=1
Άρα
κ=1 και λ=5 οπότε α = 10 και β =50
ή
κ=5 και λ=1 οπότε α = 50 και β =10

10) **Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α,β α >β για τους οποίους α+β =9(α,β) και [α,β]=70**

Έστω δ=(α,β) άρα α = κδ και β= λδ με (κ,λ)=1 και κ>λ (αφού α>β)
Οπότε $α+β=9(α,β) \Rightarrow κδ+λδ=9δ \Rightarrow κ+λ=9$ *με (κ,λ)=1* και κ>λ
Άρα (κ,λ)= (1,8) ή (4,5) ή(5,4) ή (2,7) ή (7,2)ή (2,7) Όμως α> β άρα (κ,λ) = (5,4) ή (7,2)
Ακόμη
$[α.β] =70 \Rightarrow [κδ,λδ]=10 \Rightarrow δ[κ.λ]=70 \Rightarrow δκλ =70$
Αν (κ,λ)= (5, 4) τότε $δ\cdot20 =70 \Rightarrow δ=3,5$ *που βεν είναι ακέραιος άρα απορρίπτεται*
Αν (κ,λ)= (7, 2) τότε $δ\cdot14 =70 \Rightarrow δ=5$ *άρα* $α= κδ= 7\cdot5 = 35$ *και* $β=λδ=2\cdot5=10$
τελικά α=35 και β =10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1. Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακεραίων αριθμών που δεν υπερβαίνουν το 1000 και
α) Διαιρούνται με το 6 **β)** Διαιρούνται με το 8
γ) Διαιρούνται με το 6 ή το 8 **δ)** δεν διαιρούνται με το 6 ή το 8
ε) Διαιρούνται με το 6 και δεν διαιρούνται με το 8 .

4.2. Να βρεθεί ο (205 ,115) και να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός τους

4.3. Να αποδείξετε ότι (27,17) = 1 και κατόπι να βρείτε κ,λ τέτοιους ώστε 27κ+17λ=1.

4.4. Να βρεθεί ο (68 ,18) και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τους ακεραίους x , y ώστε $68\cdot x+18\cdot y = (68,18)$.

4.5. Οι αριθμοί 36 και 50 διαιρούμενοι με τον θετικό ακέραιο χ δίνουν υπόλοιπο 1 . Να βρεθεί ο χ

4.6. Οι αριθμοί 381 και 674 διαιρούμενοι με τον θετικό ακέραιο χ δίνουν υπόλοιπα 4 και 7 . Να βρεθεί ο χ.

4.7. Οι αριθμοί 827 και 387 διαιρούμενοι με τον θετικό ακέραιο χ δίνουν υπόλοιπο13 . Να βρεθεί ο χ.

4.8. Με ποιο θετικό ακέραιο πρέπει να διαιρεθούν οι 2234 και 4078 για να πάρουμε υπόλοιπα 23 και 19 αντίστοιχα;

4.9. Άν $\alpha,\beta\in Z$ και $(\alpha,10) = (\beta,10) = 5$ να δείξετε ότι $(\alpha+\beta,10) = 10$

4.10. Να βρεθεί ο (15 ,21,35) και να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός τους

4.11. Κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου του Ευκλείδη για τον υπολογισμό του (α,β) βρίσκουμε διαδοχικά τα πηλίκα 2,2,1,1,1,3 . Να βρεθούν οι α,β αν(α,β)=2

4.12. Έστω ο ακέραιος α με $\alpha > 0$ Να δείξετε ότι
α) $\alpha/1 \Rightarrow \alpha = 1$ β) $\alpha/2 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$

4.13. Να βρεθούν
α) (3,5) **β)** (6,3) **γ)** (21,35)
δ) $(2\cdot\alpha , 3\cdot\alpha)$ **ε)** $(4\nu , 4\nu+2)$ **στ)** $(\alpha^2+2\cdot\alpha , \alpha+1)$

4.14. Να βρείτε τα
α) $(1+2+....+40+41, 1^2+2^2+...41^2)$ **β)** [60,30,42,80]

Αν α θετικός ακέραιος με $\alpha\neq 1$ να δείξετε ότι $(\alpha^{18}-1 , \alpha^{12}-1) = \alpha^6-1$

4.15. Αν α περιττός ακέραιος να δείξετε ότι $(\alpha^2+3\cdot\alpha ,\alpha+1) = 2$
Αν α περιττός ακέραιος να βρεθεί ο $(\alpha^2+\alpha ,\alpha+2)$

4.16. Αν $\alpha\in Z$ να δείξετε ότι $(3\cdot\alpha-1 , 2\cdot\alpha+3) = 1$ ή 11

4.17. Αν $\alpha\in Z$ να δείξετε ότι $(3\cdot\alpha-1 , 2\cdot\alpha+3) = 11 \Leftrightarrow \alpha=11\cdot\rho+4$

4.18. Αν $\kappa\in N$ να δείξετε ότι $(2\cdot\kappa^3+5\kappa^2+3\kappa+1 , \kappa^2+2\kappa+3) = 1$ ή 59

4.19. Αν α, β ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι: $(\alpha, \beta) = (5^\alpha + 4\beta, \alpha + \beta)$.

4.20. Να αποδειχθεί ότι $(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta\gamma, \beta)$.

4.21. Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha + \beta\gamma, \alpha + \beta(\gamma-1))$ να αποδείξετε ότι $\delta_1 = \delta_2$.

4.22. Εάν $\delta_1 = (\alpha, \beta)$ και $\delta_2 = (\alpha, \beta\cdot\gamma)$ τότε δ_1/δ_2.

4.23. Αν $\alpha,\beta\in Z$ να δείξετε ότι

α) $(7\cdot\alpha + 5\cdot\beta, 4\cdot\alpha+3\cdot\beta) = (\alpha,\beta)$

β) $(2\cdot\alpha - 3\cdot\beta, 3\cdot\alpha - 4\cdot\beta) = (\alpha,\beta)$

γ) $(3\cdot\alpha + 4\cdot\beta, 2\cdot\alpha+3\cdot\beta) = (\alpha+\beta\cdot\gamma, \beta), \gamma\in Z$

δ) $(23\cdot\alpha+4\cdot\beta, 17\cdot\alpha+3\cdot\beta) \le (17\cdot\alpha+7\cdot\beta, 13\cdot\alpha-5\cdot\beta)$

ε) $(5\cdot\alpha + 17\cdot\beta, 2\cdot\alpha+7\cdot\beta) = (\alpha, \beta)$

στ) $(\alpha,\beta) = (5\cdot\alpha + 13\cdot\beta, 13\cdot\alpha + 8\cdot\beta)$

ζ) $(\alpha, \beta) = (3\cdot\alpha + 7\cdot\beta, 8\cdot\alpha + 19\cdot\beta)$

η) $(\alpha,\alpha^2+\beta) = (\alpha+\beta, 3\cdot\alpha+2\cdot\beta)$

4.24. Να αποδείξετε ότι

α) δυο διαδοχικοί ακέραιοι είναι πρώτοι μεταξύ τους

β) δυο διαδοχικοί περιττοί είναι πρώτοι μεταξύ τους

γ) οι ακέραιοι α, $2\cdot\alpha+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους

δ) οι ακέραιοι $\alpha+1$, $2\cdot\alpha+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους

4.25. Αν $\alpha,\beta\in Z^*$ με $(\alpha,\beta)=1$ να δείξετε ότι

α) **$(\alpha,\gamma)=(\alpha,\beta\cdot\gamma)$, $\gamma\in Z$. Τι συμπεραίνετε ;**

β) $(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta^2)=1$ γ) $(\alpha,\beta)=(\alpha^2,\beta^2)=1$

δ) $(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta^\nu)=1$ ε) $(\alpha,\beta)=(\alpha^\nu,\beta^\nu)=1$

4.26. ****Αν $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ με $(\beta,\gamma)=1$ με $\delta=(\alpha,\beta\gamma)$, $x=(\alpha,\beta)$, $y=(\alpha,\gamma)$ να δείξετε ότι

α) $\delta / x\cdot\gamma$, $\delta/\beta\cdot y$ και $\delta/x\cdot y$

β) x/δ, y/δ και $x\cdot y/\delta$

γ) $(\alpha,\beta\gamma) = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\gamma)$

4.27. ****Αν $\alpha,\beta\in Z^*$, $\nu\in N^*$ τότε να δείξετε ότι $(\alpha^\nu,\beta^\nu) = (\alpha^\nu, \beta^\nu)$

(κάντε χρήση της 4.4.27 και της 4.4.31- Βασικής)

4.28. ******Αν $\alpha,\beta,\nu\in N$ Αν α^ν / β^ν τότε να δείξετε ότι α/β**

(κάντε χρήση του Θεωρήματος 5 , της 4.4.27 και της 4.4.31- Βασικής)

4.29. ****Βασική *****

Άν $\alpha,\beta\in Z$ και $(\alpha,\beta)=\delta$ και προφανώς $\alpha = \kappa\cdot\delta$ και $\beta = \lambda\cdot\delta$ με $\kappa,\lambda\in Z$ να δείξετε ότι $(\kappa,\lambda)=1$

4.30. ****Βασική *****

Άν $\alpha,\beta\in Z$ και $(\alpha,\beta)=\delta$ τότε ξέρουμε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in Z$ με $\kappa\cdot\alpha+\lambda\cdot\beta=\delta$ να δείξετε ότι $(\kappa,\lambda)=1$.

4.31. Αν α,β θετικοί ακέραιοι με $(5\cdot\alpha+4\cdot\beta, 3\cdot\alpha+2\cdot\beta)=1$ να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ανάγωγο.

4.32. Άν $\alpha,\beta\in Z$ και $(\alpha,\beta)=1$ να δείξετε ότι $(\lambda\cdot\alpha+\beta, \alpha)=1$.

4.33. Αν $(\alpha, \beta) = 1$ και δ/α δείξτε ότι $(\delta, \beta) = 1$.

4.34. Άν $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ και $(\alpha,\beta)=1$ και γ/β να δείξετε ότι $(\alpha,\gamma)=1$

4.35. Άν $\alpha,\beta\in Z$ και $(\alpha,\beta)=1$ να δείξετε ότι $(\alpha^2, \alpha\cdot\beta, \beta^2) = 1$

(κάντε χρήση της 4.4.27)

4.36. Άν α,β∈Z και (α,β) =1 να δείξετε ότι (3·α +5·β, 7·α+ 12·β)=1

4.37. Άν α,β,γ∈Z* και (α , β·γ) =1 να δείξετε ότι (α,β)=1 και (α , γ)=1.

4.38. .Άν α,β∈Z και (α,β) =1 και δ = (2·α +3·β , 3·α+2·β) να δείξετε ότι δ=1 ή 5

4.39. Για κάθε α ∈Z να δείξετε ότι

α) (28·α +3 ,42·α+ 4) =1 β) (15·α +4 , 10·α +3) =1

4.40. Αν α∈Z κ να δείξετε ότι οι αριθμοί $4^{α2}$ +3·α –5 και $2·α^2$+α – 2 είναι πρώτοι μεταξύ τους

4.41. Να δείξετε ότι ($2^{α3}$ +$3·α^2$+3·α+2 , 2·α+1) = 1 , α∈Z

4.42. Να δείξετε ότι ($α^4$ +$3·α^2$+1 , $α^3$ + 2·α) = 1 , α∈Z

4.43. Να δείξετε ότι ($6^{α2}$ +5·α+4 , $6^{α2}$ +8·α + 5) = 1 , α∈Z

Εάν ν ∈ N* να αποδείξετε ότι: (5ν + 1, 6ν + 1) = 1

4.44. Να βρεθούν οι τιμές του ν ∈Z ώστε το κλάσμα $\frac{3\nu+5}{5\nu+6}$ να απλοποιείται.

4.45. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί ν για τους οποίους να απλοποιούνται τα κλάσματα

α) $\frac{3\nu+2}{5\nu+3}$ **β)** $\frac{2\nu+3}{7\nu+10}$ **γ)** $\frac{\nu(\nu+2)}{\nu+1}$ **δ)** $\frac{33\nu+4}{2\nu+3}$

4.46. Αν α ,β ,κ ,λ∈Z να δείξετε ότι (α ,β) ≤ (κ α +λβ , κα-λβ)

4.47. Αν α,β,γ ∈ Z *να δείξετε ότι 3 · (α,β,γ) ≤ (α,β)+(β,γ)+(γ,α)

4.48. Αν α,β περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι $\frac{(\alpha+\beta,\alpha-\beta)}{2}=(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2})$

4.49. Αν α,β∈N* και (α,β)=1 να δείξετε ότι (α – β ,α·β)=1 , και αντίστροφα.

4.50. Άν α,β∈Z να δείξετε ότι (α , β ,α – β)=(α,β)

4.51. Άν α,β,γ,δ ∈Z να δείξετε ότι (αγ ,αδ ,βγ , βδ) = (α,β)·(γ,δ)

Αν α,β∈Z* να δείξετε ότι (α,β) = (α,β,α·β)

4.52. Αν α,β,γ∈Z* και (α,β) = 2 και (α,βγ) =3 να δείξετε ότι (α·β , α·β·γ , $α^2$, $β^2$ · γ) =6

4.53. Να βρεθεί ο περιττός x αν γνωρίζουμε ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των αριθμών 75 , 88 , 100 με το x είναι 5,4,3 αντίστοιχα .

4.54. Αν [β, γ] = ε, [$β_1$, $γ_1$] = $ε_1$, $β_1$/β και $γ_1$/γ να αποδείξετε ότι $ε_1$/ε.

4.55. Αν α, β, γ ∈ Z*, να δειχθεί ότι: (α, β) (β, γ) (γ, α) [α, β] [β, γ] [γ, α] = $α^2β^2γ^2$.

4.56. Αν α,β, ∈N* να δείξετε ότι (α+β,[α,β])=(α,β)
(κάντε χρήση της 4.4.31)

4.57. Αν α,β∈Z* να δείξετε ότι $[α,β]^ν=[α^ν,β^ν]$
(κάντε χρήση της 4.4.29)

4.58. Αν α,β∈N* και [α,β]=ε να δείξετε ότι $(\frac{\varepsilon}{\alpha},\frac{\varepsilon}{\beta})=1$

4.59. Αν α,β,γ ∈N* και γ/α , γ/β να δείξετε ότι $\left[\frac{\alpha}{\gamma},\frac{\beta}{\gamma}\right]=\frac{[\alpha,\beta]}{\gamma}$

4.60. Άν α,β,γ∈N* να δείξετε ότι [α,β,γ] = $\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha,\beta)(\beta,\gamma)(\gamma,\alpha)}$ *(Τύπος Gauss)*

και με βάση αυτό να δείξετε ότι κ·[α,β,γ]=[κ·α,κ·β,κ·γ]

4.61. Έστω α,β,γ θετικοί ακέραιοι με [α,β,γ] = α·β·γ , να δείξετε ότι (α,β)=1 και (α·β,γ)=1

4.62. Αν α,β,γ ∈N* να δείξετε ότι [κα,κβ,κγ] = κ[α,β,γ] , *(όχι όπως στην 4.4.64)*

4.63. Αν α,β,γ,δ ∈N* να δείξετε ότι [αγ,αδ,βγ,βδ] = [α,β]·[γ,δ]

4.64. Αν α,β, ∈Z* να δείξετε ότι [2x,2y,3x,3y]=6[x,y]

4.65. Να αποδείξετε ότι [2·α +3, α+2] = (2·α +3)· (α+2)

Στις περισσότερες από τις παρακάτω να γίνει χρήση της πρότασης
» Άν α,β∈Z και (α,β)=δ τότε α = κ·δ και β = λ·δ με κ,λ ∈Z και (κ,λ)=1 «

4.66. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με [α,β]=12 και α+β=7

4.67. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με [α,β]+2=13 ·(α,β)

4.68. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με α+β =3(α,β) και [α,β]=12

4.69. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με α+β =7(α,β) και [α,β]=60

4.70. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με α+β =35 και [α,β]=30

4.71. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με α<β και [α.β]=24 και αβ=96

4.72. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με α+β =4 και [α,β]=24

4.73. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με (α,β)=12 και α+β=72

4.74. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με (α,β)=4 και [α,β]=24

4.75. Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{matrix} x+y=200 \\ (x,y)=5 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} x+y=200 \\ (x,y)=3 \end{matrix}$

4.76. Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα $\begin{matrix} (x,\ y)=10 \\ [x,\ y]=100 \end{matrix}$.

4.77. Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α, β.

α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν α/β και β/α τότε α = β. **ii)** Αν α/α+β τότε α/β.

β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων α, β για τα οποία ισχύει:

Το γινόμενο α·β διαιρεί το άθροισμα α + β.

Στις περισσότερες από τις παρακάτω να γίνει χρήση της πρότασης
» Αν α,β,γ ακέραιοι και *α/γ , β/γ και (α,β)=1 τότε αβ / γ* «

4.78. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι 6 / ν(2ν+1)(7ν+1)

4.79. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $6/ν^3+3ν^2+2ν$

4.80. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $6/ ν^3-ν$

4.81. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $12/ (ν^2+ν)(ν^2+5ν+6)$

4.82. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $12/ ν^2 (ν^2 -1)$

4.83. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $30 / ν^5-ν$

4.84. Αν ν ∈Z να αποδείξετε ότι $6/ ν^3+11ν$

4.85. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.

4.86. Να αποδειχθεί ότι:

α) ο αριθμός $ν^3$ - ν είναι πολλαπλάσιο του 24, αν ν περιττός φυσικός διάφορος του 1.

β) ο αριθμός $(\nu^2 - 1)\,\nu^2\,(\nu^2 + 1)$ είναι διαιρετός δια 60, αν ν φυσικός.

γ) ο αριθμός $(\nu^3 - \nu)\,(\nu^2 - 4)$ είναι πολλαπλάσιο του 120, αν ν φυσικός μεγαλύτερος του 2.

4.87. Εάν $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1$ και τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

α) ο β διαιρεί τον δ **β)** $|\beta| = |\delta|$

4.88. Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

4.89. Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει $(\alpha, \beta, \gamma) = 7$ και $[\alpha, \beta, \gamma] = 105$, να βρεθούν οι α, β, γ.

4.90. Αν οι μαθητές ενός σχολείου χωριστούν ανα 2,3,4,5,6 περισσεύει ένας μαθητής , ενώ δεν περισσεύει κανείς αν χωριστούν κατά 7 . Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος των μαθητών του σχολείου .

4.91. Τρεις φίλοι γυμνάζονται στο στάδιο της πόλης τους . Για μία πλήρη στροφή χρειάζονται 12, 8, 6 λεπτά αντίστοιχα. Αν ξεκινήσουν μαζί μετά από πόσα λεπτά θα συναντηθούν ξανά στην αφετηρία ;

4.92. Ο διευθυντής ενός σχολείου ρωτήθηκε πόσους μαθητές έχει και απάντησε :» Οι μαθητές του σχολείου είναι ανάμεσα από 450 και 500 . Αν τους μετρ ήσω ανά 12 περισσεύουν 5 ενώ αν τους μετρήσω ανά 10 περισσεύουν 3 .» Πόσους μαθητές έχει το σχολείο ;

4.93. Έχουμε συνολικά 200 τετράδια και μολύβια και θέλουμε να τα μοιράσουμε εξίσου σε 10 μαθητές . πόσα μολύβια και πόσα τετράδια είναι δυνατόν να πάρει κάθε μαθητής ;

4.94. Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.

4.95. Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

4.96. Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.

4.97. Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;

4.98. Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;

5. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

Θεωρούμε την εξίσωση **$\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma=0$** όπου α ,β ,γ είναι ακέραιοι με $\alpha\neq 0$και $\beta\neq 0$. Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **γραμμική διοφαντική εξίσωση** και για να την επιλύσουμε πρέπει να βρούμε ζεύγη ακεραίων (x, y) που να την επαληθεύουν .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση αx+βy+γ=0 έχει λύση όταν και μόνο όταν ο (α ,β) διαιρεί τον γ.

Απόδειξη

Ευθύ **(αν ο (α ,β) διαιρεί τον γ τότε η εξίσωση αx+βy+γ=0 έχει λύση)**

`Έστω ότι (α,β) = δ και δ / γ τότε είναι γ= μ·δ για κάποιο $\mu\in\mathbb{Z}$ και επίσης υπάρχουν κ. ,$\lambda\in\mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε : $\kappa\cdot\alpha+\lambda\cdot\beta=\delta \Rightarrow \mu\cdot\kappa\cdot\alpha+\mu\cdot\lambda\cdot\beta=\mu\cdot\delta \Rightarrow$
$(\mu\cdot\kappa\cdot)\,\alpha + (\mu\cdot\lambda)\cdot\beta=\gamma$ άρα το ζέυγος $(x_0,y_0) = (\mu\cdot\kappa, \mu\cdot\lambda)$ είναι μια λύση της δοσμένης εξίσωσης .

Αντίστροφο **(αν η εξίσωση αx+βy+γ=0 έχει λύση τότε ο (α,β) διαιρεί τον γ)**

Έστω ότι το ζευγος (x_0,y_0) είναι μια λύση της **αx+βy+γ=0** τότε $\alpha\cdot x_0+\beta\cdot y_0+\gamma=0$

`Έστω ότι (α,β) = δ τότε δ/ α και δ/ β $\delta / \alpha\cdot x_0+\beta\cdot y_0 \Rightarrow \delta / \gamma$ ●▬

Παρατήρηση :

Αν στην αx+βy+γ=0 είναι (α,β)=1 τότε η εξίσωση έχει πάντα λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ -ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να δείξετε ότι η 7χ+13ψ=15 έχει λύση***

Είναι (7,13) = 1 και 1/15 άρα η εξίσωση έχει λύση

2. ***Να δείξετε ότι η 8χ+12ψ=20 έχει λύση***

   Είναι (8,12) = 4(2,3)=4 και 4/20 άρα η εξίσωση έχει λύση.

3. ***Να δείξετε ότι η (5ν+7) χ+ (3ν+4) ψ = ν έχει λύση***

   Πρέπει να δείξουμε ότι (5ν+7, 3ν+4)/ν . Πράγματι :

   ¨Αν δ=(5ν+7, 3ν+4) $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \delta / 5\nu+7 \\ \delta / 3\nu+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \delta / 3(5\nu+7)-5(3\nu+4)$ ⇒δ / 1⇒δ=1 άρα δ/ν

   ¨Αρα η εξίσωση έχει πάντα λύση στο Ζ.

4. ***Να εξετάσετε αν η 4χ+6ψ=7 έχει λύση***

   Είναι (4,6)=2 άρα αφού 2 ∤ 7 η εξίσωση δεν έχει λύση .

5. ***Να δείξετε ότι η εξίσωση (9·α+7·β)χ+(4·α+3·β)ψ = α έχει λύση***

   Πρέπει ο δ=(9·α+7·β , 4·α+3·β) / α

   Είναι $\left\{\begin{matrix} \delta / 9\alpha+7\beta \\ \delta / 4\alpha+3\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \delta / 3(9\alpha+7\beta)-7(4\alpha+3\beta) \Rightarrow \delta / \alpha$

   Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση στο Ζ.

6. ***Αν α,β ∈Ζ* με (α,β)=1 και α≠β να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^2\chi+\beta^2\psi$ =2αβ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.***

   Αφού (α,β)=1 άρα (α^2,β^2) =1 (…) οπότε η παραπάνω εξίσωση έχει λύση .Έστω (χ,ψ) θετική ακέραια λύση της άρα χ ≥ 1 και ψ ≥ 1 οπότε

   $2\alpha\beta = \alpha^2\chi+\beta^2\psi \geq \alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ άτοπο αφού α≠β .

Τι γίνεται όμως Αν θέλουμε να βρούμε ποιές είναι οι λύσεις της γραμμικής διοφαντικής εξίσωσης; Σε αυτό μας βοηθάει το παρακάτω θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η γραμμική διοφαντική εξίσωση αx+βy+γ=0 έχει λύση (χ_0,ψ_0) (*ειδική ή μερική λύση της εξίσωσης*) τότε έχει άπειρες λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$\boxed{x = x_0+\frac{\beta}{\delta}t \quad , \quad x=\psi_0-\frac{\alpha}{\delta}t}$ **ή** $\boxed{x = x_0-\frac{\beta}{\delta}t \quad , \quad x=\psi_0+\frac{\alpha}{\delta}t}$ **, t∈Z**

Παρατήρηση : Αν (α,β)=1 τότε οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $x=x_0+\beta t$, $y=y_0-\alpha t$ ή $x = x_0-\beta t$, $y=y_0+\alpha t$

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος

Είναι γνωστό ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\gamma$, $\alpha\neq0$,$\beta\neq0$ παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία . Όταν λοιπόν $\alpha,\beta\in Z$ τότε αν αυτή η ευθεία διέρχεται από ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες (και αυτό συμβαίνει όταν $(\alpha,\beta)=\delta$ και δ/γ τότε) τότε αυτή θα διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ -ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση 17x –3y = 7***

Εξετάζουμε πρώτα αν η εξίσωση έχει λύση . Είναι (17, -3) = (17,3) =1 άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση .
Πρέπει τώρα να βρούμε μια ειδική λύση της εξίσωσης . Αυτό θα γίνει με ή με το " μάτι "ή τον αλγόριθμο του Ευκλείδη
Είναι $17 = 3\cdot5+ 2$ και $3 =2\cdot1 +1$ οπότε
$1 = 3- 2\cdot1 \Rightarrow 1= 3 – 1\cdot(17- 3\cdot5) = 3- 1\cdot17 +3\cdot5 \Rightarrow -1\cdot17 + 3\cdot6 =1\Rightarrow$
$\mathbf{17\cdot(-1) – 3 (-6) =1 \Rightarrow 17\cdot(-7) -3\cdot(- 42) =7}$
Άρα μια μερική λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0) =(-7, -42)$
Οπότε οι λύσεις τηε εξίσωση θα είναι
(x,y) με $x = -7 – 3 t$ και $y = - 42 –17 t$, $t\in Z$

2. ***Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της εξίσωσης 6x +5y =27***

Εξετάζουμε πρώτα αν η εξίσωση έχει λύση . Είναι (6,5) =1 άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση .
Πρέπει τώρα να βρούμε μια ειδική λύση της εξίσωσης . Είναι
Είναι $6 = 1\cdot5+ 1$ και οπότε $1= 1\cdot6 - 1\cdot5 \Rightarrow$
$\mathbf{1\cdot6 + (-1)\cdot5 =1 \Rightarrow 27\cdot6 + (-27)\cdot5 =27}$
Άρα μια μερική λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0) =(27, -27)$
Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι
(x,y) με $x = 27 + 5 t$ και $y = - 27 –6 t$, $t\in Z$
Πρέπει όμως $x >0 \Rightarrow 27+5t > 0 \Rightarrow t > \frac{-27}{5}$ $t\in Z$ [1]
και
$y>0 \Rightarrow -27 – 6t >0 \Rightarrow t < \frac{-27}{6}$ $t\in Z$ [2]
Από [1] και [2] είναι $\frac{-27}{5} < t < \frac{-27}{6}$, $t\in Z$ άρα $t =-5$ άρα
$(x, y) = (27 –5(-5) , -27- 6 (-5)) = (2,3)$
Αυτή είναι η μόνη θετική ακέραια λύση της εξίσωσης

3. ***Σε μια Ευκλείδια διαίρεση θετικών ακεραίων ο διαιρετέος είναι 802 και το πηλίκο 14 . Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο αυτής της***

διαίρεσης .

Έστω χ ο διαιρέτης και y το υπόλοιπο της ευκλείδιας διαίρεσης . Άρα αναζητούμε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$\mathbf{14x+y=802 \quad με \quad 0 \le y < x.}$$

Εξετάζουμε πρώτα αν η εξίσωση έχει λύση . Είναι (14,1) =1 άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση .
Πρέπει τώρα να βρούμε μια ειδική λύση της εξίσωσης . Είναι
$\mathbf{14 \cdot 1 + 1 \cdot (-13) = 1 \Rightarrow 14 \cdot 802 + 1 \cdot (-10462) = 802}$
Άρα μια μερική λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0) =(802, -10462)$
Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι

(x,y) με $x = 802 + t$ και $y = - 10462 -14 t$, $t\in Z$

Πρέπει όμως $x >0 \Rightarrow 802 + t > 0 \Rightarrow t > -802$ $t\in Z$ [1]

και

$y>0 \Rightarrow - 10462 -14 t >0 \Rightarrow t < -744,7$ $t\in Z$ [2]

και

$x > y \Rightarrow 802 + t > -10562 -14 t \Rightarrow t > -748,5$ [3]

από [1] , [2] , [3] είναι $-748,5< t < -744,7$, $t\in Z$
άρα t = -748 ,-747 ,-756 ,-745 όπότε έχουμε

x	54	55	56	57
y	46	32	18	4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω διοφαντικές εξισώσεις έχουν λύση

α) 3x+7y=10 **β)** 5x-10y = 15
γ) 4x+6y=71 **δ)** 12x-14y=20
ε) 3x+6y=7 **στ)** α x +(α+1)y = β , α,β ∈Z
ζ) $(2α+1)x + \frac{a(a+1)}{2}y=β$, α,β ∈Z

5.2. Αν $α = 2ν+1$ και $β= ν^2+ν$, ν∈N να δείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$αx+βy= ν+1$$

έχει λύση

5.3. Εάν α, β ∈ Z* να αποδείξετε ότι η διοφαντική **εξίσωση**

$$αx + βψ = κα + λβ$$

έχει λύση για κάθε κ, λ ∈ Z.

5.4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$(6ν^2+5ν+4)\cdot x + (6ν^2 +8ν+5)\cdot y =17$$

έχει λύση στο Z

5.5. Αν (α,β)=1 με αβ > 0 και αβγ<0 να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

5.6. Αν αβ > 0 και αγ<0 να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

5.7. Αν (α, β) είναι μια λύση της διοφαντικής εξίσωσης $2x-5y=4$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β+1 είναι πρώτοι μεταξύ τους

5.8. Αν α, β είναι άρτιοι ακέραιοι να δείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2\alpha\cdot\beta+1$$

είναι αδύνατη

5.9. Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α για τους οποίους

$$(2\cdot\alpha-3,\ 3\cdot\alpha+4)=5$$

5.10. Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $36x+42y=66$.

5.11. Να λυθούν οι διοφαντικές εξισώσεις

α) $3x+5y=10$ **β)** $46x-62y=14$

γ) $8x-4y=12$ **δ)** $9x-3y=12$

ε) $5x-3y=7$ **στ)** $7x-11y=34$

5.12. Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $3x+5y=16$.

5.13. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων

α) $7x+4y=85$ **β)** $11x-13y=150$

γ) $6x+13y=1$ **δ)** $5x+6y=28$

5.14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x+5y=7$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις

5.15. Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας (ε): $6x+5y=4$, τα οποία έχουν αρνητική ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.

5.16. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$(\nu^2+\nu+1)x+(\nu+1)y=\nu,\ \nu\in Z$$

5.17. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha\cdot x+(\alpha+1)y=\alpha^2,\ \alpha\in Z$$

5.18. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$(2\cdot\alpha+1)\cdot x+(3\cdot\alpha+2)\,y = \alpha+2\ ,\ \alpha \in Z$$

5.19. Να βρείτε δυο κλάσματα που έχουν αριθμητές φυσικούς αριθμούς, παρονομαστές 4 και 5 και άθροισμα $\frac{21}{20}$.

5.20. Να βρείτε ένα κλάσμα με θετικούς όρους το οποίο αν ο αριθμητής αυξηθεί κατά 3 και ο παρονομαστής κατά 4 γίνεται ίσο με $\frac{2}{3}$.

5.21. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο α ο οποίος διαιρούμενος με τον 7 και με τον 5 δίνει υπόλοιπο 1 και 3 αντίστοιχα.

5.22. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο α ο οποίος διαιρούμενος με τον 5 δίνει πηλίκο που είναι μεγαλύτερο από το υπόλοιπο κατά 5.

5.23. Ένας θετικός ακέραιος διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 3, ενώ διαιρούμενος με το 10 δίνει υπόλοιπο 6. Να βρείτε τι υπόλοιπο θα δώσει ο α, αν διαιρεθεί με το 20.

5.24. Να βρεθούν οι ακέραιοι α με $89 \leq \alpha \leq 173$ οι οποίοι διαιρούμενοι με 3 και 7 δίνουν υπόλοιπο 2 και 5 αντίστοιχα.

5.25. Να βρεθεί ο ελάχιστος κοινός όρος των αριθμητικών προόδων
2, 11, 20,………. και 7 ,15 , 23,…………

5.26. Να βρεθούν οι κοινοί όροι των αριθμητικών προόδων

$$\alpha_\nu = 2\nu+5 \text{ και } \beta_\nu=3\nu+7$$

5.27. Δίνονται οι ακολουθίες $\alpha_\nu = -2\nu + 7$ και $\beta_\nu=3\nu-20$

α) να δείξετε ότι οι (α_ν) ,(β_ν) είναι αριθμητικές πρόοδοι

β) να βρείτε τους κοινούς τους όρους

5.28. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια ανταλλαγή ενός χαρτονομίσματος των 200 δρχ. με κέρματα των 10 και 20 δρχ.; (Θέλουμε κέρματα και των δύο ειδών).

5.29. **α)** Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση $4x + 5y = 2$

β) Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy να βρεθούν τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση $4x + 5y = 2$, τα οποία βρίσκονται στην δεύτερη γωνία των αξόνων και έχουν ακέραιες συντεταγμένες.

5.30. Ένας χονδρέμπορος χαρτικών πουλάει τετράδια σε πακέτα μόνο μεγάλου και μεσαίου μεγέθους .Ένας βιβλιοπώλης παραγγέλνει 23 πακέτα μεγάλου μεγέθους και 7 πακέτα μεσαίου μεγέθους με τετράδια του ίδιου τύπου . Κατά την μεταφορά όμως οι συσκευασίες άνοιξαν και ο βιβλιοπώλης παρέλαβε συνολικά 570 τετράδια . Πόσα τεμάχια περιέχονταν στο κάθε πακέτο ;

5.31. Ο ταμίας ενός καταστήματος ψιλικών θέλει να ανταλλάξει ένα πεντακοσάρικο με κέρματα των 20 και 50 δραχμών . Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ανταλλαγή αν θέλει απαραίτητα κέρματα και των δυο ειδών ;

5.32. Να βρεθούν οι διψήφιοι αριθμοί όταν το διπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων είναι ίσο με το τριπλάσιο του ψηφίου των μονάδων αυξημένο κατά 5.

5.33. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν άλογα των οποίων οι ηλικίες είναι 9 ετών και 11 ετών . Αν το άθροισμα των ηλικιών είναι 122 έτη να βρείτε πόσα άλογα από κάθε ηλικία υπάρχουν στο αγρόκτημα .

5.34. Ένας έμπορος αγόρασε ανδρικά και γυναικεία ζεύγη υποδημάτων αντί 1.770.000 δρχ . Να βρείτε πόσα ανδρικά και πόσα γυναικεία ζεύγη υποδημάτων αγόρασε αν για κάθε ζεύγος ανδρικών υποδημάτων πλήρωσε 31.000 δρχ ενώ για κάθε ζεύγος γυναικείων υποδημάτων πλήρωσε 21.000 δρχ .

5.35. Από τα σημεία του επιπέδου με θετικές ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $5x+13y=122$ να βρείτε εκείνο που έχει την μέγιστη τετμημένη.

5.36. Έχουμε 2 ειδών μεταλλικά νομίσματα Α και Β . Τα νομίσματα Α έχουν διάμετρο 25 χιλιοστά ενώ τα νομίσματα Α έχουν διάμετρο 15 χιλιοστά . Πόσα νομίσματα από κάθε είδος πρέπει να τοποθετήσουμε το ένα δίπλα στο άλλο ώστε τα κέντρα τους και τα σημεία επαφής τους να σχηματίζουν ευθύγραμμο τμήμα 25 εκατοστών ;

5.37. Μια ομάδα ποδοσφαίρου για το πρωτάθλημα της Α΄ Εθνικής κατηγορίας στους αγώνες, που έχει δώσει έως τώρα, έχει συγκεντρώσει 38 βαθμούς και έχει υποστεί 5 ήττες. Αν οι ισοπαλίες που έχει φέρει, είναι περισσότερες από τις ήττες, αλλά και οι νίκες περισσότερες από τις ισοπαλίες, να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των αγώνων, που έχει δώσει η ομάδα αυτή, με δεδομένο ότι, από κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς, από κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0.

6 . ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = \frac{a^3 - a}{6}$ είναι ακέραιος για κάθε $\alpha \in Z$

2) Να δείξετε ότι $6/\alpha^3+5\cdot\alpha$

3)

i) Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\lambda+1$

ii) Αν ο α είναι περιττός ακέραιος να δείξετε ότι ο αριθμός $A = \frac{a^2 - 1}{8}$ είναι ακέραιος

iii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος περιττός χ τέτοιος ώστε $x^2 = 8888\cdot10^{9999}+3$

iv) Να δείξετε ότι $8 \ / \ \alpha^2-\beta^2$

4) Αν α, β, γ είναι περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^{40} + \beta x^{13} + \gamma = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες .

5) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha = \nu^4 - \nu^2 + 1$ με το 2

6) Αν α , β, γ είναι διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι να δείξετε ότι ένας από αυτούς διαιρείται με το 3

7) Αν η διαίρεση ενός ακεραίου α με τον 3 δεν είναι τέλεια να δείξετε ότι η διαίρεση του α^2 με το 3 δίνει υπόλοιπο 1

8) Αν $\alpha = \nu^{2000} + \nu^{1000} + 1$, $\nu \in Z$ να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 3.

9) Αν $\nu \in N^*$ να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{4\nu + 3}$ είναι άρρητος

✧✧✧

10) Αν $\alpha,\beta \in Z$ και $11/ (5\cdot\alpha+6\beta)$ να δείξετε ότι $11/6\cdot\alpha+5\beta$

11) Αν $\alpha,\beta \in Z$ και $7/(45+\alpha)$ και $7/(3-\beta)$ να δείξετε ότι $7/\alpha+\beta$

12) Αν $\nu \in N$ και $\alpha \ / \ \nu^3+\nu+1$ και $\alpha/ \ \nu^2-\nu+1$ να δείξετε ότι $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$

13) Να δείξετε ότι

i) $\alpha^\nu+\beta^\nu$ = πολ $(\alpha+\beta)$ ν περιττός

ii) $\alpha^\nu-\beta^\nu$ = πολ.$(\alpha-\beta)$ ν άρτιος

iii) $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu \pm$πολ.β $\nu \in N$

iv) $(\alpha-\beta)^\nu = \alpha^\nu \pm$πολ.β $\nu \in N$

v) $17/ \ 3^{2\nu}+2^{3\nu}$

vi) $24 / 7^{2ν}-5^{2ν}$

14) Να δείξετε ότι το γινόμενο 5 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 5

15) Αν $α=2^1+2^2+2^3+.....+2^{100}$ να δείξετε ότι $30/α$

16) Αν $α,β\in Z$ και $3/2\cdot α+β$ και $3/5\cdot α+3β$ να δείξετε ότι $9/αβ$

17) Να βρεθούν τα χ,ψ ώστε $χ + ψ = χ \cdot ψ$

18) Να δείξετε ότι ο $A= 3^{ν+1}5^{ν+1} +3^{ν+1}5^{ν+2} +27\cdot 15^ν$ διαιρείται με το 39 για κάθε ν

19) Να βρεθεί ο α ώστε $α/ α^2+6$

✧✧✧

20) Να βρεθεί ο $(α^2+2\cdot α , α+1)$

21) Αν α περιττός να δείξετε ότι $(α^2+3\cdot α ,α+1) =2$

22) Αν $α,β\in Z^*$ να δείξετε ότι $(7\cdot α+5\cdot β , 4\cdot α+3\cdot β)=(α,β)$

23) Να δείξετε ότι το κλάσμα $A=\dfrac{5ν+3}{7ν+4}$ δεν απλοποιείται

24) Να βρεθεί ο (222,78) και να γραφεί σαν γ.σ. αυτών

25) Οι αριθμοί 36 και 50 διαιρούμενοι με τον θετικό χ δίνουν υπόλοιπο 1 . Να βρεθεί ο χ .

26) Αν $α,β,γ \in Z$ και $α/γ$, $β/γ$ και $(α,β)=1$ να δείξετε ότι $αβ/γ$

i) Να δείξετε ότι $12/ (ν^2+ν)(ν^2+5ν+6)$

ii) Να δείξετε ότι $6 / ν^3+11ν$

27) Αν $α,β,γ \in Z$ και $(α,βγ) =1$ να δείξετε ότι $(α,β)=1$ και $(α,γ)=1$

28)

i) Αν $α,β \in Z$ με $α\neq 0$. Αν $α/βγ$ και $(α,β)=1$ να δείξετε ότι $(α,β)=1$

ii) Αν $α,β,γ \in Z$ και $3\cdot α+4\cdot β=7\cdot γ$ να δείξετε ότι $12/(α-γ)(β-γ)$

29) Έστω $α,β \in Z$ με $(α,β)=δ$. Αν $α=κδ$ και $β=λδ$ με $κ.λ \in Z$ να δείξετε ότι $(κ.λ)=1$

30) Να βρεθούν ακέραιοι α,β με $[α.β] = 12$ και $α+β=7$

31) Αν $α,β \in N^*$ και $(α,β)=1$ να δείξετε ότι $(α-β,αβ)=1$

32) Να βρεθούν ακέραιοι α,β με $[α.β] +2= 13(α,β)$

33) Αν $α,β,γ \in Z$ με $(α,γ)=1$ να δείξετε ότι $(α,βγ) = (α,β)$

i) $(α,γ^2)=1$

ii) $(α^ν,γ^ν)=1$

34) Αν $α,β,γ \in Z$ $(α^ν,β^ν)=(α,β)^ν$ και $[α^ν,β^ν]=[α,β]^ν$

35) Αν $α,β, \in Z$ και $(α^2,β^3)=1$ να δείξετε ότι $(α,β)=1$

36) Αν οι μαθητές ενός σχολείου χωριστούν ανα 2,3,4,5,6 περισσεύει ένας μαθητής , ενώ δεν περισσεύει κανείς αν χωριστούν κατά 7 . Να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος των μαθητών του σχολείου .

✧✧✧

37) Να δείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση $(9\cdot\alpha+7\beta)\chi+(4\cdot\alpha+3\beta)\psi = \alpha$ έχει λύση

38) Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $6x+5y=27$

39) Να βρεθούν οι ακέραιοι $89\leq \alpha \leq 173$ οι οποίοι διαιρούμενοι με 3 και 7 να δίνουν υπόλοιπο 2 και 5 αντίστοιχα

40) Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν άλογα των οπίων οι ηλικίες είναι 9 και 11 ετών . Αν το άθροισμα των ηλικιών των αλόγων είναι 122 έτη πόσα άλογα από κάθε ηλικία υπάρχουν στο αγρόκτημα