

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Α. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. Τα πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**
2. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Έτσι, στο πείραμα τύχης όπου ρίχνουμε ένα κέρμα, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε “γράμματα”, τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Επίσης πείραμα τύχης όπου ρίχνουμε ένα ζάρι η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα. Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6
4. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα ενδεχόμενα $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ είναι σύνθετα και το $\Gamma = \{6\}$ είναι απλό
5. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.
6. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμεστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
7. Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\emptyset) = 0$.
8. Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν $A \cap B = \emptyset$.

9. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Γενικά, σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{k}{n}$. Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

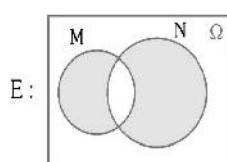
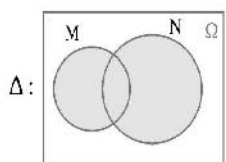
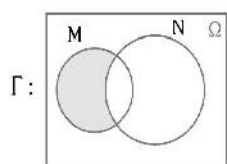
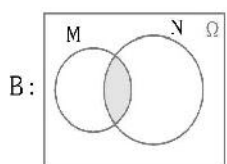
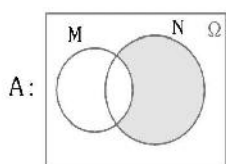
(1) Δύο άτομα (Δημήτρης και Αντώνης) παίζουν τάβλι και νικητής είναι αυτός που θα κερδίσει πρώτος 3 παιχνίδια .
 α) να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος .
 β) να βρείτε το ενδεχόμενο κερδίζει ο Δημήτρης.

(2) Ρίχνουμε ένα νόμισμα και το αποτέλεσμα είναι 4 . Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα έχει πραγματοποιηθεί ;
 A: { 1, 2, 3 } B: { 1, 3, 5, 6 } Γ: { 1, 4, 5 } Δ: { 2, 5, 6 }

(3) Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης ρίψης ενός ζαριού και τα ενδεχόμενα $M = \{ 2, 3, 6 \}$, $N = \{ 1, 2, 4 \}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 2 ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα δεν έχει πραγματοποιηθεί ;
 A: $M \cup N$ B: $M \cap N'$ Γ: $M \cap N$ Δ: $M' \cup N$ E: M'

(4) Ρίχνουμε ένα ζάρι . Να βρείτε τα παρακάτω ενδεχόμενα
 A = { Το αποτέλεσμα είναι ζυγός αριθμός }
 B = { Το αποτέλεσμα είναι μονός αριθμός }
 Γ = { Το αποτέλεσμα είναι ζυγός αριθμός και μεγαλύτερος του 3 }
 Δ = { Το αποτέλεσμα είναι ζυγός αριθμός ή μεγαλύτερο του 3 }
 E = { Το αποτέλεσμα δεν είναι μεγαλύτερο του 3 }
 Z = { Το αποτέλεσμα είναι ζυγός αριθμός αλλά όχι μεγαλύτερος του 3 }
 H = { Το αποτέλεσμα είναι αριθμός μικρότερος του 7 }
 Θ = { Το αποτέλεσμα είναι αριθμός αρνητικός }

(5) Να εκφράσετε με την βοήθεια των συνόλων και των διαγραμμάτων Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα , που είναι γραμμοσκιασμένα



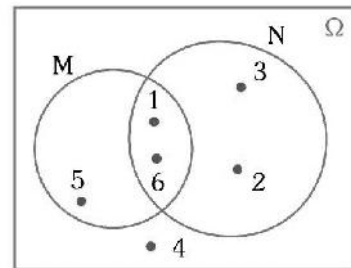
- (6) Στην Ρίψη ενός ζαριού θεωρούμε τα ενδεχόμενα
 $A = \{ \text{η ένδειξη είναι περιττός αριθμός} \}$
 $B = \{ \text{η ένδειξη είναι αριθμός μεγαλύτερος του 4} \}$
 Να γράψετε τα ενδεχόμενα A' , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B'$, $A \cup (B \cap A')$
- (7) Έστω A το ενδεχόμενο ένας υπάλληλος να είναι ευχαριστημένος από τις εργασιακές συνθήκες και B το ενδεχόμενο να είναι ικανοποιημένος από τον μισθό του. Να εκφράσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα
 A' , B' , $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$, $B \cap A'$, $A \cap B'$
- (8) Έστω A το ενδεχόμενο ένας υποψήφιος βουλευτής να εκλέγεται και B το ενδεχόμενο να τηρήσει αυτά που υποσχέθηκε.
 Να γράψετε συμβολικά χρησιμοποιώντας κατάλληλες πράξεις με ενδεχόμενα, τα παρακάτω ενδεχόμενα.
 α) Ο υποψήφιος δεν εκλέγεται.
 β) Ο υποψήφιος εκλέγεται και τηρεί τις υποσχέσεις του.
 γ) Ο υποψήφιος εκλέγεται και δεν τηρεί τις υποσχέσεις του.
 δ) Ο υποψήφιος εκλέγεται η δεν τηρεί τις υποσχέσεις του.
 ε) Ο υποψήφιος ούτε εκλέγεται ούτε τηρεί τις υποσχέσεις του.

(9) Αν τα ενδεχόμενα M, N του δειγματικού χώρου Ω είναι ασυμβίβαστα τότε

$A: M \cup N = N$ $B: M \cap N = N$ $\Gamma: M \cap N = \emptyset$ $\Delta: M \cup N = \emptyset$

(10) Με βάση το παρακάτω διάγραμμα Venn να αντιστοιχίσετε σε κάθε ένα από τα σύνολα της στήλης A το αντίστοιχο σύνολο της στήλης B

στήλη A	στήλη B
M'	$\{1, 6\}$
$M \cap N$	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$M - N$	$\{2, 3\}$
$N - M$	$\{2, 3, 5\}$
$(M \cup N)'$	$\{4\}$
$(M \cap N)'$	$\{5\}$
$(M - N) \cup (N - M)$	$\{2, 3, 4, 5\}$



(11) Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης ρίψης ενός ζαριού. Να κάνετε αντιστοίχιση του καθενός ενδεχομένου από την στήλη A με αυτό που αντιστοιχεί στην κατάλληλη φράση στην στήλη B

στήλη A	στήλη B
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	Βέβαιο ενδεχόμενο
$\{1, 2, 3\}$	αδύνατο ενδεχόμενο
$\{1\}$	απλό ενδεχόμενο
$\{7\}$	
$\{1, 3, 4, 5\}$	

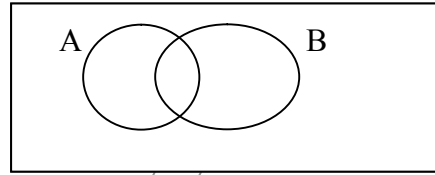
(12) Από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας παίρνουμε ένα στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A = \{ \text{το φύλλο είναι άσσος} \}$, $B = \{ \text{το φύλλο είναι κούπα} \}$.
 Να διατυπώσετε τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cup B'$, $A - B$ και το πλήθος καθενός από αυτά

(13) Έστω A και B δυο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Να

εκφράσετε με την βοήθεια των συνόλων και των διαγραμμάτων Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα

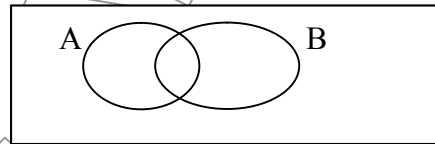
α) να πραγματοποιηθεί το A.

.....



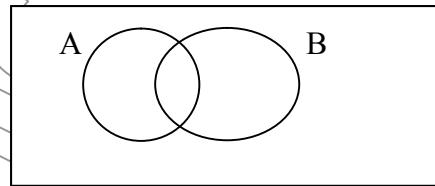
β) να μην πραγματοποιηθεί το B.

.....



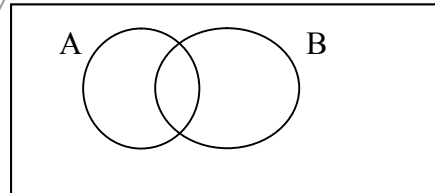
γ) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B.

.....



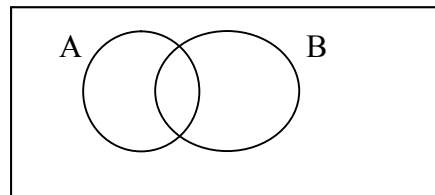
δ) να πραγματοποιηθούν και τα δυο ταυτόχρονα (συγχρόνως).

.....



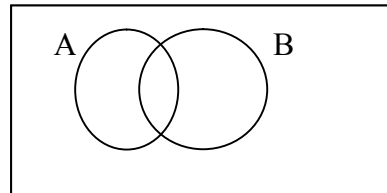
ε) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

.....



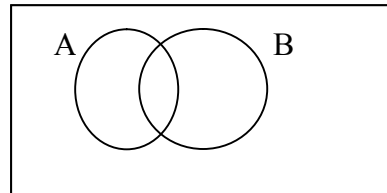
ζ) να πραγματοποιηθεί το A και όχι το B.

.....



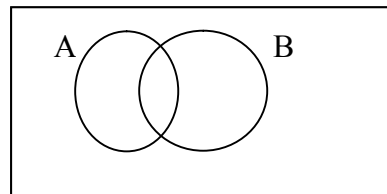
η) να πραγματοποιηθεί το B και όχι το A.

.....



θ) να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα A και B.

.....



(14) Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

(15) Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,45$, να βρεθεί η $P(A \cup B)$.

(16) Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$

και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

(17) Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει

α) τουλάχιστον μία ασθένεια; β) μόνο μία ασθένεια;

(18) Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.

(19) Από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας παίρνουμε ένα στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A = \{ \text{το φύλλο είναι άσσος} \}$

$B = \{ \text{το φύλλο είναι κούπα} \}$.

$\Gamma = \{ \text{το φύλλο είναι κόκκινο} \}$

$\Delta = \{ \text{το φύλλο είναι κόκκινο και όχι άσσος} \}$

$E = \{ \text{το φύλλο είναι κόκκινο και όχι κούπα} \}$

$Z = \{ \text{το φύλλο είναι άσσος ή κούπα} \}$

να βρείτε τις πιθανότητες αυτών των ενδεχομένων

(20) Ένα ημερολόγιο έχει 365 φύλλα. Ανοίγουμε το ημερολόγιο τυχαία σε ένα φύλλο. Να βρεθεί η πιθανότητα να πέσουμε σε μέρα του Φεβρουαρίου

(21) Έστω A , B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

Αν $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{4}{21}$ να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

- Να μην πραγματοποιηθεί το A
- Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A , B
- Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A , B
- Να πραγματοποιηθεί μόνο το A
- Να πραγματοποιηθεί μόνο το B
- Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B .

(22) Μεταξύ 200 μαθητών οι 120 έχουν καλό βαθμό στα Μαθηματικά, οι 160 έχουν καλό βαθμό στα Ελληνικά και οι 100 έχουν καλό βαθμό και στα 2. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

- Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει καλό βαθμό στα Ελληνικά ή στα Μαθηματικά.
- Να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχει καλό βαθμό ούτε στα Ελληνικά ούτε στα Μαθηματικά.

(23) Σε μια πόλη το 40% των κατοίκων διαβάζουν συχνά εφημερίδες, το 30% διαβάζουν συχνά περιοδικά και το 10% διαβάζουν συχνά και εφημερίδες και περιοδικά. Επιλέγουμε στην τύχη ένα κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα:

- Να διαβάζει συχνά εφημερίδες και περιοδικά.
- Να διαβάζει συχνά εφημερίδες και όχι περιοδικά.
- Να διαβάζει συχνά ή εφημερίδες ή περιοδικά. άλλα όχι και τα δυο