ΑΝΔΡΕΣΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Γνωσιακή προσέγγιση στα Μαθηματικά.

1. Εισαγωγή

Από την εποχή των Ελλήνων μαθηματικών της αρχαιότητας έως και σήμερα υπάρχει μια παραδοσιακή θεώρηση σχετικά με την διττότητα του ανθρώπινου νου και του ανθρώπινου σώματος, σύμφωνα με την οποία, ο ανθρώπινος νους θεωρείται ότι δεν έχει φυσική υπόσταση σε αντίθεση με το ανθρώπινο σώμα. Η θεώρηση αυτή χρονολογείται από τον **Πλάτωνα** και εκφράστηκε εμφατικά από τον **Καρτέσιο** (*Καρτεσιανός δυισμός*), τον 17ο αιώνα, ο οποίος υποστήριξε ότι ο ανθρώπινος νους είναι ανεξάρτητος και δεν επηρεάζεται από το τι συμβαίνει στο σώμα.

Σαν αποτέλεσμα της σημαντικής επιρροής της παραπάνω θεώρησης, ο κύριος όγκος, έως σήμερα, των θεωριών που αναπτύχθηκαν για την ερμηνεία της μαθηματικής γνώσης, πως δηλαδή αυτή συλλαμβάνεται, κατακτάται και εφαρμόζεται, δεν λαμβάνει υπόψη το βιολογικό και νευρολογικό ανθρώπινο σύστημα. Θεωρεί το άτομο επεξεργαστή πληροφοριών, και τον συλλογισμό ως χειρισμό αυθαίρετων συμβόλων κάνοντας χρήση συγκεκριμένων τυπικών κανόνων. Στον αντίποδα αναπτύσσεται όλο και περισσότερο η **ολιστική** θεώρηση η οποία αντιμετωπίζει τον άνθρωπο σαν μία αδιάσπαστη ενότητα του σώματος και της ψυχής. Ειδικότερα τα τελευταία χρόνια ερευνητές από διάφορους επιστημονικούς κλάδους (*γνωστική ψυχολογία*, *γλωσσολογία*, *νευροφυσιολογία* κ.α.) προσπαθούν να μελετήσουν την επίδραση που έχει το περιβάλλον και η βιολογική δομή του σώματος γενικά, αλλά και του εγκεφάλου ειδικότερα στην μαθηματική γνώση. Μια τέτοια προσπάθεια αναζήτησης της προέλευσης και της φύσης της μαθηματικής γνώσης βασισμένη στην θεωρία της ***ενσώματης γνωστικής λειτουργίας*** (**Embodied Cognition**), αναπτύχθηκε από τον γλωσσολόγο **G. Lakkof** και τον ψυχολόγο **R. Núñez** στα πλαίσια της ***γνωσιακής επιστήμης*** (**Cognitive Science**). Σε αυτήν την εργασία θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε τις απόψεις τους όπως αυτές εμφανίζονται στις εργασίες τους, ([1], [2], [3]), όπου υποστηρίζουν τη συνολική δουλειά τους που παρουσιάζεται στο βιβλίο τους: «*Where Mathematics Come From. How Embodied Mind brings Mathematics into being*» (Από πού προέρχονται τα μαθηματικά. Πώς ο ενσώματος νους δημιουργεί τα μαθηματικά) [6], καθώς και την αντιμετώπιση που είχε η εργασία αυτή από την μαθηματική κοινότητα.

2. Ενσώματη γνωστική λειτουργία .

Η ***Γνωσιακή Επιστήμη*** είναι η σύγχρονη, εμπειρικά βασιζόμενη προσπάθεια, να απαντηθούν τα καίρια επιστημολογικά ερωτήματα που αφορούν τη φύση, την ανάπτυξη και τη χρήση της γνώσης. Η θεμελίωσή της απαιτεί τη συνδρομή διαφορετικών επιστημών όπως η *φιλοσοφία*, η *γνωστική ψυχολογία*, η *πληροφορική*, η *γλωσσολογία* και οι *νευροεπιστήμες*. Στην προσπάθεια να αναζητηθεί η προέλευση και η φύση της γνώσης τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί, στα πλαίσια της γνωσιακής επιστήμης, η θεωρία της ***ενσώματης γνωστικής λειτουργίας.*** Η βασική αρχή που διέπει την θεωρία της ενσώματης γνωστικής λειτουργίας είναι ότι η φύση του ανθρώπινου νου καθορίζεται και δομείται από την μορφή την δράση και την φύση του ανθρωπίνου σώματος. Το αντιληπτικό μας σύστημα, οι δραστηριότητές μας και η διαδραστικότητα γενικότερα με το περιβάλλον σχηματίζουν τις ιδέες μας, τις σκέψεις μας και τις έννοιες που αντιλαμβανόμαστε, δηλαδή την ανθρώπινη λογική. Η αρχή αυτή είναι η αρχή του **ενσώματου νου** (**Embodied Mind**).

Η εργασία των Lakkof και Núñez, όπως ο Núñez [1] αναφέρει: «. *..εμπνευσμένη από τις θεωρητικές αρχές της ενσώματης γνώσης και χρησιμοποιώντας τεχνικές από την γνωστική γλωσσολογία προτείνει ότι οι ιδεατές αφηρημένες οντότητες* [των μαθηματικών] *δημιουργούνται από τον ευφάνταστο ανθρώπινο νου δια μέσου καθημερινών και σωματοποιημένων γνωσιακών μετασχηματισμών, όπως **εννοιολογικές μεταφορές** (conceptual metaphors), **εννοιολογικές μίξεις** (conceptual blends) ,κ.ά* ». Σύμφωνα με τα παραπάνω τα μαθηματικά δεν αποτελούν μέρος του φυσικού κόσμου και, σε αντίθεση με τις αρχές του *πλατωνισμού*, τα μαθηματικά δεν υπάρχουν «αντικειμενικά» πέρα από την ανθρώπινη ύπαρξη. Αυτό που διατείνονται ότι συμβαίνει είναι ότι τα μαθηματικά είναι ένα δημιούργημα, *και μόνο*, των εννοιολογικών συστημάτων που το ανθρώπινο σώμα και ο ανθρώπινος εγκέφαλος ενεργοποιούν. Επομένως καταλήγουν στο [2]: «*Τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο εγχείρημα. Χρησιμοποιούν εννοιολογικούς μηχανισμούς σκέψης όπως σε άλλα διανοητικά πεδία και κάνουν βέλτιστη χρήση των πεπερασμένων και περιορισμένων βιολογικών πόρων*».

3. Η Γνωσιακή Επιστήμη των Μαθηματικών

Ο ισχυρισμός των Lakkof και Núñez είναι ότι τα γνωσιακά θεμέλια των μαθηματικών μπορούν να βρεθούν κάνοντας μια λεπτομερή ανάλυση της συμπερασματικής οργάνωσης των μαθηματικών (θεωρημάτων, σχέσεων, ορισμών) στην βάση των παραπάνω εννοιολογικών μηχανισμών. Με οδηγό λοιπόν τα παραπάνω αναζητούν απαντήσεις σε ερωτήσεις όπως :

- Πώς οι εννοιολογικοί μηχανισμοί απεικονίζουν την συμπερασματική δομή των μαθηματικών;

- Πώς οι μαθηματικές ιδέες δίνουν την δυνατότητα να εκφραστούν απλές ιδέες (διαφορά, άρνηση, αναδρομή, μεταβολή) με ακριβείς μαθηματικούς όρους;
- Γιατί οι μαθηματικοί υπολογισμοί εννοούν αυτό που εννοούν και γιατί δουλεύουν;

Το σύνολο όλων των παραπάνω ερωτήσεων ισχυρίζονται ότι συνιστά ένα νέο πεδίο έρευνας, ένα νέο επιστημονικό κλάδο, που οι Lakkof και Núñez ονομάζουν **Γνωσιακή Επιστήμη των Μαθηματικών** (**Cognitive Science *of* Mathematics**). Στην εισαγωγή του βιβλίου τους διατυπώνουν, τρείς αφετηριακές προτάσεις – ισχυρισμούς για την γνωσιακή επιστήμη των μαθηματικών οι οποίες θεωρούνται ως ευρήματα από την γνωσιακή επιστήμη:

1. *Ο νους είναι ενσώματος*.
2. *Η σκέψη είναι κατά κύριο λόγο ασυνείδητη*. Δηλαδή η σκέψη του ανθρώπου και ειδικότερα η μαθηματική σκέψη υπάρχουν και λειτουργούν χωρίς την δυνατότητα για απευθείας ενδοσκόπησή τους.
3. *Τα αφηρημένα αντικείμενα κατανοούνται* ***μεταφορικά***. Δηλαδή ο άνθρωπος συλλαμβάνει τις αφηρημένες έννοιες με διακριτούς-συγκεκριμένους όρους χρησιμοποιώντας μεθόδους συλλογισμού που υπάρχουν στο αισθητικό-κινητικό σύστημα (sensorimotor system). Ο μηχανισμός αυτός με τον οποίο το αφηρημένο κατανοείται σε όρους διακριτούς-συγκεκριμένους καλείται **εννοιολογική μεταφορά** (conceptual metaphor).

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε επίσης και μια βασική παραδοχή που κάνουν και ισχυρίζονται ότι είναι εύρημα της γνωσιακής επιστήμης. Θεωρούν ότι η έννοια της απλής απαρίθμησης (**subitizing**) ενός πολύ μικρού συνόλου διακριτών οντοτήτων είναι έμφυτη στον άνθρωπο -όπως και σε μερικά ζώα με διαφορετική μορφή.

4. Εννοιολογική μεταφορά

Οι γνωσιακοί γλωσσολόγοι (**cognitive linguistics**), όπως είναι ο Lakkof, ισχυρίζονται ότι η πρόσβαση στο ασυνείδητο μπορεί να επιτευχθεί με την μελέτη της γλώσσας (τόσο στην σημερινή της μορφή, όσο και στην διάρκεια της ιστορίας κάθε γλώσσας), εξετάζοντας εμπειρικά κοινά στοιχεία σε διαφορετικές γλώσσες. Μάλιστα ο Lakkof έχει ανακαλύψει πολλές, κοινές σε διάφορες γλώσσες, μεταφορές (της μορφής : ΤΟ Α ΕΙΝΑΙ Β)[1] με τις οποίες γίνεται η κατανόηση μιας έννοιας, μέσω μίας εγγενούς αντίληψης ομοιότητας, με τους όρους κάποιας άλλης έννοιας. Για παράδειγμα μια τέτοια μεταφορά είναι

[1] Σύμφωνα με την γνωσιακή γλωσσολογία οι μεταφορές αναγράφονται με κεφαλαία γράμματα

η: Ο ΘΥΜΟΣ ΕΙΝΑΙ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΟ ΥΓΡΟ, μέσω της οποίας κατανοούμε ποιο είναι το κίνητρο για τις μεταφορικές εκφράσεις: *Βράζει* το αίμα του, κόντεψα να *σκάσω* απ' το κακό μου κ.ά. Άλλες επίσης κοινές μεταφορές είναι αυτές που παρουσιάζουν τον χρόνο σαν κατεύθυνση (μπρός – πίσω), την στοργή σαν θερμότητα, την διαφωνία σαν πόλεμο κ.τ.λ. Για τους Lakkof και Núñez, αυτές οι μεταφορές δεν είναι απλά γλωσσολογικό φαινόμενο αλλά μας δείχνουν τον τρόπο που σκεπτόμαστε. Μάλιστα ισχυρίζονται ότι: «*εκατοντάδες χιλιάδες μαθηματικές εκφράσεις μπορούν να εκφραστούν δια μέσου ενός σχετικά μικρού αριθμού εννοιολογικών μεταφορών*» [1]. Όσο δε, αφορά τα μαθηματικά : «*η αλήθεια τους βασίζεται στις λεπτομέρειες των υποκείμενων εννοιολογικών μεταφορών»* [1] και επίσης *«οι εννοιολογικές μεταφορές και οι εννοιολογικοί συνδυασμοί αποτελούν συστατικά των ιδεών των ανώτερων μαθηματικών»* [1].

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω τα μαθηματικά στηρίζονται στην εμπειρία που ενσωματώνεται και δομούνται μέσω των εννοιολογικών μεταφορών. Ως μεταφορές για τα μαθηματικά θεωρείται τόσο η αντιστοίχιση μαθηματικών εννοιών με οπτικοποιημένες καταστάσεις (θεώρηση της Αριθμητικής ως συλλογής αντικειμένων), όσο και επιχειρηματολογία για μια κατάσταση με επιχειρήματα από μια άλλη. Για παράδειγμα το να αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα αλγεβρικό με γεωμετρικούς όρους.

Πώς *ορίζουν* όμως την εννοιολογική μεταφορά; Την περιγράφουν ως έναν νευρολογικό μηχανισμό συνάρτησης (απεικόνισης) μεταξύ διαφορετικών εννοιολογικών πεδίων (**πηγαίο πεδίο- source domain** και **πεδίο στόχος-target domain**) που επιτρέπει την επιχειρηματολογία για τα θέματα του ενός με αξιοποίηση της συμπερασματικής δομής του άλλου. Μάλιστα την χαρακτηρίζουν στην εισαγωγή του βιβλίου τους : «*εγκαθιδρυμένη, με διατήρηση του συμπερασμού, αντιστοίχηση μεταξύ των πεδίων*» (grounded, inference-preserving, cross domain mapping).

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφερθούμε στην μεταφορά: Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ, θεωρώντας ως πηγαίο πεδίο την συλλογή αντικειμένων (φυσικός κόσμος-συγκεκριμένο), και ως πεδίο στόχο την Αριθμητική (αφηρημένο). Με βάση αυτήν γίνονται οι παρακάτω αντιστοιχίσεις:

Συλλογή αντικειμένων του ίδιου μεγέθους	→	Αριθμοί
Το μέγεθος της συλλογής	→	Το μέγεθος του αριθμού
Περισσότερο	→	Μεγαλύτερο
Λιγότερο	→	Μικρότερο
Η μικρότερη συλλογή	→	Η μονάδα
Τοποθέτηση δύο Συλλογών μαζί	→	Πρόσθεση, κ.ό.κ.

Οι υπόλοιπες τρείς μεταφορές που ισχυρίζονται ότι υπάρχουν για την αριθμητική είναι οι:

- Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (μια συλλογή από επτά αντικείμενα αποτελείται από μια συλλογή με τέσσερα αντικείμενα και από μια συλλογή με τρία αντικείμενα),
- Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙ (οι αριθμοί είναι σαν σημεία σε ένα μονοπάτι και οι αριθμητικές πράξεις είναι κινήσεις κατά μήκος αυτού του μονοπατιού), και τέλος η:
- Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ (κάθε αριθμός θεωρείται ως τμήμα που αποτελείται από ξεχωριστά τμήματα μοναδιαίου μεγέθους.

Με την μίξη (**blending**) ή την επέκταση (**stretching)** των παραπάνω μεταφορών μπορούν να δημιουργηθούν και τα υπόλοιπα είδη αριθμών.

Τέλος σημαντικό ρόλο στην θεωρία των Lakkof και Núñez παίζουν οι συνδετικές μεταφορές (**linking metaphors**), στις οποίες τόσο το πηγαίο πεδίο όσο και πεδίο στόχος ανήκουν στις μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα η μεταφορά: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΖΕΥΓΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ή η μεταφορά: ΟΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ (ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ) ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ ΣΗΜΕΙΩΝ. Μια συνδετική μεταφορά είναι και η πιο ενδιαφέρουσα αλλά και αμφιλεγόμενη μεταφορά που παρουσιάζουν οι Lakkof και Núñez, η βασική μεταφορά του απείρου (Basic Metaphor of infinity – B.M.I.) που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Την ανάλυση των μαθηματικών εννοιών στην βάση των μεταφορών την ονομάζουν **Mathematical Idea Analysis (Ανάλυση Μαθηματικών ιδεών)** και ισχυρίζονται ότι «*...η λεπτομερής ανάλυση της συμπερασματικής οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών, θεωρημάτων, ορισμών και αξιωμάτων (Mathematical Idea Analysis) παρέχει τα γνωσιακά θεμέλια των ίδιων των μαθηματικών*»[3]. Ακόμη στηρίζουν την άποψη τους (στο [3]) ότι οι έννοιες των μαθηματικών είναι όντως μεταφορικές και όχι απλά γλωσσολογικές (χωρίς δηλαδή πραγματικό σημασιολογικό περιεχόμενο), στο γεγονός ότι πολλές μαθηματικές έννοιες (όπως το όριο στην συνέχεια κ.ά.) ενώ ορίζονται με στατικούς όρους (εψιλοντικός ορισμός) εκφράζονται στην πράξη με δυναμική γλώσσα (το χ τείνει στο χ_0). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργείται η ψυχολογική πραγματικότητα ώστε να αποκτήσουν νόημα οι μεταφορές που επικαλούνται. Μάλιστα δε προς επικύρωση αυτού ο Núñez[3], επικαλείται στοιχεία από την ψυχογλωσσολογία όπου κινήσεις και χειρονομίες του ανθρωπίνου σώματος επιβεβαιώνουν την άποψη ότι οι μεταφορές βασίζονται στην δυναμική γλώσσα και αποτελούν συστατικό στοιχείο της συμπερασματικής οργάνωσης των μαθηματικών ιδεών.

5. Η Βασική μεταφορά του απείρου

Κύριο μέρος του βιβλίου τους αλλά και των εργασιών τους καταλαμβάνει η κατανόηση της έννοιας του άπειρου μέσω της μεταφοράς και πιο συγκεκριμένα η έννοια του **ενεστωτικού άπειρου** (**actual infinity**). Το **δυναμικό άπειρο (potential infinity)** είναι το άπειρο το οποίο το *κατανοούμε* ως δίχως τέλος, ενώ το ενεστωτικό άπειρο είναι το άπειρο που το *κατανοούμε* ως «ολοκληρωμένη οντότητα». Για παράδειγμα, το να πούμε ότι έχουμε την αρίθμηση 1,2,3,….. και συνεχίζουμε χωρίς να σταματήσουμε, αποτελεί την περίπτωση του δυναμικού άπειρου, ενώ αν μιλήσουμε για το σύνολο ***όλων*** των φυσικών αριθμών αποτελεί την περίπτωση του ενεστωτικού άπειρου, καθώς θεωρούμε σαν να έχουμε απαριθμήσει όλους τους φυσικούς αριθμούς. Σύμφωνα με τους Lakkof και Núñez [1], η ιδέα του ενεστωτικού άπειρου στα μαθηματικά είναι μεταφορική - και όχι εγκαθιδρυμένη στον ανθρώπινο νου- καθώς ο ίδιος ο ανθρώπινος μηχανισμός μεταφορών μας επιτρέπει να αντιληφθούμε και να «κατασκευάσουμε» το «αποτέλεσμα» μίας χωρίς τέλος διαδικασίας (δυναμικό άπειρο -πεδίο στόχος) με τους όρους της μοναδικού τρόπου που έχουμε –ως πεπερασμένα όντα– για να αντιλαμβανόμαστε καταστάσεις, δηλαδή της διαδικασίας που έχει τέλος (πεπερασμένη διαδικασία - πεδίο πηγή).

Αυτήν την μεταφορά την καλούν **ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ (Basic Metaphor of Infinity – B.M.I.)**. Το επακόλουθο της μεταφοράς αυτής είναι να «επιβάλλει» - απροσδόκητα- στο πεδίο στόχο, την ολοκλήρωση της διαδικασίας και ένα, μοναδικό, τελικό στάδιο. Για παράδειγμα στην περίπτωση του συνόλου των φυσικών αριθμών κάθε "νέος" φυσικός αριθμός παράγεται από το σύνολο των προηγούμενων φυσικών αριθμών και δημιουργείται ένα καινούριο σύνολο που περιέχει όλους του προηγούμενους φυσικούς αριθμούς καθώς και τον "νέο" φυσικό αριθμό. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επαναληπτικά και έτσι μέσω της BMI στο προκύπτων «τελικό» στάδιο αντιλαμβανόμαστε το σύνολο *όλων* των φυσικών αριθμών.

Έτσι λοιπόν υποθέτουν στο [1] ότι: «*όλες οι περιπτώσεις ενεστωτικού απείρου που εμφανίζονται στα μαθηματικά (απειροσύνολα αριθμών, άπειρα όρια, άπειρες σειρές, άπειρες τομές κ.ά.) είναι ειδικές περιπτώσεις μιας γενικότερης εννοιολογικής μεταφοράς* (της BMI) *με την οποία διαδικασίες που δεν έχουν τέλος τις αντιλαμβανόμαστε σαν να έχουν ένα τέλος και ένα τελικό στάδιο – αποτέλεσμα.*».

Ισχυρίζονται δε ακόμη ότι η BMI παίζει τον αντίστοιχο ρόλο που έχουν τα αξιώματα του απείρου σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, με την σημαντική διαφορά ότι τα αξιώματα είναι «μαθηματικές κατασκευές» για την εξήγηση του απείρου ενώ η BMI είναι αποτέλεσμα των ευρημάτων της γνωσιακής επιστήμης. Αποτελεί δε «*έναν απλό ανθρώπινο καθημερινό εννοιολογικό μηχανισμό που είναι υπεύθυνος για την δημιουργία όλων των ενεστωτικών απείρων που εμφανίζονται στα μαθηματικά*».[2]

Θεωρούν επομένως ότι η εφαρμογή της BMI ότι μπορεί να γίνει σε πάρα πολλές περιπτώσεις και ανάλογα με την παραμετροποίηση που της κάνουμε παίρνουμε διαφορετικά αποτελέσματα. Έτσι τα φαινομενικά παράδοξα που εμφανίζονται στα μαθηματικά, εμφανίζονται γιατί ακριβώς δεν έγινε σωστή εφαρμογή της BMI, με την έννοια ότι στην εφαρμογή της δεν ληφθήκαν υπόψη παράμετροι οι οποίοι δεν θα δημιουργούσαν το φαινομενικό παράδοξο. Μια ανάλυση ενός τέτοιου παραδόξου γίνεται στο [1].

Αρκετά ενδιαφέρουσα είναι και η ανάλυση που κάνει ο Nunez στο [2] όπου προσπαθεί να εξηγήσει πώς συνειδητοποίησε ο Cantor κάνοντας χρήση της BMI τους υπερπεπερασμένους αριθμούς βάσει των οποίων προκύπτουν μη διαισθητικά αποτελέσματα, καθώς και τα γνωστά παράδοξα που συγκλόνισαν τα θεμέλια των μαθηματικών στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Στην ανάλυσή του αυτή προσπαθεί να εξηγήσει το (γνωσιακό) υπόβαθρο που κρύβεται πίσω από αυτά. Παρουσιάζει την BMI σαν μια **εννοιολογική μίξη (conceptual blend)** όπου η μίξη των δυο εισαγόμενων χώρων (input spaces), δηλαδή της πεπερασμένης διαδικασίας και του δυναμικού απείρου προβάλλεται στον χώρο μίξης (blended space) που είναι το ενεστωτικό άπειρο. Ισχυρίζεται ακόμη ότι το λάθος στην σύλληψη του Cantor οφείλεται στην λανθασμένη (για τα άπειρα σύνολα) μεταφορά που θεώρησε, βάσει της οποίας το να βάλουμε τα στοιχεία δύο συνόλων σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία μας δείχνει ότι έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (την ονομάζουν SAME NUMBER AS IS PAIRABILITY). Αυτά τα δυο πράγματα είναι τελείως διαφορετικά και ισχύουν μόνο σε πεπερασμένα σύνολα. Επίσης δείχνει ότι οι γνωστές αποδείξεις περί αριθμησιμότητας των φυσικών και των ρητών, και της μη αριθμησιμότητας των πραγματικών είναι ουσιαστικά κάθε μια από αυτές επαναληπτική εφαρμογή της BMI.

Τέλος στο βιβλίο τους [6] γίνεται μια αμφιλεγόμενη και αρκετά σχολιασμένη εφαρμογή της BMI για τα απειροστά. Θεωρούν ότι η εφαρμογή της BMI επαναληπτικά δίνει την ύπαρξη αριθμών μικρότερων από 1 , 1/2 , 1/3 ,…, και ισχυρίζονται ότι το αφηρημένο προκύπτων τελικό στάδιο ορίζει το απειροστό Δx.

6. Αντιδράσεις και απόψεις της μαθηματικής κοινότητας

Η εργασία των Lakkof και Núñez τροφοδότησε αρκετές συζητήσεις στον χώρο της Μαθηματικής κοινότητας, με ευρεία ποικιλία αντιδράσεων. Η δουλειά τους χαρακτηρίστηκε από εξαίσια και πρωτοπόρα [5] έως απογοητευτική και γεμάτη λάθη [10]. Κοινός τόπος όμως όλων ήταν ότι δημιουργούν έναν νέο επιστημονικό κλάδο, στα αποτελέσματά του οποίου αξίζει κανείς να σταθεί.

Η αντίδραση στην εργασία των Lakkof και Nunez μπορούμε να πούμε ότι κατά βάση πηγάζει από τους παρακάτω λόγους:

α) Το γεγονός ότι κανένας εκ των δύο δεν είναι μαθηματικός, κάτι που ενόχλησε τους «καθαρούς» μαθηματικούς καθώς θεώρησαν ότι οι Lakkof και Núñez δεν αντιμετώπισαν το θέμα με το βλέμμα του επιστήμονα που ασχολείται με τον χώρο [9]. Αυτό συνδυάζεται με την «επιθετικότητα» των συγγραφέων προς την σημερινή μορφή των μαθηματικών και κατ΄ επέκταση αυτών που την προάγουν. Στην εισαγωγή του βιβλίου τους (σελίδα 7) αναφέρουν «*η γνωσιακή επιστήμη των μαθηματικών κάνει ερωτήσεις που τα μαθηματικά δεν ρωτούν και δεν μπορούν να ρωτήσουν για τον εαυτό τους*». Ο Henderson [9] θεωρεί αυτό που αναφέρουν ότι δεν ισχύει και είναι παρανόηση όσων δεν ανήκουν στην μαθηματική κοινότητα. Τεκμηριώνει την άποψή του αναφέροντας μαθηματικούς που έχουν προσπαθήσει να κάνουν οι ίδιοι ενδοσκόπηση στην επιστήμη τους, μεταξύ των οποίων και ο «πατέρας του φορμαλισμού» David Hilbert.

β) Η έλλειψη πειστηρίων για όσα ισχυρίζονται και η έννοια της μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα ο Madden [8] αναφέρει πως θα μπορούσαν να υπάρχουν περισσότερα αποδεικτικά στοιχεία για τον ισχυρισμό τους πως η μαθηματική γνώση βασίζεται στην μεταφορά (προτείνοντας μάλιστα που μπορούν να κοιτάξουν ώστε να βρουν τέτοια αποδεικτικά στοιχεία). Ο Madden μάλιστα πιστεύει πώς και η έννοια της μεταφοράς δεν είναι επακριβώς οριζόμενη αλλά και ότι η έννοιά της αλλοιώνεται και εκτείνεται μέσα από τα πολλά παραδείγματα του βιβλίου. Όπως αναφέρει: «*αυτό που θα έπρεπε να συμβαίνει είναι να υπάρχει ένας πιο συγκεκριμένος και σαφής ορισμός έτσι ώστε άνθρωποι που εργάζονται ξεχωριστά και χωρίς να συμβουλεύονται ό ένας τον άλλον να μπορούν να ανακαλύψουν τις ίδιες μεταφορές και να συμφωνήσουν στις διεργασίες που αυτές ασκούν*». Οι Gold [7] και Henderson [9] αμφισβητούν τον ορισμό και την χρησιμότητα της BMI. Μάλιστα ο Henderson αναφέρει αντιπαραδείγματα για τον ισχυρισμό των Lakkof και Núñez ότι όλες οι περιπτώσεις ενεστωτικού απείρου είναι ειδικές περιπτώσεις της BMI. Τέλος ο Auslander [11] θεωρεί πως οι μεταφορές δεν έχουν ρόλο στον σχηματισμό των ανώτερων μαθηματικών και περιορίζονται μόνο στην αντίληψη των στοιχειωδών μαθηματικών.

γ) Τα μαθηματικά λάθη που υπάρχουν στο βιβλίο. Συγκεκριμένα η Gold [7] αναφέρει τέτοια λάθη που έχει βρει στο βιβλίο τους όπως για παράδειγμα στον «ορισμό» του απειροστού. Στην απάντησή τους οι συγγραφείς όντως παραδέχονται κάποια λάθη αν και τα περισσότερα όπως ισχυρίζονται οφείλονται στον εκδότη. Σε νοητικά και γραπτά λάθη αναφέρεται και ο Auslander [11]

δ) Η φιλοσοφική άποψη του εγχειρήματος. Οι Lakkof και Núñez ξεκινούν το βιβλίο τους ξεκαθαρίζοντας την θέση τους επιτιθέμενοι στον Πλατωνισμό (Πρόλογος σελ xv), και διατείνοντας πως η εργασία τους αποκαθηλώνει όλες αυτές τις πεποιθήσεις (Πρόλογος σελ xvi) που οι ίδιοι αποκαλούν «Ρομαντισμό των Μαθηματικών». Έτσι ισχυρίζονται (Εισαγωγή σελ. 9) πώς τα αποτελέσματα της ερευνάς τους δεν είναι συμβατά με τον Πλατωνισμό, τον ιντουισιονισμό και τον φορμαλισμό, αλλά ούτε και με την άποψη που θεωρεί τα μαθηματικά ως κοινωνική κατασκευή (**sociologism**-κοινωνιολογισμός). Πιστεύουν πώς η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών προσδιορίζει μια νέα εμπειρική φιλοσοφία των μαθηματικών. Τα ενσώματα μαθηματικά είναι τα μόνα μαθηματικά που ο άνθρωπος γνωρίζει ή μπορεί να γνωρίσει. Και έτσι στην ερώτηση «*Από πού προέρχονται τα Μαθηματικά;*», απαντούν: «*Έρχονται από μας! Τα κατασκευάζουμε αλλά δεν είναι αυθαίρετα ούτε απλά μια ιστορικά συμπτωματική κοινωνική κατασκευή*» (Εισαγωγή σελ. 9).

Ειδικά για το κομμάτι, της φιλοσοφικής βάσης των ιδεών των Lakkof και Núñez, οι αντιδράσεις ήταν αρκετές. Για παράδειγμα ο Voorhees [10] κατηγορεί τους συγγραφείς για την επίθεσή τους στον Πλατωνισμό, ο Henderson [9] θεωρεί πώς ανεξάρτητα της φιλοσοφικής θέσης κάθε μαθηματικού όλοι θα καλωσόριζαν τα «εννοιολογικά θεμέλια» των μαθηματικών, όπως προσπαθεί να κάνει η Mathematical Idea Analysis, αλλά για να γίνει αυτό χρειάζονται να δουλέψουν οι μαθηματικοί *μαζί* με τους γνωσιακούς επιστήμονες. Επίσης ο Madden [8] θεωρεί πως η φιλοσοφική θέση που προβάλλουν οι Lakkof και Núñez δεν βασίζεται σε στοιχεία που μπορούν να αποδείξουν την ορθότητά της. Αλλά ακόμη και αν βρεθούν αυτές οι ενδείξεις τότε η φιλοσοφία αυτή δεν μπορεί να απαξιώσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθηματικοί δημιουργούν και διαμοιράζονται την γνώση, και ο οποίος βασίζεται στην ανταλλαγή σκέψεων, στην χρήση της λογικής και αλλά και στην συμβατική αυστηρότητα της γλώσσας τους.

Αρκετά ενδιαφέρουσα είναι όμως και η παρέμβαση του Heintz [4] που χωρίς να απορρίψει τις ιδέες των γνωσιακών θεμελίων των μαθηματικών, θεωρεί πως τα μαθηματικά αποτελούν ταυτόχρονα και προϊόν του νου αλλά και πολιτισμικό και κοινωνικό προϊόν.

7. Η κοινωνιολογική προσέγγιση των μαθηματικών ως αρωγός της γνωσιακής.

Κατά τον Heintz [4] τα μαθηματικά – στο σύνολό τους – δεν αποτελούν ένα προϊόν κάποιας «διανοητικής διάταξης» αλλά είναι προϊόν κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Την άποψη του την στηρίζει με τα εξής επιχειρήματα.

α) Τα μαθηματικά είναι βασισμένα σε ισχυρισμούς και αποδείξεις, και η επιλογή των ποιών από αυτούς τους ισχυρισμούς αξίζει να εισέλθουν στο σώμα των μαθηματικών αποτελεί συλλογική απόφαση καθώς αυτό κρίνεται από την μαθηματική κοινότητα.

β) Τα μαθηματικά παρότι παράγονται από μεμονωμένους ανθρώπους είναι κατά βάση ομαδική εργασία γιατί διέπονται από κανόνες και μόνο μια συλλογική εργασία μπορεί να θέσει κανόνες για το καλό, το κακό, το αληθές, και το ψευδές.

γ) Η γνώση γενικότερα δεν είναι αποτέλεσμα μόνο κάποιας αυτόνομης λειτουργικής μονάδας όπως ο εγκέφαλος αλλά ενός συνόλου λειτουργιών που οδηγούν σε μια συμπεριφορά που επιτρέπει, σε συγκεκριμένες συνθήκες, την παραγωγή μιας συγκεκριμένης γνώσης. Δηλαδή η γνώση σχετίζεται άμεσα με τις κοινωνικές συνθήκες που επικρατούν την συγκεκριμένη στιγμή που παράγεται και άρα καθοδηγείται από αυτές.

Επομένως όπως αναφέρει τα μαθηματικά αποτελούν «*το αρχέτυπο του κανονιστικού συστήματος για την κρίση της διανοητικής παραγωγής*», και σε αυτήν την βάση η γνωσιακή θεμελίωση των μαθηματικών δεν απορρίπτεται καθώς «η διαδικασία με την οποία κατακτάται η γνώση (cognition) είναι η ουσιαστική αιτία για την παραγωγή των μαθηματικών»

8. Συμπεράσματα

Η θεμελίωση της γνωσιακής προσέγγισης των μαθηματικών όπως αυτή αναδείχθηκε μέσα από τις εργασίες των Lakkof και Núñez είναι πάρα πολύ ενδιαφέρουσα και εν δυνάμει πολύ γόνιμη, τόσο για την φιλοσοφία των μαθηματικών, όσο *και για την διδακτική τους.* Σίγουρα η γνωσιακή επιστήμη ανοίγει νέους δρόμους και δείχνει πού πρέπει να ψάξουν οι επιστήμονες ώστε να ανακαλυφθεί η φύση των μαθηματικών, κάνοντας χρήση όλων των εργαλείων που προσφέρουν οι επιστήμες του 21ου αιώνα. Παρόλα οι Lakkof και Núñez δεν καταφέρνουν με επιτυχία να **πείσουν** (τουλάχιστον εμένα) ότι:

*α) Η προσέγγιση τους δίνει μια **πλήρη** απάντηση στις ερωτήσεις της φιλοσοφίας των μαθηματικών, και*

*β) Η προσέγγιση τους και **μόνο αυτή** μπορεί να δώσει αυτές τις απαντήσεις.*

Μέσα από τις εργασίες των Lakkof και Núñez προκύπτουν κάποια ερωτήματα στα οποία δεν κατάφερα να βρω, *αν και ενδεχομένως να δόθηκαν*, ικανοποιητικές απαντήσεις. Τα σημαντικότερα είναι τα εξής:

α) Πώς εξηγείται η θεώρηση μιας έμφυτης αριθμητικής αντίληψης (subitizing); Και αυτή η θεώρηση δεν έρχεται σε αντίθεση με την αποστροφή των συγγραφέων (και ενδεχομένως του μεγαλύτερου συνόλου της μαθηματικής κοινότητας) ως προς τον πλατωνισμό;

β) Πως εξηγείται η εφαρμοσιμότητα μαθηματικών σχέσεων σε τομείς που ανακαλύφθηκαν μεταγενέστερα;

γ) Πώς μπορεί να αποδειχτεί **πειραματικά** *όπως ισχυρίζονται* οι συγγραφείς στο [2] ότι οι γνωσιακοί μηχανισμοί είναι από μόνοι τους η αφετηρία των μαθηματικών;

δ) Εφόσον οι γνωσιακοί μηχανισμοί είναι ασυνείδητοι δεν θα έπρεπε οι μαθηματικές σχέσεις να είναι σε απόλυτη συμφωνία με την διαίσθηση μας; Όπως είναι γνωστό κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει πάντα στα μαθηματικά. Ακόμη ποιοι γνωσιακοί μηχανισμοί βοήθησαν τούς Lakkof και Núñez να εντοπίσουν την λάθος αντίληψη του Cantor στο [2] για το άπειρο και γιατί αυτοί δεν λειτούργησαν στον ίδιο τον Cantor;

ε) Ο εγκέφαλος δεν είναι και ο ίδιος μέρος της φύσης, εκτός από παρατηρητής της; Συνεπώς οι μεταφορές που «κατασκευάζει» δεν επηρεάζονται από το περιβάλλον (φυσικό και κοινωνικό) στο οποίο λειτουργεί; Επομένως πώς γίνεται οι μεταφορές να είναι «κοινές» για όλους τους ανθρώπους; Η διάδραση (σύλληψη μιας έννοιας – αντίληψη κάποιου λάθους– διόρθωση κ.ο.κ.) των μαθηματικών με τον ίδιο τον εαυτό τους αλλά και με την μαθηματική κοινότητα πως συμβαδίζει με την έννοια των κοινών για όλους τους ανθρώπους μεταφορών;

Και το κατά την άποψη μου βασικότερο ερώτημα που δεν απαντούν οι συγγραφείς είναι το τι ρόλο παίζει η κοινωνιολογική υποδομή πάνω στην οποία δημιουργούνται τα μαθηματικά από τον ανθρώπινο εγκέφαλο Είναι δηλαδή τυχαίο το γεγονός ότι η γεωμετρία ανακαλύφθηκε στην Αίγυπτο; Ότι η απόδειξη και η αξιωματική μέθοδος είναι δημιουργήματα των Αρχαίων Ελλήνων; Ότι βασικές αλγεβρικές μέθοδοι έχουν τις ρίζες τους στους Βαβυλωνίους; Μάλλον όχι.

Τα μαθηματικά είναι βέβαιο ότι προέρχονται από *εμάς*. Όπως αποδεικνύεται μέσα από την γνωσιακή επιστήμη προέρχονται από τον εγκέφαλό μας. Η γνωσιακή επιστήμη δείχνει λοιπόν ***από πού*** προέρχονται τα μαθηματικά. Οι Lakkof και Núñez προσπάθησαν να εξηγήσουν το ***πώς***. Μήπως όμως η εξήγηση του ***πώς*** παράγονται τα μαθηματικά σχετίζεται και με το ***τι*** μαθηματικά θα παραχθούν; Και το τελευταίο μήπως το καθορίζουν οι φυσικές οι κοινωνικές συνθήκες και οι πολιτισμικές συνθήκες; Ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει άμεση σχέση με το σώμα μας και αυτό με την σειρά του έχει άμεση σχέση με την φύση και την κοινωνία. Ίσως τελικά η λύση στην προσπάθεια της προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης να βρίσκεται στην συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι: **όλα σχετίζονται με όλα.**

Βιβλιογραφία

[1]. Rafael Núñez and George Lakoff, The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metaphor, Handbook of Mathematical Cognition New York: Psychology Press J. Campbell.

[2]. Rafael E. Núñez, Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination.

[3]. Rafael E. Núñez, Embodied Cognition and The Nature of Mathematics

[4]. Christophe Heintz, Psychologism and the cognitive foundations of mathematics.

[5]. Reviews and criticisms about the book Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez.

[6]. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez
Ο πρόλογος και η εισαγωγή του βιβλίου αντλήθηκαν από την διεύθυνση *http://www.cogsci.ucsd.edu/~Núñez/web/publications.html#articles.*

[7]. B. Gold, Review about the book Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez (*http://www.maa.org/reviws/wheremath.htm.l*

[8]. J, Madden, Review about the book Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez , Notices of The AMS, Volume 48, Number 10.

[9]. D.W. Henderson, Review about the book Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez ,Mathematical Intelligencer, Volume 24, Number 1.

[10]. B. Voorhees, Embodied Mathematics, Comments on Lakkof and Núñez, Journal of Consciousnes studies, 11, No 9.

[11]. J.Auslander, Review about the book Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being by George Lakoff and Rafael E. Núñez ,American Scientist, scientist's Bookshelf.