ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\alpha^0 = 1$ $(\alpha\neq 0)$, $\dfrac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$ $(\alpha\neq 0)$

$(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$, $\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = (\alpha\cdot\beta)^\kappa$, $\dfrac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} = (\dfrac{\alpha}{\beta})^\kappa$ $(\beta\neq 0)$,

Για τα παραπάνω : α,β θετικοί πραγματικοί και κ, $\lambda \in \Re$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2+\beta^2\pm 2\alpha\cdot\beta$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

$(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm 3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2\pm\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2)$

$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\gamma+2\beta\cdot\gamma$

$(x+\alpha)\cdot(x+\beta) = x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta$

$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]}$

αν $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma}$

$\alpha^\nu-\beta^\nu = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$, $\nu\in\aleph^*$

αν ν περιττός ακέραιος τότε

$\alpha^\nu+\beta^\nu = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Ορισμός $|a| = \begin{cases} a, & a\geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$

Ιδιότητες

$|\alpha|\geq 0$, $|\alpha|\geq\alpha$, $|\alpha|\geq-\alpha$, $|\alpha|^2=\alpha^2$

αν θ>0 τότε $|x|=\theta \Rightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$

$|x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$,

$|x|\geq\theta \Leftrightarrow x\geq\theta$ ή $x\leq-\theta$

$|x|=|\alpha| \Rightarrow x=\alpha$ ή $x=-\alpha$

$|\alpha|\,|\beta| = |\alpha\cdot\beta|$, $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$ $(\beta\neq 0)$

$||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha\pm\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ *(τριγωνική ανισότητα)*

ΡΙΖΕΣ

Αν $\alpha\geq 0$ *τότε η* $\sqrt[\nu]{a}$ *είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης* $x^\nu=\alpha$ *και ισχύουν :*

$\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$, αν $\alpha\in\Re$ τότε $\sqrt{a^2}=|a|$

αν $\alpha, \beta\geq 0$ *και* $\mu, \nu, \kappa, \rho \in\aleph^*$ *τότε*

$(\sqrt[\nu]{a})^\nu=\alpha$, $\sqrt[\nu]{a^\nu}=a$,

$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\nu\rho}}=\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$

$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $(\beta\neq 0)$

$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa$, $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$

αν $\alpha\geq\beta\geq 0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}\geq\sqrt[\nu]{\beta}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Άν $\alpha>0$ και $\mu\in\aleph$ και $\nu\in\aleph^*$ τότε

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β ΒΑΘΜΟΥ $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma=0$

Διακρίνουσα $\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma}$

Αν $\Delta>0$ έχει 2 ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν $\Delta=0$ έχει 1 διπλή ρίζα την $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$

Αν $\Delta<0$ είναι αδύνατη στο $\Re$

Άθροισμα ριζών $S=x_1+x_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}$

Γινόμενο ριζών $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ και

Άν x_1, x_2 είναι ρίζες μιας εξίσωσης με άθροισμα S και γινόμενο P τότε αυτή είναι η $x^2-Sx+P=0$

ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ $\varphi(x)=\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma$

Αν $\Delta>0$ τότε $\varphi(x)=\alpha(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

Αν $\Delta=0$ τότε $\varphi(x)=\alpha\,(x+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$

Αν $\Delta<0$ τότε $\varphi(x)=\alpha\,[(x+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2+\dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}]$

Πρόσημο τριωνύμου

- Αν $\Delta>0$ τότε το φ(x) είναι εντός των ριζών ετερόσημο του α
- Αν $\Delta=0$ τότε το φ(x) είναι παντού ομόσημο του α εκτός για $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ που είναι $\varphi(x)=0$
- Αν $\Delta<0$ τότε το φ(x) είναι παντού ομόσημο του α

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός $\alpha^x=\theta \Leftrightarrow \log_a\theta=x$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, $\theta>0$

Δεκαδικός λογάριθμος $\log\theta=x \Leftrightarrow 10^x=\theta$

Νεπέρειος λογάριθμος $\ln\theta=x \Leftrightarrow e^x=\theta$

Ιδιότητες $\alpha^{\log_a\theta}=\alpha$, $\log_a a^x=x$, $\log_a a=1$,

$\log_a 1=0$ $\ln 1=0$, $\ln e=1$, $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$

Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ τότε για θ_1, $\theta_2>0$ και $\kappa\in\Re$ τότε

$\log_a(\theta_1\theta_2)=\log_a\theta_1+\log_a\theta_2$

$\log_a\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log_a\theta_1-\log_a\theta_2$, $\log_a\theta^\kappa=\kappa\log_a\theta$

Αν α , β ,θ > 0 με α , β ≠ 1 τότε $\log_a\theta=\dfrac{\log_\beta\theta}{\log_\beta a}$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2Χ2

Το σύστημα

$\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{cases}$ με : $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}=\alpha\cdot\beta_1-\beta\cdot\alpha_1$

$D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}$ $D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$

- Αν $D\neq 0$ τότε μοναδική λύση η $x=Dx/D$, $y=D_y/D$
- Αν $D=0$ και ($D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$) είναι αδύνατο
- Αν $D=D_x=D_y=0$ έχει άπειρες λύσεις εκτός αν $\alpha=\alpha_1=\beta=\beta_1=0$ και $\gamma_1\neq 0$ ή $\gamma_2\neq 0$ οπότε αδύνατο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$f(x) = \eta\mu x$, $A = R$, $-1 \le \eta\mu x \le 1$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $A = R$, $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$

$f(x) = \varepsilon\varphi x$, $A = R - \{ \chi \in \Re \, / \, x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\}$

$f(x) = \sigma\varphi x$, $A = R - \{ \chi \in \Re \, / \, x = \kappa\pi , \kappa \in Z\}$

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$,

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} , \quad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

x	ημx	συνx	εφx	σφx
0	0	1	0	-----
π/6	½	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
π/3	$\sqrt{3}/2$	½	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
π/2	1	0	------	0

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1Ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ημ(-x) = –ημx	ημ(π–x)= ημx	ημ(π+x)= – ημx
συν(-x) = συνx	συν(π–x) =–συνx	συν(π+x) =– συνx
εφ(-x) = – εφx	εφ(π–x) = –εφx	εφ(π+x) = εφx
σφ(-x) = – σφx	σφ(π–x) = –σφx	σφ(π+x) = σφx

και $\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x) = \eta\mu x$

$\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \sigma\varphi x$, $\sigma\varphi(\frac{\pi}{2} - x) = \varepsilon\varphi x$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \eta \qquad\qquad ,k \in Z \\ \chi = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \eta \qquad\qquad ,k \in Z \\ \chi = 2k\pi - \theta \end{cases}$$

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta , \kappa \in Z$, $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta , \kappa \in Z$

ΤΥΠΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} \qquad \varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

$\eta\mu 2\alpha = 2\, \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} , \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} , \quad \eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ $\nu \in N^*$, *ν-ός όρος* $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$

Άθροισμα ν πρώτων όρων : $S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) = \frac{\nu}{2}[2a_1 + (\nu-1)\omega]$

Αριθμητικός μέσος : $2 \cdot \beta = \alpha + \gamma$, α,β,γ διαδοχικοί όροι ΑΠ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

$\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu$ $\nu \in N^*$, ($\lambda \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$)

ν-ός όρος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, ($\lambda \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$)

Άθροισμα ν πρώτων όρων : $S_\nu = a_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$ ενώ

$S_\nu = \lambda\alpha_1$, αν $\lambda = 1$

Γεωμετρικός μέσος : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, α,β,γ διαδοχικοί οροι ΓΠ

Άθροισμα των απείρων όρων ΓΠ Αν $|\lambda| < 1$ *τότε* $S = \frac{a_1}{1-\lambda}$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$ και $x^\nu = \alpha^\nu$, $x \in \Re$ και $\nu \in N^*$

$\alpha \ge 0$, ν περιττός $x^\nu = \alpha \Rightarrow$ 1 λύση $x = \sqrt[\nu]{a}$

$\alpha \ge 0$, ν άρτιος $x^\nu = \alpha \Rightarrow$ 2 λύσεις $x = \pm \sqrt[\nu]{a}$

$\alpha < 0$, ν περιττός $x^\nu = \alpha \Rightarrow$ 1 λύση $x = \sqrt[\nu]{|a|}$

$\alpha < 0$, ν άρτιος $x^\nu = \alpha \Rightarrow$ αδύνατη

Αν ν περιττός τότε $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha$

Αν ν άρτιος τότε $x^\nu = \alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΔΡΕΣΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ