

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ-1

(ΜΟΝΑΔΕΣ 60)

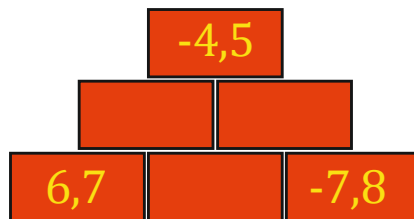
ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί

$$A = \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ και } B = \frac{3}{4} - \frac{-3}{-4} \cdot \frac{7}{6} \text{ είναι αντίστροφοι.}$$

(Μονάδες 5)

(β) **Αριθμότοιχος:** Αν κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται κάτω του, να συμπληρώσετε τον αριθμότοιχο.



(Μονάδες 5)

(γ) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση

$$A = (x - y)(x + 2y) + (x + y)^2 + (x - 2y)^2 - 5xy$$

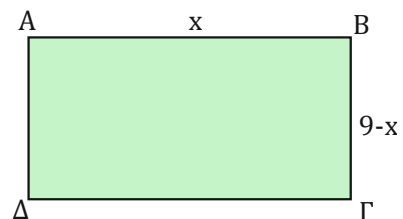
Να αποδείξετε ότι η παραπάνω αλγεβρική παράσταση είναι τέλειο τετράγωνο ενός πολυωνύμου πρώτου βαθμού.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με διαστάσεις x και 9-x, όπου $0 < x < 9$ και $9-x < x$.

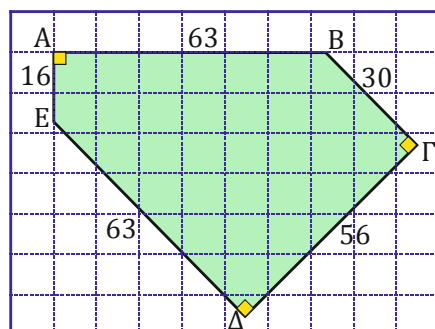
Ο Γιάννης θέλει να χωρίσει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σε δύο τετράγωνα. Προσπάθησε να το πετύχει δίνοντας τυχαίες τιμές στο x αλλά δεν τα κατάφερε. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να το κάνει ; (Μονάδες 5)



B. Δίνεται το σχέδιο ενός οικοπέδου.

(α) Να βρείτε το εμβαδόν του αν οι διαστάσεις δίνονται σε μέτρα. (5 μονάδες)

(β) Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου αν το μήκος AB στο σχέδιο είναι 63 χιλιοστά. (5 μονάδες)



ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διπλανό τραπέζιο ABΓΔ (ΔΓ // AB), δίνεται ότι $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\omega}$ και ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή με $AB=AG$ και $DA=DG$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔĀB.

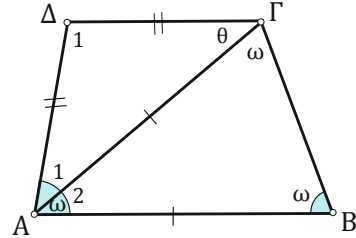
(5 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 2\hat{\theta}$.

(5 μονάδες)

(γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{\omega} = 72^\circ$.

(5 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4^ο

A. Σε ένα εξεταστικό κέντρο εισαγωγής μαθητών για το Πρότυπο-Πειραματικό Λύκειο διορθώθηκαν 500 γραπτά. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κατανομή των βαθμών σε τρεις κατηγορίες.

Βαθμοί	ώς 30	Από 31 έως 45	Από 46 έως 60
Αριθμός μαθητών	50	300	150
Συχνότητα (%)			

Να υπολογίσετε τις συχνότητες του προηγούμενου πίνακα και να τις χρησιμοποιήσετε για να δημιουργήσετε ένα κυκλικό διάγραμμα.

(6 μονάδες)

B. Διαθέτουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Και τα δύο είναι αμερόληπτα.

(α) Ρίχνουμε το ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα να δείξει 6.

(3 μονάδες)

(β) Ρίχνουμε το νόμισμα. Ποια είναι η πιθανότητα να δείξει γράμματα.

(2 μονάδες)

(γ) Ρίχνουμε ταυτόχρονα το ζάρι και το νόμισμα. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης και την πιθανότητα το ζάρι να δείξει 6 και το νόμισμα να δείξει γράμματα.

(4 μονάδες)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 1^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

(α)

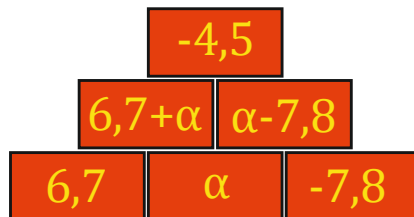
$$A = \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{1}\right)^3 = -8 \text{ και}$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{-4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ισχύει: } A \cdot B = (-8) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{8} = 1.$$

Επομένως οι αριθμοί A και B είναι αντίστροφοι.

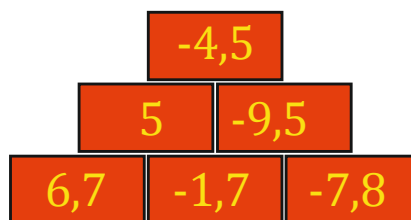
(β) Σύμφωνα με τον κανόνα σχηματισμού του αριθμότοιχου κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται κάτω του. Η συμπλήρωση του αριθμότοιχου διευκολύνεται με χρήση μεταβλητής.



Συμβολίζουμε με α τον μεσαίο αριθμό της βάσης. Σχηματίζουμε την εξίσωση: $(6,7+\alpha)+(\alpha-7,8)=-4,5$. Έχουμε:

$$2\alpha+6,7-7,8=-4,5 \text{ ή } 2\alpha=-4,5-6,7+7,8 \text{ ή } 2\alpha=-3,4 \text{ ή } \alpha=-1,7.$$

Βρίσκουμε: $6,7+\alpha=6,7-1,7=5$ και $\alpha-7,8=-1,7-7,8=-9,5$. Με αντικατάσταση ο αριθμότοιχος γίνεται:



Στο τέλος ακολουθεί επαλήθευση.

(γ) $A = (x-y)(x+2y) + (x+y)^2 + (x-2y)^2 - 5xy$

$$= x^2 + 2xy - xy - 2y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 - 5xy$$

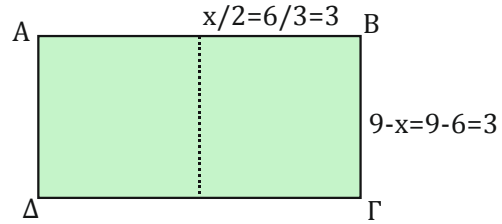
$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = (\sqrt{3})^2 (x-y)^2 = [\sqrt{3}(x-y)]^2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2.$$

ΘΕΜΑ 2ο

A. Σχηματίζουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2} = 9 - x \text{ ή } x = 18 - 2x \text{ ή } x + 2x = 18 \text{ ή } 3x = 18$$

ή $x=6$. Επομένως το ορθογώνιο χωρίζεται σε δύο τετράγωνα πλευράς 3.



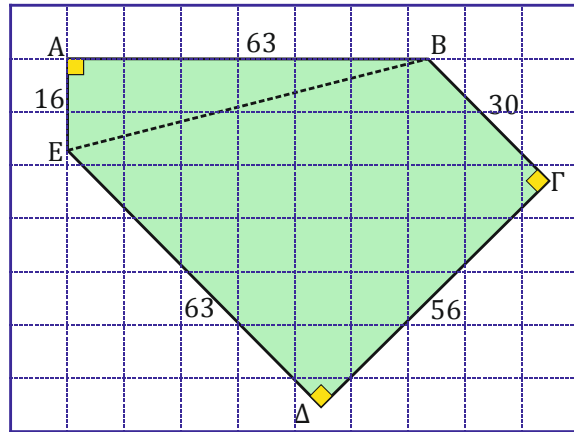
B. (α) Χωρίζουμε το σχέδιο του οικοπέδου με τον παρακάτω τρόπο:

$$(ABE) = \frac{1}{2} 63 \times 16 = 504 \text{ m}^2.$$

$$(BΓΔΕ) = \frac{63 + 30}{2} \cdot 56 = 93 \cdot 28 = 2604 \text{ m}^2.$$

$$E_{\text{οικοπ.}} = (ABE) + (BΓΔΕ).$$

$$E_{\text{οικοπ.}} = 504 + 2604 = 3.108 \text{ m}^2.$$



(β) Δίνεται $AB=63 \text{ mm}$.

$$\text{Έχουμε: ΚΛΙΜΑΚΑ} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}} = \frac{0,063\text{m}}{63\text{m}} = \frac{1}{1000}.$$

Άρα η κλίμακα του σχεδίου είναι 1:1000.

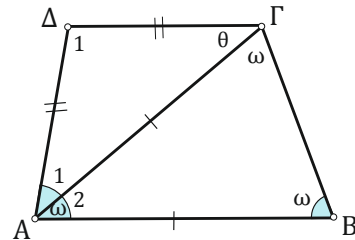
ΘΕΜΑ 3ο

(α) Επειδή το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές με

$\Delta A = \Delta \Gamma$ ισχύει: $\hat{A}_1 = \theta$ (1). Επειδή $\Delta\Gamma // AB$ ισχύει:

$\theta = \hat{A}_2$ (2) ως εντός εναλλάξ. Από τις (1) και (2)

συμπεραίνουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \theta$. Επομένως η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}B$.



(β) Στο στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ ισχύει: $\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_1 + \theta = 180^\circ$.

Έχουμε: $\hat{\Delta}_1 + \theta + \theta = 180^\circ$ ή $\hat{\Delta}_1 + 2\theta = 180^\circ$. Επομένως: $\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 2\theta$ (3).

(γ) Επειδή $\Delta\Gamma // AB$ ισχύει: $\hat{\Delta}_1 + \omega = 180^\circ$ (4), αφού οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\Delta\hat{A}B = \omega$ είναι εντός και επί τα αυτά. Από τις (3) και (4) έχουμε:

$180^\circ - 2\theta + \omega = 180^\circ$ ή $\omega = 2\theta$ (5). Από το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με βάση την (5) έχουμε: $\omega + \omega + \theta = 180^\circ$ ή $2\theta + 2\theta + \theta = 180^\circ$ ή $5\theta = 180^\circ$ ή $\theta = 36^\circ$.
Επομένως: $\omega = 2\theta = 72^\circ$.

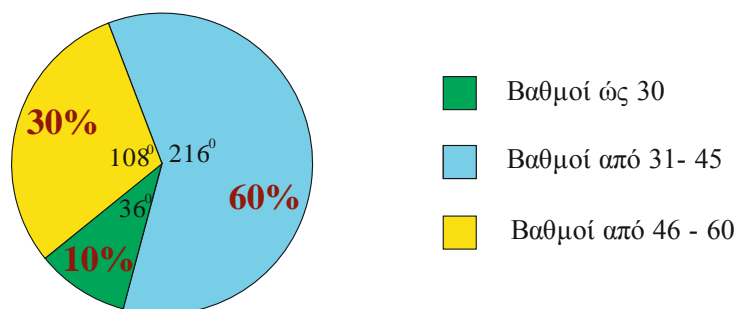
ΘΕΜΑ 4^ο

A. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κατανομή των βαθμών σε τρεις κατηγορίες.

Βαθμοί	ώς 30	Από 31 έως 45	Από 46 έως 60
Αριθμός μαθητών	50	300	150
Συχνότητα (%)	$50/500=10\%$	$300/500=60\%$	$150/500=30\%$
Επίκεντρες γωνίες	$\frac{10}{100} \cdot 360^\circ = 36^\circ$	$\frac{60}{100} \cdot 360^\circ = 216^\circ$	$\frac{30}{100} \cdot 360^\circ = 108^\circ$

Οι συχνότητες του προηγούμενου πίνακα φαίνονται στο κυκλικό διάγραμμα.

ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (Συχνότητες %)



B. Στα τρία πειράματα τύχης τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Ο τρόπος εύρεσης του δειγματικού χώρου στις δύο πρώτες περιπτώσεις περιγράφεται στο σχολικό βιβλίο της Γ' Γυμνασίου (σελ. 167 -168).

(α) η πιθανότητα το ζάρι να δείξει 6 είναι $1/6$.

(β) Η πιθανότητα το νόμισμα να δείξει γράμματα είναι $1/2$.

(γ) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος μπορεί να βρεθεί με τη χρήση του παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4	5	6
Κ	(Κ,1)	(Κ,2)	(Κ,3)	(Κ,4)	(Κ,5)	(Κ,6)
Γ	(Γ,1)	(Γ,2)	(Γ,3)	(Γ,4)	(Γ,5)	(Γ,6)

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: $\Omega = \{(Κ,1), (Κ,2), (Κ,3), (Κ,4), (Κ,5), (Κ,6), (Γ,1), (Γ,2), (Γ,3), (Γ,4), (Γ,5), (Γ,6)\}$.

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι 12 και η ευνοϊκή 1. Επομένως η πιθανότητα το ζάρι να δείξει 6 και το νόμισμα να δείξει γράμματα είναι $1/12$.

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 1^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ -2

(ΜΟΝΑΔΕΣ 60)

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Να λύσετε την εξίσωση: $(4x+5)(4x-5) = 56$.

(Μονάδες 5)

(β) Δίνεται κανονικό πολύγωνο με n πλευρές. Κάθε γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi = 162^\circ$. Να βρείτε την κεντρική γωνία ω του πολυγώνου και το πλήθος n των πλευρών του.

(Μονάδες 5)

(γ) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

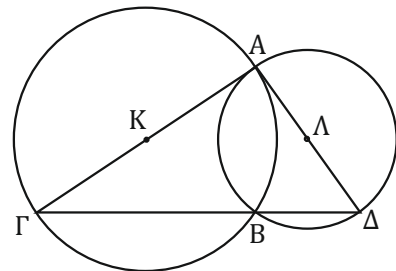
$$B = (2x-3)(7x+1) - (2x-3)7x + 1.$$

Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της A για $x=-1$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρνουμε τις διαμέτρους $A\Gamma$ και $A\Delta$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



(α) Να φέρετε την AB . Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{\Gamma B A} + \widehat{A B \Delta} = 180^\circ. \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

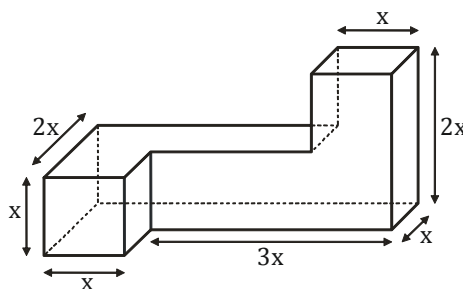
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$. (Μονάδες 5)

B. Οι λάμπες πυράκτωσης κοστίζουν 0,5€ η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 1200 ώρες. Οι λάμπες φωτισμού νέου τύπου (led) κοστίζουν 6€ η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 50000 ώρες. Ποιου τύπου λάμπες σας συμφέρει να προτιμήσετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Το παρακάτω στερεό έχει δημιουργηθεί από συγκόλληση ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων.



(α) Να χωρίσετε το στερεό σε τρία μέρη και να τα επανασυγκολήσετε έτσι ώστε να πάρετε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το οποίο να έχει τον ίδιο όγκο με το παραπάνω στερεό. Ποιες είναι οι διαστάσεις του;

(β) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού.

(γ) Να βρείτε τον όγκο του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

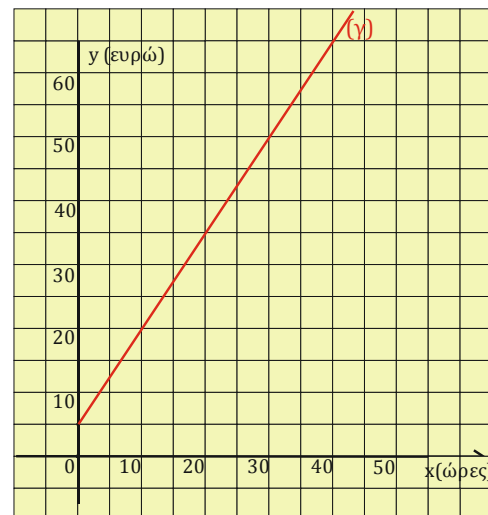
Η Ελένη κατά τη διάρκεια των διακοπών της θέλει να κάνει ποδηλασία. Εξετάζει από το διαδίκτυο τις 15νήμερες χρεώσεις από τρία καταστήματα ενοικίασης ποδηλάτων για να διαπιστώσει ποιο την συμφέρει να επιλέξει. Οι τρόποι χρέωσης των τριών καταστημάτων είναι οι εξής:

Κατάστημα (α): Οι πελάτες πληρώνουν σύμφωνα με τον κανόνα που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

Ώρες ενοικίασης (x)	0	1	2	3	...
Χρέωση σε ευρώ (y)	15	15,5	16		...

Κατάστημα (β): Οι πελάτες πληρώνουν **35** ευρώ και κάνουν ποδήλατο όσες ώρες του δεκαπενθημέρου επιθυμούν.

Κατάστημα (γ): Οι πελάτες πληρώνουν σύμφωνα με την παρακάτω γραφική παράσταση. Στο ακόλουθο γράφημα η σχέση που συνδέει τις ώρες ποδηλασίας με το χρηματικό ποσό που πληρώνουν παριστάνεται με σημεία της ευθείας (γ).



Ελένη δυσκολεύεται να επιλέξει γιατί οι χρεώσεις του κάθε καταστήματος γίνονται με διαφορετικό τρόπο. Μπορείτε να την βοηθήσετε να απαντήσει στα ακόλουθα ερωτήματα;

(1) Ποιος είναι ο τύπος που παρέχει άμεσα τη χρέωση y σε ευρώ του καταστήματος (α) για x ώρες ενοικίασης; Να αιτιολογήσετε πώς βρήκατε τον τύπο.

(Μονάδες 3)

(2) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της σχέσης του y ως προς το x για τα καταστήματα (α) και (β) στο ίδιο σύστημα αξόνων με την ευθεία (γ).

(Μονάδες 3)

(3) Πόσες ώρες ποδήλατο πρέπει να κάνει η Ελένη ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει στα καταστήματα (α) και (γ) να είναι ίδια. Να εξηγήσετε.

(Μονάδες 3)

(4) Πότε συμφέρει η κάθε επιλογή;

(Μονάδες 6)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 2^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Έχουμε:

$$(4x+5)(4x-5)=56 \text{ ή } (4x)^2 - 5^2 = 56 \text{ ή } (4x)^2 - 25 - 56 = 0.$$

$$(4x)^2 - 81 = 0 \text{ ή } (4x)^2 - 9^2 = 0 \text{ ή } (4x+9)(4x-9)=0 \text{ ή } 4x+9=0 \quad 4x-9=0.$$

$$\text{Επομένως: } x = -\frac{9}{4} \text{ ή } x = \frac{9}{4}.$$

(β) Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ του κανονικού πολυγώνου θα είναι:

$$\hat{\omega} = 180^\circ - \hat{\phi} = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ.$$

Το πλήθος n των πλευρών του είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n} \text{ ή } 18^\circ = \frac{360^\circ}{n} \text{ ή } n = \frac{360^\circ}{18^\circ} \text{ ή } n = 20.$$

Άρα το κανονικό πολύγωνο είναι εικοσάγωνο.

(γ) Η παράσταση $B = (2x-3)(7x+1) - (2x-3)7x + 1$ γράφεται:

$$B = (2x-3)(7x+1-7x)+1 = (2x-3)+1.$$

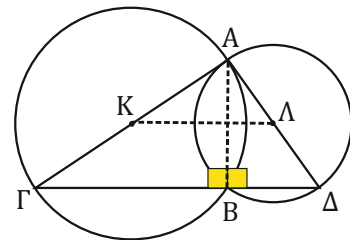
Στην τελευταία μορφή θέτουμε $x=-1$.

$$B = [2(-1)-3]+1 = (-5)+1 = -4.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. (α) Φέρνουμε την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων. Οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ είναι ορθές, γιατί βαίνουν σε ημικύκλια. Ισχύει:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$



Επομένως, η $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Γ , B και Δ είναι συνευθειακά.

(β) Στο τρίγωνο ΑΓΔ τα σημεία K και Λ είναι μέσα. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ του τριγώνου. Επομένως θα είναι

$$\text{ίσο με το μισό του } \text{ΓΔ}, \text{ δηλαδή } \text{ΚΛ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2}. \text{ Άρα: } \text{ΓΔ} = 2\text{ΚΛ}.$$

B. Κάνουμε αναγωγή της τιμής του κάθε τύπου λάμπας για μια ώρα λειτουργίας και συγκρίνουμε τα παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{0,5}{1200} \approx 0,00041 \quad \text{και} \quad \frac{6}{50000} \approx 0,00012.$$

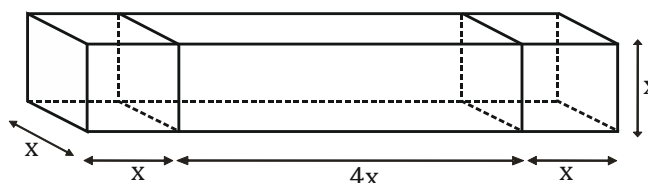
ή τα ισοδύναμα με ίδιο αριθμητή, δηλαδή

$$\frac{0,5}{1200} = \frac{0,5 \cdot 12}{1200 \cdot 12} = \frac{6}{14400} > \frac{6}{50000}$$

Από τη σύγκριση προκύπτει ότι συμφέρουν οι λάμπες νέου τύπου (led).

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) “Ξεκολλάμε” τον πάνω και τον μπροστινό κύβο και τους ξανακολλάμε στο πλάι. Έτσι δημιουργούμε το ακόλουθο στερεό:



Το νέο στερεό έχει το ίδιο εμβαδόν επιφανείας και τον ίδιο όγκο με το αρχικό. Είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $x, x, 6x$.

(β) Επομένως έχει και εμβαδόν $E = 2x^2 + 4 \cdot 6x \cdot x = 26x^2$.

(γ) Επομένως έχει όγκο $V = 6x^3$.

ΘΕΜΑ 4^ο

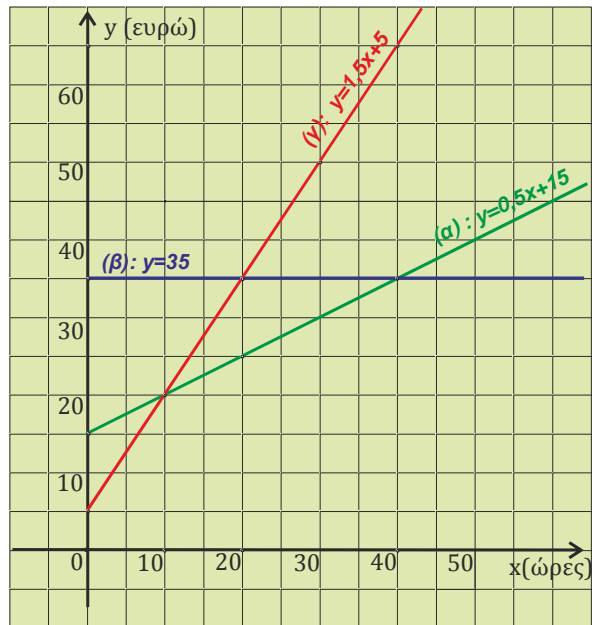
(1) Παρατηρούμε ότι οι χρεώσεις του καταστήματος (α) αυξάνονται πάντα κατά 0,5 ευρώ για κάθε επιπρόσθετη ώρα (κλίση 0,5). Στο τέλος προσθέσουμε μια στήλη ακόμα. Η δεύτερη γραμμή του πίνακα τιμών γράφεται:

Ώρες ενοικίασης (x)	0	1	2	...	x
Χρέωση σε ευρώ (y)	15+0,5·0	15+0,5·1	15+0,5·2	...	15+0,5·x

Έτσι ο ζητούμενος τύπος είναι: $y=0,5x+15$ (συνάρτηση ευθείας).

Εναλλακτικά, ο τύπος της συνάρτησης μπορεί να βρεθεί με αλγεβρικό χειρισμό.

(2) Η γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στη χρέωση **y** σε ευρώ του καταστήματος (α) και τις αντίστοιχες ώρες ενοικίασης **x**, είναι η ευθεία (α) και παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Η συνολική οπτικοποίηση της κατάστασης στο ίδιο σύστημα αξόνων βοηθά τις σχετικές συγκρίσεις και αποτελεί ένα πολύτιμο μέσο για την επίλυση του προβλήματος. Στο προηγούμενο σχήμα (χωρίς να ζητείται στο ερώτημα (2)) οι τρεις γραφικές παραστάσεις συνδέονται με τους αντίστοιχους τύπους. Η εύρεση του τύπου της ευθείας (γ) γίνεται αλγεβρικά. Στη συνέχεια με αλγεβρική λύση συστήματος μπορεί να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών (α) και (γ). Η μετατροπή των χρεώσεων των τριών καταστημάτων στην ίδια αναπαράσταση διευκολύνει τις απαντήσεις των επόμενων ερωτημάτων.

(3) Από τη συνεξέταση των γραφικών παραστάσεων των τριών ευθειών διαπιστώνουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις συμφέρει η επιλογή του καταστήματος (α), ενώ σε άλλες του (β) ή του (γ). Από το γράφημα προκύπτει ότι για $x=10$ οι χρεώσεις των καταστημάτων (α) και (γ) **είναι ίδιες: 20 ευρώ**. Επίσης από τον τύπο του πρώτου ερωτήματος επαληθεύεται ότι το κατάστημα (α) χρεώνει τις 10 ώρες: $y = 0,5x + 15 = 0,5 \cdot 10 + 15 = 20$ ευρώ. Το ίδιο προκύπτει και από τον τύπο που αντιστοιχεί στην ευθεία (γ).

(4) Από την ανάγνωση των γραφικών παραστάσεων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $0 < x < 10$ συμφέρει το κατάστημα (γ), γιατί η ευθεία (γ) είναι κάτω από τις (α) και (β).
- Αν $10 < x < 40$ συμφέρει το κατάστημα (α), γιατί στο διάστημα αυτό η ευθεία (α) είναι κάτω από τις (γ) και (β).
- Αν $x > 40$ συμφέρει το κατάστημα (β), γιατί στο διάστημα αυτό η ευθεία (β) είναι κάτω από τις (γ) και (α).
- Αν $x=10$ θα πληρώνει το ίδιο στα καταστήματα (α) και (γ).
- Αν $x=40$ θα πληρώνει το ίδιο στα καταστήματα (α) και (β).

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 2ης ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ-3

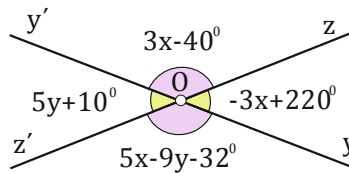
(ΜΟΝΑΔΕΣ 60)

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $A = \frac{1}{9} - \frac{15}{9} \cdot \frac{1}{6}$.

(Μονάδες 5)

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $z\hat{O}y$ του παρακάτω σχήματος:



(Μονάδες: 5)

(γ) Ποιοι είναι οι πρώτοι αριθμοί που ικανοποιούν την ανισότητα;

$$\frac{1}{6} < \frac{v}{15} < \frac{8}{5}$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο ακόλουθο σχήμα βλέπουμε το σχέδιο μιας λίμνης και τις μετρήσεις που έκανε ο μηχανικός. Στο τρίγωνο ABΓ συμβολίζουμε ως εξής τα μήκη των πλευρών: BΓ=α, AB=γ και AΓ=β. Δίνονται:

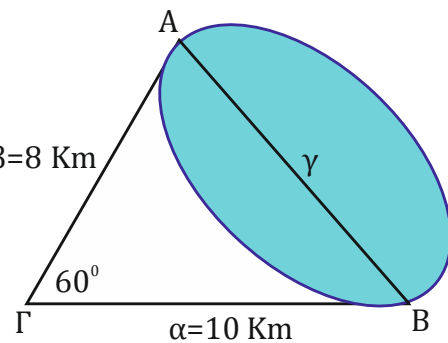
$\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\alpha = 10 \text{ Km}$ και $\beta = 8 \text{ Km}$.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς γ.

(Μονάδες 7) $\beta = 8 \text{ Km}$

(β) Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{B} και \hat{A} .

(Μονάδες 8)

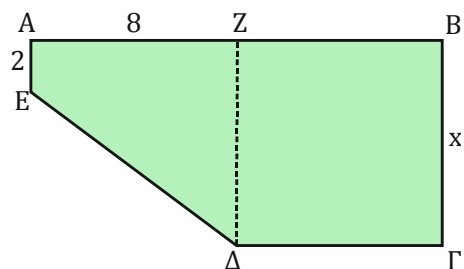


(Δίνονται: $\sqrt{84} = 9,17$ και $\sqrt{3} = 1,73$.)

Παρέχεται δυνατότητα χρήσης πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών)

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κήπου με πλευρές AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ. Ο κήπος έχει εμβαδόν 104 m^2 και αποτελείται από ένα



τετράγωνο ZBΓΔ και ένα τραπέζιο AZΔΕ με AZ=8 m και AE=2m.

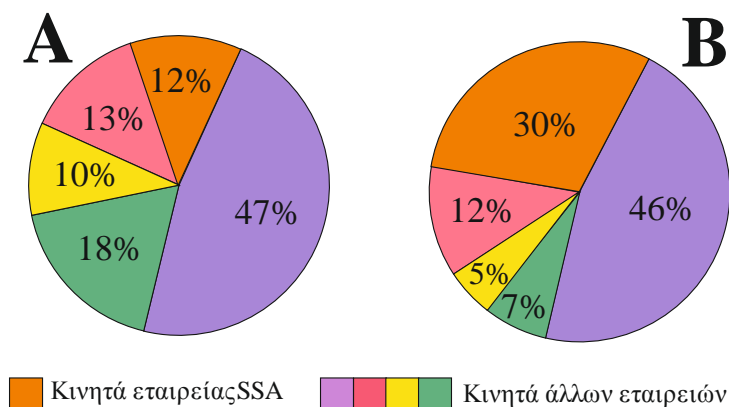
(α) Αν συμβολίσουμε με x το μήκος της πλευράς BΓ να γράψετε μια εξίσωση από την οποία μπορεί να βρεθεί ο άγνωστος x.
(Μονάδες 5)

(β) Να λύσετε την εξίσωση. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς BΓ;
(Μονάδες 5)

(γ) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ;
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Σε δύο πόλεις A και B ο συνολικός αριθμός των κινητών τηλεφώνων είναι αντίστοιχα 78.450 και 31.380. Στα παρακάτω κυκλικά διαγράμματα βλέπουμε το ποσοστό των κινητών από κάθε εταιρεία κατασκευής. Σε ποια από τις δύο πόλεις, A και B, η εταιρεία "SSA" έχει περισσότερα κινητά; Να αιτιολογήσετε.



(Μονάδες 7)

B. Ο Παναγιώτης, ο Γιώργος και ο Λευτέρης έχουν στις τσάντες τους χρωματιστές μπίλιες: ο Παναγιώτης έχει 7 κόκκινες μπίλιες, ο Γιώργος έχει 5 κόκκινες και 25 πράσινες μπίλιες και ο Λευτέρης διαθέτει αρκετές πράσινες μπίλιες.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ο Γιώργος να τραβήξει από την τσάντα του μια κόκκινη μπίλια;
(Μονάδες 3)

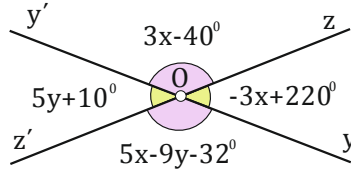
(β) Πόσες πράσινες μπίλιες πρέπει να προσθέσει ο Λευτέρης στην τσάντα του Παναγιώτη έτσι ώστε η πιθανότητα να τραβήξει ο Παναγιώτης κόκκινη μπίλια να είναι η ίδια με την πιθανότητα να τραβήξει ο Γιώργος κόκκινη μπίλια.
(Μονάδες 5)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

(α) Έχουμε: $A = \frac{1}{9} - \frac{15}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} - \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{9} - \frac{5}{9 \cdot 2} = \frac{2}{18} - \frac{5}{18} = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$.

(β) Οι κατακορυφήν γωνίες του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.



Δημιουργούμε και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 40 = 5x - 9y - 32 \\ 5y + 10 = -3x + 220 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -2x + 9y = 8 \\ 3x + 5y = 210 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -6x + 27y = 24 \\ -6x + 10y = 420 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 12 \end{cases}$$

Η γωνία \hat{zOy} είναι: $\hat{zOy} = -3x + 220^\circ = -3 \times 50^\circ + 220^\circ = -150^\circ + 220^\circ = 70^\circ$.

(γ) Λύνουμε την ανίσωση: $\frac{1}{6} < \frac{v}{15} < \frac{8}{5}$.

Έχουμε: $60 \cdot \frac{1}{6} < 60 \cdot \frac{v}{15} < 60 \cdot \frac{8}{5}$ ή $10 < 4v < 84$ ή $2,5 < v < 21$.

Επομένως οι ζητούμενοι πρώτοι αριθμοί είναι: 3, 5, 7, 11, 13, 17 και 19.

ΘΕΜΑ 2ο

(α) Στο τρίγωνο ABΓ δίνονται: $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\alpha = 10$ Km και $\beta = 8$ Km. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

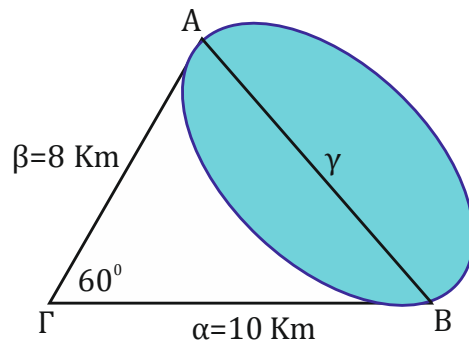
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \hat{\Gamma}.$$

Βρίσκουμε: $\gamma^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 60^\circ$

$$\gamma^2 = 100 + 64 - 160 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\gamma^2 = 84.$$

Επομένως: $\gamma = \sqrt{84} \approx 9,17$ Km.



(β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$\cos \hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

$$\sigma_{\text{υν}}\hat{A} = \frac{64+84-100}{2 \cdot 8 \cdot \sqrt{84}} = \frac{48}{16\sqrt{84}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{9,17} = 0,327.$$

Άρα: $\hat{A} \approx 71^\circ$.

Τέλος βρίσκουμε: $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 71^\circ - 60^\circ = 49^\circ$.

Επομένως: $\hat{A} \approx 71^\circ$ και $\hat{B} = 49^\circ$.

Παρατήρηση: Αν αγνοήσουμε το δεδομένο $\beta=8$ Km και εφαρμόσουμε το νόμο των ημιτόνων οδηγούμαστε σε διαφορετικό αποτέλεσμα:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \quad \text{ή} \quad \frac{10}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\sqrt{84}}{\eta\mu 60^\circ} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\hat{A} = \frac{10\eta\mu 60^\circ}{\sqrt{84}} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\hat{A} \approx 0,9433.$$

Άρα: $\hat{A} \approx 71^\circ$ ή $\hat{A} \approx 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

Έτσι βρίσκουμε: $\hat{A} \approx 71^\circ$ και $\hat{B} \approx 49^\circ$ ή $\hat{A} \approx 109^\circ$ και $\hat{B} \approx 11^\circ$.

Αυτό συμβαίνει επειδή οι πλευρές α , γ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ (μη περιεχόμενη) δεν ορίζουν ένα μόνο τρίγωνο. Η σωστή λύση είναι $\hat{A} \approx 71^\circ$ και $\hat{B} \approx 49^\circ$.

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) Ο κήπος έχει εμβαδόν 104 m^2 και αποτελείται από ένα τετράγωνο ZBΓΔ και ένα τραπέζιο AZΔΕ. Η ζητούμενη εξίσωση είναι:

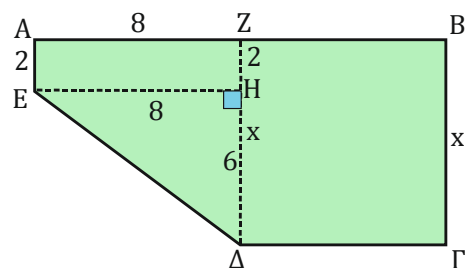
$$\frac{2+x}{2} \cdot 8 + x^2 = 104.$$

(β) Λύση της εξίσωσης.

$$\frac{2+x}{2} \cdot 8 + x^2 = 104 \quad \text{ή} \quad (2+x) \cdot 4 + x^2 = 104 \quad \text{ή} \quad x^2 + 4x - 96 = 0.$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει $x=8$ ή $x=-12$. Στο πρόβλημα δεκτή είναι η λύση $x=8$. Επομένως το μήκος της ζητούμενης πλευράς είναι $x=B\Gamma=8 \text{ m}$.

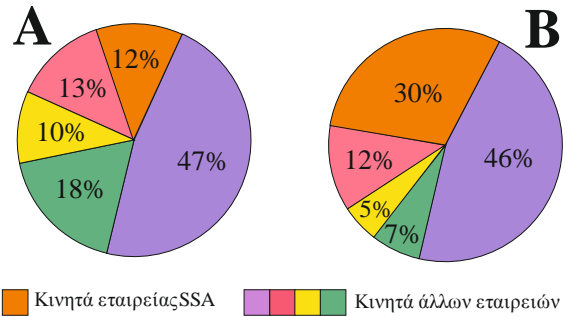
(γ) Με εφαρμογή του Π. Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΕ προκύπτει $DE=10 \text{ m}$.



ΘΕΜΑ 4^ο

A. Στα δύο κυκλικά διαγράμματα τα κινητά της εταιρείας “SSA” παριστάνονται με πορτοκαλί χρώμα. Υπολογίζουμε:

- $78450 * 12\% = 9414.$
- $31380 * 30\% = 9414.$



Επομένως συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των κινητών της εταιρείας SSA είναι ίδιος και στις δύο πόλεις.

B. Σύμφωνα με το πρόβλημα ο Παναγιώτης, ο Γιώργος και ο Λευτέρης έχουν στις τσάντες τους χρωματιστές μπίλιες: ο Παναγιώτης έχει 7 κόκκινες μπίλιες, ο Γιώργος έχει 5 κόκκινες και 25 πράσινες μπίλιες και ο Λευτέρης διαθέτει αρκετές πράσινες μπίλιες.

(α) Η πιθανότητα ο Γιώργος να τραβήξει από την τσάντα του κόκκινη μπίλια είναι:

$$P(\Gamma) = \frac{5}{5+25} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

(β) Ζητάμε πόσες πράσινες μπίλιες πρέπει να προσθέσει ο Λευτέρης στην τσάντα του Παναγιώτη έτσι ώστε η πιθανότητα να τραβήξει ο Παναγιώτης κόκκινη μπίλια να είναι η ίδια με την προηγούμενη πιθανότητα να τραβήξει ο Γιώργος κόκκινη μπίλια. Συμβολίζουμε με x το πλήθος από πράσινες μπίλιες που θα προσθέσει ο Λευτέρης. Τότε:

$$P(\Gamma) = P(\Pi) \text{ ή } \frac{1}{6} = \frac{7}{7+x} \text{ ή } 7+x = 42 \text{ ή } x = 35.$$

Άρα, ο Λευτέρης θα πρέπει να προσθέσει **35** πράσινες μπίλιες στην τσάντα του Παναγιώτη ώστε εκείνος να έχει συνολικά **42** μπίλιες.

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 3^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ-4

(ΜΟΝΑΔΕΣ 60)

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A = 4x(x + 3)$ και $B = x^2 + 6x + 9$.

(α) Να λύσετε την εξίσωση $A=0$.

(Μονάδες 5)

(β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της B για $x=-4$.

(Μονάδες 5)

(γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $A+B$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2^ο

Η κίνηση ενός σώματος κατά τη διάρκεια των 6 πρώτων ωρών περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$S(t) = 3 \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 6,$$

όπου $S(t)$ η απόσταση σε χιλιόμετρα (km) που έχει διανύσει το σώμα σε t ώρες (h).

(α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

t - (σε h)	0	2	6
$S(t)$ - (σε km)			

(Μονάδες 5)

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $S(t)$, $0 \leq t \leq 6$.

(Μονάδες 5)

(γ) Ποια είναι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t=5h$; Να αιτιολογήσετε τη σκέψη σας.

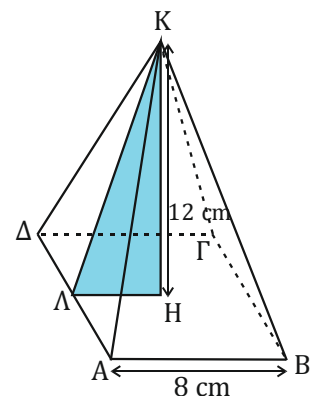
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Το διπλανό σχήμα δείχνει μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Η πλευρά της βάσης είναι 8 cm και το ύψος είναι 12 cm.

(α) Να σημειώσετε στο τρίγωνο $K\Lambda H$ τις διαστάσεις που γνωρίζετε. Να υπολογίσετε το απόστημα $K\Lambda$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda\Delta$.



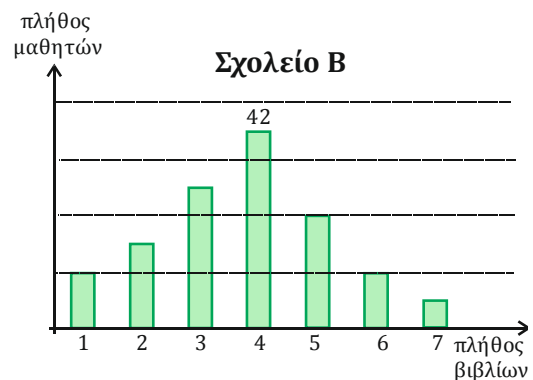
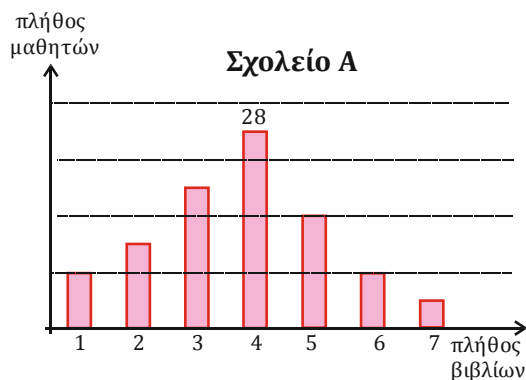
(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

(Μονάδες 15)

Δίνονται: $E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$, $E_{\pi} = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$

ΘΕΜΑ 4^ο

Τα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζουν το πλήθος των μαθητών δύο σχολείων σύμφωνα με το πλήθος των λογοτεχνικών βιβλίων που διάβασαν κατά τη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς.



- (α) Λαμβάνοντας υπόψη τις βοηθητικές οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές, να ορίσετε κατάλληλες μονάδες μέτρησης στους άξονες που να παριστάνουν το πλήθος των μαθητών σε κάθε περίπτωση. Να συμπληρώσετε πόσοι μαθητές κάθε σχολείου διάβασαν 1, 2, 3, 5, 6 και 7 βιβλία. Γιατί τα δύο διαγράμματα είναι ίδια;
- (β) Πόσους μαθητές έχει το κάθε σχολείο και πόσα βιβλία διάβασαν όλοι οι μαθητές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (γ) Να βρείτε το μέσο όρο των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές κάθε σχολείου. Τι παρατηρείτε; Υπάρχει διαφορά στα ποσοστά των μαθητών των δύο σχολείων που διάβασαν πάνω από 5 βιβλία;

(Μονάδες 15)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 4^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Οι δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις είναι: $A = 4x(x+3)$ και $B = x^2 + 6x + 9$.

(α) Ισχύει: $A=0$ ή $4x(x+3)=0$. Επομένως: $x=0$ ή $x=-3$.

(β) Έχουμε: $B = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Για $x=-4$ είναι: $B = (-4+3)^2 = (-1)^2 = 1$.

(γ) Είναι: $A + B = 4x(x+3) + (x^2 + 6x + 9) = 4x(x+3) + (x+3)^2 =$
 $= (x+3)[4x + (x+3)] = (x+3)(5x+3)$.

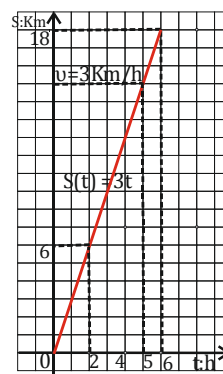
ΘΕΜΑ 2^ο

Σύμφωνα με την εκφώνηση η κίνηση ενός σώματος περιγράφεται από τη συνάρτηση $S(t)=3 \cdot t$, $0 \leq t \leq 6$, όπου $S(t)$ η απόσταση σε χιλιόμετρα (km) που έχει διανύσει το σώμα σε t ώρες (h).

(α) Αντικαθιστούμε στον τύπο $S(t)=3 \cdot t$ και τις τιμές βάζουμε στον πίνακα τιμών.

t - (σε h)	0	2	6
$S(t)$ - (σε km)	0	6	18

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $S(t)$, $0 \leq t \leq 6$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



(γ) Η ταχύτητα του κινητού σε όλη τη διαδρομή είναι σταθερή και η αριθμητική τιμή της είναι ίση με την κλίση της ευθείας, δηλαδή 3. Επομένως και τη χρονική στιγμή $t = 5$ h η ταχύτητα είναι 3 Km/h.

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) Με εφαρμογή του Π. Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΗ προκύπτει:

$$\begin{aligned}ΚΛ &= \sqrt{ΚΗ^2 + ΗΛ^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} \\ΚΛ &= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm.}\end{aligned}$$

(β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΔ είναι:

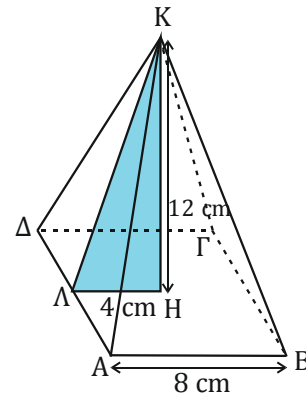
$$E_{ΚΑΔ} = \frac{1}{2} ΑΔ \cdot ΚΛ = \frac{1}{2} 8 \cdot 4\sqrt{10} = 16\sqrt{10} \text{ cm}^2.$$

(γ) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι:

$$E_{\pi} = 4E_{ΚΑΔ} = 4 \cdot 16\sqrt{10} = 64\sqrt{10} \text{ cm}^2.$$

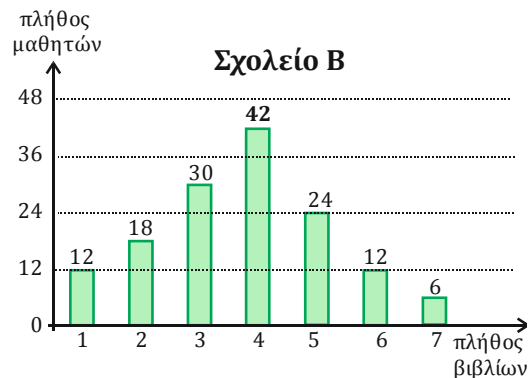
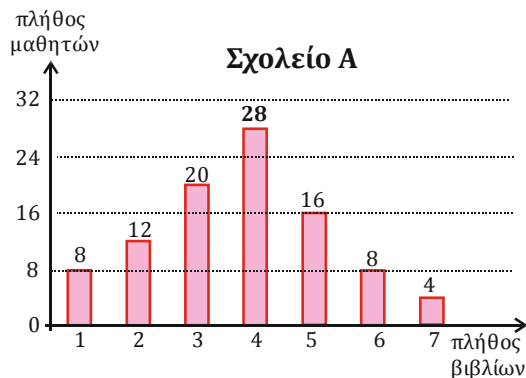
Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta} = 64\sqrt{10} + 8^2 = (64 + 64\sqrt{10}) \text{ cm}^2.$$



ΘΕΜΑ 4^ο

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τις οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές, μπορούμε να ορίσουμε μονάδες μέτρησης στους άξονες που να παριστάνουν το πλήθος των μαθητών σε κάθε περίπτωση. Για το πρώτο σχολείο έχουμε: $28:3,5=8$ και για το δεύτερο $42:3,5=12$. Στη συνέχεια συμπληρώνουμε πόσοι μαθητές κάθε σχολείου διάβασαν 1, 2, 3, 5, 6 και 7 βιβλία.



Τα δύο διαγράμματα φαίνονται ίδια, ενώ οι μονάδες των αξόνων είναι διαφορετικές. Ακριβέστερα, υπάρχει αναλογία υψών των αντίστοιχων ορθογωνίων με λόγο 2:3. Αν τα σχεδιάσουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων (κοινό συγκριτικό ραβδόγραμμα) θα διαπιστώσουμε τη διαφορά υψών για τα ζεύγη των αντίστοιχων ορθογωνίων.

(β) Για κάθε σχολείο προσθέτουμε όλους τους αριθμούς που είναι τοποθετημένοι στις κορυφές των ορθογωνίων. Έχουμε:

- $8+12+20+28+16+8+4=96$.
- $12+18+30+42+24+12+6=144$.

Άρα το πρώτο σχολείο έχει συνολικά 96 μαθητές και το δεύτερο 144.

Για να βρούμε πόσα βιβλία διάβασαν συνολικά οι μαθητές κάθε σχολείου εκτελούμε τις ακόλουθες πράξεις:

- $8 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 28 \cdot 4 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 8 + 24 + 60 + 112 + 80 + 48 + 28 = 360$.
- $12 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 42 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 12 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 12 + 36 + 90 + 168 + 120 + 72 + 42 = 540$.

Επομένως οι μαθητές του πρώτου σχολείου διάβασαν 360 βιβλία και του δεύτερου 540 βιβλία.

(γ) Ο μέσος όρος των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές του πρώτου σχολείου είναι $360:96=3,75$. Ο μέσος όρος των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές του δεύτερου σχολείου είναι $540:144=3,75$. Παρατηρούμε ότι οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Στο πρώτο σχολείο το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν πάνω από 5 βιβλία είναι 12,5%. Το ίδιο ποσοστό βρίσκουμε και στο δεύτερο. Η ταυτότητα των ποσοστών οφείλεται στην ομοιότητα των δύο κατανομών.

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 4ης ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ-5

(ΜΟΝΑΔΕΣ 60)

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Στο πλαίσιο μιας πολιτιστικής δραστηριότητας ορισμένοι μαθητές της Γ' Γυμνασίου παρακολούθησαν μια κινηματογραφική προβολή. Κατά τη διάρκεια της πολιτιστικής δραστηριότητας οργανώθηκαν διάφορα παιχνίδια δεξιοτήτων και γνώσεων. Στον τελικό έφτασαν ο Νίκος και η Ελένη. Η τελική δοκιμασία ήταν η εξής:

Μία κάλπη περιέχει εξισώσεις. Κάθε μαθητής επιλέγει τυχαία από την κάλπη μία εξίσωση και καλείται να την λύσει. Νικητής είναι ο μαθητής που βρήκε μεγαλύτερη ρίζα (λύση). Το δώρο βρίσκεται σε φάκελο και θα τον ανοίξει στο τέλος ο νικητής.

- Η Ελένη επιλέγει την εξίσωση (E): $\frac{x}{2} - (2x - 5) = x - 5$
- Ο Νίκος επιλέγει την εξίσωση (N): $x(x - 2) = 3(x + 2)$

Ποιο παιδί κέρδισε ;

Το δώρο: Ο νικητής κερδίζει προσκλήσεις για δωρεάν είσοδο σε προβολές του τοπικού κινηματογράφου ισάριθμες προς το μέσο όρο όλων των ριζών του τελικού αγώνα μεταξύ της Ελένης και του Νίκου. Πόσες παραστάσεις μπορεί να παρακολουθήσει ο νικητής;

(Μονάδες 10)

B. Ο Σωτήρης ισχυρίζεται ότι όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι όμοια μεταξύ τους επειδή έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες. Συμφωνείτε με την αιτιολόγησή του; Να εξηγήσετε τη θέση σας παρουσιάζοντας κατάλληλα παραδείγματα ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

(Μονάδες 5)

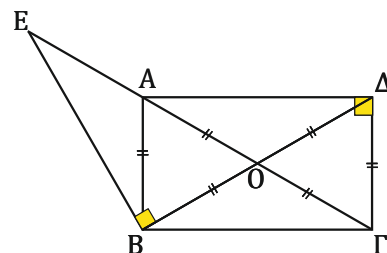
ΘΕΜΑ 2^ο

Στο ακόλουθο σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα τρίγωνα AOB και OΔΓ είναι ισόπλευρα και η BE είναι κάθετη προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{AEB} = 30^\circ$ (Μονάδες 5)

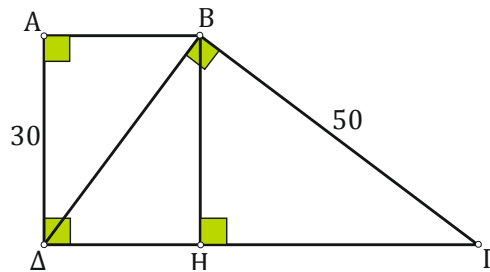
(β) $EB = B\Gamma$ (Μονάδες 5)

(γ) $EA = AB$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AD=30$ m και $B\Gamma=50$ m. Επίσης ισχύει $B\Delta \perp B\Gamma$. Φέρνουμε: $BH \perp \Delta\Gamma$.



(α) Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΗΓ.

(Μονάδες 4)

(β) Να βρείτε τη βάση ΑΒ του τραpezίου.

(Μονάδες 6)

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Μια πιτσαρία προσφέρει σε ειδική προσφορά πίτσες με επιλογή δύο οποιωνδήποτε από τις ακόλουθες επικαλύψεις: αλλαντικά, πιπεριές, μανιτάρια και τυρί φέτα. (α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος. (β) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης να επιλέξει για την πίτσα του επικάλυψη με αλλαντικά και μανιτάρια;

(Μονάδες 8)

B. Επτά θετικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν αριθμητικό μέσο 21. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή της διαμέσου αυτών των αριθμών; Να αιτιολογήσετε.

(Μονάδες 7)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 5^{ης} ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Η Ελένη έλυσε την εξίσωση (E): $\frac{x}{2} - (2x - 5) = x - 5$. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - (2x - 5) = x - 5 \text{ ή } x - 4x + 10 = 2x - 10 \text{ ή } -5x = -20 \text{ ή } x = 4.$$

Ο Νίκος έλυσε την εξίσωση: $x(x - 2) = 3(x + 2)$. Έχουμε:

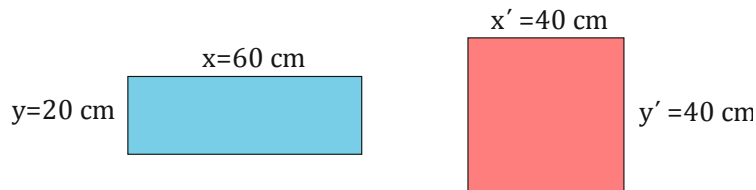
$$x^2 - 2x = 3x + 6 \text{ ή } x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 6.$$

Άρα κερδίζει ο Νίκος με μεγαλύτερη ρίζα τη $x=6$.

Ο μέσος όρος όλων των ριζών είναι: $M.O. = \frac{4 + (-1) + 6}{3} = 3$.

Άρα ο Νίκος κερδίζει 3 προσκλήσεις.

B. Όπως γνωρίζουμε δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες τους γωνίες ίσες. Όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν τις γωνίες τους ορθές, όμως δεν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:



Λαμβάνουμε τους λόγους: $\frac{x}{x'} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ και $\frac{y}{y'} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Άρα: $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$.

Επομένως, ο ισχυρισμός του Σωτήρη είναι λανθασμένος γιατί παραγνωρίζει την απαίτηση της αναλογίας των πλευρών. Αρκεί ένα αντιπαράδειγμα για να καταρρίψει τη γενική ισχύ της εικασίας.

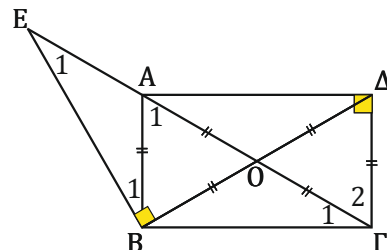
ΘΕΜΑ 2^ο

(α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο EBO γνωρίζουμε ότι $\hat{E}BO = 90^\circ$ και $\hat{E}OB = 60^\circ$ (το τρίγωνο ABO είναι ισόπλευρο). Επομένως:

$$\hat{E}_1 = \hat{A}EB = 180^\circ - \hat{E}OB - \hat{E}BO = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ \quad (1).$$

(β) Επειδή $\hat{B}GD = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$ (το τρίγωνο ΓΔΟ είναι ισόπλευρο) προκύπτει:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{E}GB = \hat{\Delta}GB - \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \quad (2).$$



Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ$ και συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. Επομένως:

$$EB=BG.$$

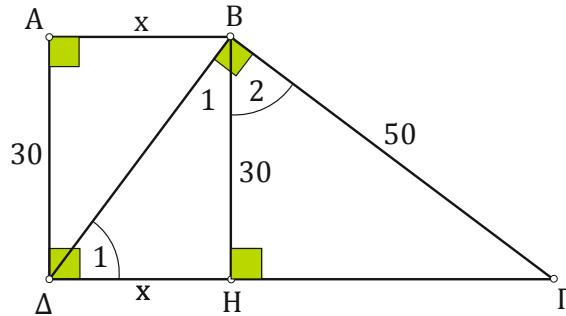
(γ) Έχουμε $\hat{B}_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (3). Από τις (1) και (3) συμπεραίνουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{B}_1 = 30^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. Επομένως:

$$EA=AB.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Συμπληρώνουμε το σχήμα της άσκησης.

(α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $BH=30$. Οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει:



$$GH^2 = BG^2 - BH^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \Rightarrow GH = 40 \text{ m.}$$

(β) Είναι:

$$\begin{cases} \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{B}_1 \end{cases} \text{ άρα: } \hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 \text{ ή } \text{εφ}\hat{\Delta}_1 = \text{εφ}\hat{B}_2 \text{ ή } \frac{30}{x} = \frac{40}{30}.$$

Επομένως: $AB = x = 22,5 \text{ m.}$

Εναλλακτικά μπορεί να εφαρμοστεί ομοιότητα τριγώνων.

Ένας τρίτος τρόπος προκύπτει από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ:

$$\begin{cases} B\Delta^2 = 30^2 + x^2 \\ B\Delta^2 = (x + 40)^2 - 50^2 \end{cases}$$

Οπότε: $900 + x^2 = x^2 + 80x + 1600 - 2500$ ή $80x = 1.800$.

Επομένως: $AB = x = 22,5 \text{ m.}$

(γ) Επίσης: $GD = 40 + 22,5 = 62,5 \text{ m.}$ Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι:

$$E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon = \frac{62,5+22,5}{2} \cdot 30 = \frac{85}{2} \cdot 30 = 1.275 \text{ m}^2.$$

ΘΕΜΑ 4ο

A.

(α) Η πιτσαρία στην προσφορά της παρέχει πίτσες με επιλογή δύο οποιωνδήποτε από τις ακόλουθες επικαλύψεις: αλλαντικά (Α), πιπεριές (Π),

μανιτάρια (M) και τυρί φέτα (Φ). Όλες οι δυνατές περιπτώσεις μπορούν να απαριθμηθούν με κατάλληλη οργάνωση. Για να σχηματίσουμε τους συνδυασμούς των τεσσάρων γραμμάτων A, Π, M, Φ ανά δύο βάζουμε πλάι σε καθένα από τέσσερα γράμματα καθένα από τα επόμενα και παίρνουμε τους παρακάτω συνδυασμούς:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΑΠ} \quad \text{ΑΜ} \quad \text{ΑΦ} \\ \text{ΠΜ} \quad \text{ΠΦ} \\ \text{ΜΦ} \end{array} \right\} (6 \text{ Τρόποι})$$

Για τον σχηματισμό του παραπάνω πίνακα ακολουθήσαμε την αρχή της πλήρους αντιστοιχίας και βρήκαμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τεσσάρων γραμμάτων του συνόλου $A=\{A, \Pi, M, \Phi\}$ ανά δύο. Πιο συγκεκριμένα:

- Δεν παραλείψαμε κανέναν συνδυασμό των τεσσάρων γραμμάτων ανά δύο, γιατί αν υποθέσουμε ότι έχει παραλειφθεί ένας συνδυασμός, έστω ο ΦΧ και αποκόψουμε το τελευταίο γράμμα Χ απομένει το γράμμα Φ πλάι από το οποίο έχουμε γράψει καθένα από τα υπόλοιπα γράμματα (τρίτη στήλη).
- Όλοι οι συνδυασμοί του πίνακα είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, γιατί όσοι προήλθαν από το ίδιο γράμμα διαφέρουν ως προς το τελευταίο γράμμα και όσοι προέκυψαν από διαφορετικά γράμματα διαφέρουν τουλάχιστον κατά το πρώτο.

Από τις εξηγήσεις που προηγήθηκαν ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{ΑΠ, ΑΜ, ΑΦ, ΠΜ, ΠΦ, ΜΦ\}.$$

(β) Έχουμε 6 δυνατές περιπτώσεις των τεσσάρων επικαλύψεων ανά 2. Η ευνοϊκή περίπτωση είναι μόνο μία: πίτσα με επικάλυψη αλλαντικά με μανιτάρια. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/6$.

Β. Η ζητούμενη διάμεσος είναι 36. **Αιτιολόγηση:** Το άθροισμα των επτά θετικών ακέραιων αριθμών με αριθμητικό μέσο 21 είναι $\Sigma = 21 \cdot 7 = 147$. Για να βρούμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός (επτά), η διάμεσος θα είναι ίση με τη μεσαία παρατήρηση. Εφόσον αναζητούμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της διαμέσου, θα πρέπει να καταστήσουμε όλους τους άλλους αριθμούς όσο γίνεται μικρότερους. Αυτό μπορεί να επιτευχτεί αν οι τρεις αριθμοί που είναι μικρότεροι της διαμέσου είναι ίσοι με τη μονάδα και οι τρεις μεγαλύτεροι να είναι ίσοι με τη διάμεσο. Ισχύει $147 - 3 = 144$ και $144 : 3 = 36$. Έτσι οι αριθμοί είναι:

$$1, 1, 1, \underline{36}, 36, 36, 36,$$

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ 5ης ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ