

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$ , για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

**β)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

**γ)** Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln x .$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = g \circ h$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x > 1$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f^{-1} = f$  (όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ ).

**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $f(x) = \sin x$  έχει λύση στο  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in [1, 2]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία  $(\epsilon_1): y = -x + 2$  (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία  $(\epsilon_2): y = x$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$ , για κάθε  $x \in (1, 2)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι:

i.  $f(x) \geq 2x - 2$ , για κάθε  $x \in [1, 2]$ . (μονάδες 2)

ii.  $1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 & , x < 0 \end{cases}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $A(x_1, f(x_1))$  με  $x_1 > 0$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ , έχει εξίσωση  $y = e \cdot x$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της  $f$  έχουν, εκτός από το σημείο επαφής  $A$ , ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο  $B(x_0, f(x_0))$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και την εφαπτομένη της, ( $\epsilon$ ) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες  $x = x_0$  και  $x = 1$ . Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του  $x_0$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο  $B$  του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $BO$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της  $f$ , έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**