

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### Θέμα Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση  $\langle\langle 1 - 1 \rangle\rangle$ .

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης  $f$ , η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς  $x$ .

**β)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  τότε υπάρχουν πάντα τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ .

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ .

**ε)** Για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$ .

**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{\alpha x + 1}$ ,  $x > -\frac{1}{\alpha}$  με  $\alpha \neq 0$  για την οποία η κλίση της γραφικής της παράστασης στο σημείο με τετμημένη  $x = 0$  είναι ίση με 2.

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}, x < 1.$$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση  $f^{-1} \circ f^{-1}$  και έχει τύπο

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = -\frac{1}{x}, x < 0.$$

**Μονάδες 6**

**B4.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(e^x)$ .

**Μονάδες 6**

**Θέμα Γ**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \cos^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ \lambda x^3 + x + \frac{3}{2}, & x \geq 0 \quad \text{με } \lambda \neq 0 \end{cases}$

**Γ1.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y = 4x - \frac{1}{2}$  να εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

**Μονάδες 7**

➤ Για την τιμή  $\lambda = 1$ .

**Γ3.** Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{x^3} \right]$

**Μονάδες 5**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) > 0$  για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2(\sin x) \cdot f(x) = 3 + \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  διατηρεί σταθερό πρόσημο και να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

➤ Αν  $f(x) = \sin x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  τότε

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = -2\eta\mu x.$$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = \ln f(x)$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $\varphi$  τέμνει την ευθεία  $y = 1$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $\alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιος ώστε  $f^2(\xi) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ .

**Μονάδες 7**

**Καλή επιτυχία και Καλή Χρονιά**