



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2016**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ  
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). **Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μια ώρα από την έναρξη της εξέτασης.**
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή, αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.**
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.**
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. Ο «**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**» θα διενεργηθεί στις **28 Ιανουαρίου 2017** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **4 Μαρτίου 2017** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. που θα γίνει **στις 8 Απριλίου 2017** θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **34<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Οχρίδα, Μάιος 2017)**, στην **21<sup>η</sup> Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Βουλγαρία, Ιούνιος 2017)** και στην **58<sup>η</sup> Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρίο ντε Τζανέιρο, Ιούλιος 2017)**.
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

**11. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και να την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο  
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος  
Νικόλαος Αλεξανδρής  
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ο Γενικός Γραμματέας  
Ιωάννης Τυρλής  
Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

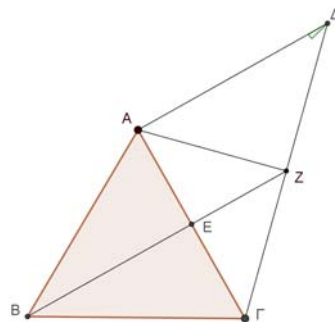
$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς  $\alpha$ . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ =  $\alpha$  κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

(α) Να αποδείξετε ότι ΖΑ = ΖΓ.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΒ.



**Πρόβλημα 3**

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση  $\alpha\%$ . Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά  $\beta\%$ . Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του  $\beta$  συναρτήσει της τιμής του  $\alpha$ .

**Πρόβλημα 4**

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
 77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
 12 Νοεμβρίου 2016

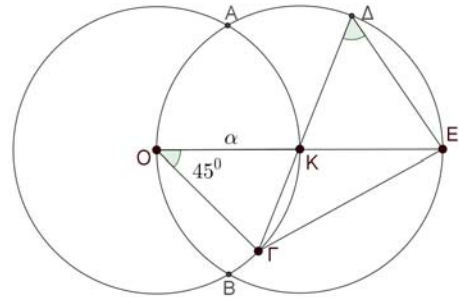
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.** Αν  $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$  και  $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$ , να βρείτε την αριθμητική

τιμή της παράστασης:  $A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$ .

**Πρόβλημα 2.**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $OK = a$  και δύο κύκλοι ακτίνας  $a$  που έχουν κέντρα στα σημεία  $O$  και  $K$ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A$  και  $B$ . Το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στο τόξο  $KB$  και η ευθεία  $\Gamma K$  τέμνει τον κύκλο  $C_2$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $a$  στο σημείο  $\Delta$ . Η ευθεία  $OK$  τέμνει τον κύκλο  $C_2$  κέντρου  $K$  και ακτίνας  $a$  στο σημείο  $E$ . Αν είναι  $\hat{K}\hat{O}\hat{\Gamma} = 45^\circ$ , να βρείτε :



- (α) πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{E}$ , και  
 (β) το εμβαδόν του τριγώνου  $O\Gamma E$  συναρτήσει του  $a$ .

**Πρόβλημα 3**

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

**Πρόβλημα 4**

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία  $a, b, c, d$ , ισχύει ότι:  $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$ .

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα  $\frac{A}{36}, \frac{B}{45}$  υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων  $a, b, c, d$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
 Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
12 Νοεμβρίου 2016

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του  $x$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19. \quad (1)$$

$$\frac{2x - 1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x - 21}{9} \quad (2)$$

**Πρόβλημα 2**

Να βρεθεί θετικός ακέραιος  $A = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ ,  $n \geq 2$ , ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Στο ύψος  $AM$  θεωρούμε σημείο  $K$  τέτοιο ώστε  $MB = M\Gamma = MK$ . Με βάση την  $AK$  κατασκευάζουμε τετράγωνο  $AKEZ$  (στο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AM$ , που περιέχει το  $B$ ) και ισόπλευρο τρίγωνο  $AK\Delta$  (στο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AM$ , που περιέχει το  $\Gamma$ ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta E$  και  $\Gamma Z$ , τέμνονται πάνω στην  $AB$ .

**Πρόβλημα 4**

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο  $k$ , ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού  $\alpha$  για την οποία ο ακέραιος

$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$

είναι πρώτος.

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $\Delta$  στη διάμεσό του  $AM$  τέτοιο, ώστε  $MB = M\Gamma = M\Delta$ . Με βάση την  $A\Delta$  κατασκευάζουμε τετράγωνο  $A\Delta E Z$  (στο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AM$ , που περιέχει το  $\Gamma$ ). Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των  $AE$  και  $\Gamma Z$ , να αποδείξετε ότι η  $MK$  είναι παράλληλη στην  $\Delta Z$ .

**Πρόβλημα 3**

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)(2\alpha + 7)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha + 4}{\alpha}}.$$

**Πρόβλημα 4**

Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z, w$  που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ x + \frac{1}{x} - w = 2, \quad y + \frac{1}{y} - w = 2, \quad z + \frac{1}{z} + w = 2, \quad y + \frac{1}{z} + w = 2 \right\}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**77<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**12 Νοεμβρίου 2016**

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση  $y = x^2$  και τα σημεία της  $A, B$  και  $\Gamma$  με τετμημένες  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$ . Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση του  $\omega$ .

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Στο ύψος  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $K$  ώστε  $\Delta B = \Delta\Gamma = \Delta K$ . Οι προεκτάσεις των υψών  $BE$  και  $\Gamma Z$  τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $N, K$  και  $M$  είναι συνευθειακά.

**Πρόβλημα 3**

Έστω  $P(x)$  πολύωνμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α)  $P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$ .

(β) Όλοι οι συντελεστές του  $P(x)$  είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του  $P(5)$ .

**Πρόβλημα 4**

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό  $A = 14^7 + 14^2 + 1$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*