ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Μονάδες 7

Α2. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ μπορεί να καταλήξει σε μία από τις περιπτώσεις της στήλης 3 του παρακάτω πίνακα ανάλογα με το τι είναι ο αριθμός α της στήλης **1** και ο αριθμός β της στήλης **2.**

Στήλη 1	**Στήλη 2**	**Στήλη 3**
	1. $\beta = 0$	**(i)** Μοναδική λύση
Α. $\alpha = 0$		
	2. $\beta \neq 0$	**(ii)** Αδύνατη
Β. $\alpha \neq 0$		
	3. $\beta \in \mathbb{R}$	**(iii)** Ταυτότητα

Συνδυάστε κατάλληλα ένα στοιχείο της στήλης **1** με ένα μόνο στοιχείο της στήλης **2** για να καταλήξουμε σε ένα μόνο συμπέρασμα της στήλης **3** το οποίο να ισχύει για όλες τις εξισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta = 0$.

Μονάδες 3

Α3. Να μεταφέρετε συμπληρωμένες τις παρακάτω ισοδυναμίες ώστε να ισχύουν για κάθε $\alpha,\beta \in R$.

(α) $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow$ ....

(β) $\alpha^2+\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow$ ....

(γ) $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow$ ....

(δ) $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow$ ....

Μονάδες 6

Α4. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Για κάθε θετικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2>\alpha$ >>

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Αληθή ή Ψευδή δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για τους θετικούς αριθμούς α,β ισχύει $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

(β) Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

(γ) Αν $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ τότε $\alpha=\beta$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in R$

(δ) Αν οι αριθμοί α,β είναι ετερόσημοι τότε ισχύει $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

(ε) Αν $\alpha+\beta<0$ τότε κατ΄ανάγκη $\alpha<0$ και $\beta<0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις :

$\kappa=\left|3-\sqrt{17}\right|+\left|5-\sqrt{17}\right|$ και $\lambda=x^2-(x-3)(x+3)$ όπου $x\in R$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$ και $\lambda=9$

Μονάδες 6

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $|x+\kappa| = \sqrt{\lambda}$

Μονάδες 6

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $|2x-1| \le \kappa + \sqrt{\lambda}$

Μονάδες 7

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ αν $x \in [-1,1]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί :

$$\alpha = \left(\sqrt{5}-1\right)^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)^2 - 4\left(1-\sqrt{5}\right) + 5 \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

και η παράσταση $A = |x-1| - |x-4| + 5$ όπου ο πραγματικός αριθμός x ανήκει στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $A = 2x$ και λύσετε την εξίσωση $\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1}$

Μονάδες 8

Γ3. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x+2, y-1$ όπου $\alpha \le x \le \beta$ και $\alpha + 1 \le y \le 2\beta$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρός και το εμβαδόν του.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $x \in [\alpha, \beta]$ να λύσετε την εξίσωση $\left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - |x-4| + 5\right)^3 = -27$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^4 x-\lambda^3 = x-\lambda \ (1)$, όπου $x\in R$ και λ ένας πραγματικός αριθμός .

Δ1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\lambda\in R$ ώστε η εξίσωση (1) να είναι αδύνατη και ότι η μοναδική της λύση είναι η $x_0=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}$

Μονάδες 8

Αν x_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και λ_1,λ_2 οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα τότε :

Δ2. Να αποδείξετε ότι $|x_0|\le\dfrac{1}{2}$

Μονάδες 5

Δ3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[-3\lambda_1]{5}$ και $\sqrt{\lambda_2^{\,2}-\lambda_1^{\,3}+1}$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε την τιμή του x_0 αν ισχύει : $\lambda_2+\sqrt{16x_0^{\,2}+8x_0+1}=1-|16x_0^{\,2}-1|$

Μονάδες 5