



**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$   
είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = vx^{v-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$   
ελάχιστο το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

**<< Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$  >>**

**(α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό **Αληθή** ή **Ψευδή**.

**Μονάδες 1**

**(β)** Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο (α) ερώτημα.

**Μονάδες 3**

**A4.** Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιο σας, με συμπληρωμένες τις δύο τελευταίες γραμμές τοποθετώντας ερωτηματικό (;) στις περιπτώσεις όπου έχουμε απροσδιοριστία.

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της $f$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	0	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha > 0$
Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της $g$ είναι:	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:						
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι						

**Μονάδες 6**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

(β) Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε δε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

(γ) Αν μια συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(\Delta)$ , τότε και η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

(δ) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα

(ε) Η συνάρτηση  $f(x) = a^x, a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = x \cdot a^{x-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g(x) = 1 - e^x, x \in \mathbb{R}$  και  $h(x) = \ln \frac{1}{x}, x > 0$

**B1.** Να ορίσετε την συνάρτηση  $h \circ g$

Μονάδες 5

**B2.** Αν  $f(x) = (h \circ g)(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^x}\right), x < 0$  να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 8

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της.

Μονάδες 7

**B4.** Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu f(x)}{\ln(-x)} = 0$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω  $f$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $A = [-5, 5]$  για την οποία ισχύουν ότι:

$$x^2 + f^2(x) = 25 \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } f(0) = 5$$

**Γ1.** Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $A = [-5, 5]$

Μονάδες 2

Γ2. Να δείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $x \in A$

Μονάδες 7

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, 5]$

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^3) - f(x^2) > x^3 - x^2$  στο διάστημα  $[0, 1]$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η  $f$  έχει μέγιστη τιμή  $f(0) = 5$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση  $\sqrt{24 + \sin^2 x} = 6 + \eta \mu^2 f(x)$  είναι αδύνατη .

Μονάδες 7

#### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x - 2} = 1$  και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 10$
- Η γραφική παράσταση της  $g$  διέρχεται από το σημείο  $M(1, -5)$ , η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μοναδική λύση την  $x = 3$  και  $g(0) \cdot g(4) < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι (α)  $f'(2) = 5$  (β)  $g'(1) = 5$

Μονάδες 8

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**  
Α΄ ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3Θ0(ε)

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $B(1, g(1))$

**Μονάδες 5**

Δ3. Να μελετήσετε τη  $g$  ως προς το πρόσημο και να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in [3, 5]$  ώστε  $g(x) \leq g(x_0)$  για κάθε  $x \in (-\infty, 5]$

**Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $xf(x) = (x-2)e^x$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 2)$

**Μονάδες 6**

ΟΕΦΕΕ