



**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\} \text{ με } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \text{ δηλαδή } (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

**Μονάδες 6**

**A2.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:  $f(x) \cdot g(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

τότε:  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**(α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως ΑΛΗΘΗ ή ΨΕΥΔΗ.

**(β)** Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο **(α)** ερώτημα.

**Μονάδες 4**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα από τον αντίστοιχο αριθμό το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

**1.** Η αντίστροφη της συνάρτησης  $f(x) = e^{x-2} + 2, x \in \mathbb{R}$  είναι:

**(α)**  $f^{-1}(x) = \ln(x - 2) + 2, x > 2$

$$(\beta) f^{-1}(x) = \ln(x+2) + 2, x > -2$$

$$(\gamma) f^{-1}(x) = \ln(x+2) - 2, x > -2$$

2. Η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = 3^{x^2}$  ισούται με

$$(\alpha) 2x \cdot 3^{x^2}$$

$$(\beta) x^2 \cdot 3^{x^2-1}$$

$$(\gamma) 2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3$$

3. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1,1]$  με  $f(-1) = 3$  και  $f(1) = 4$

Τότε μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι:

(α) Η μέγιστη τιμή της  $f$  το 3 και η ελάχιστη το 4.

(β) Η εξίσωση  $f(x) = \pi$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(-1,1)$ .

(γ) Η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $[-1,1]$ .

**Μονάδες 9**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε

αυτό ισούται με το  $f'(x_0)$ .

2. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$  τότε και η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι πάντα παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

3. Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  αντιστρέφεται τότε ισχύει  $f(f^{-1}(x)) = x, x \in A$ .

4. Αν για μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$  με  $x_0 \in A$  τότε λέμε ότι στη θέση  $x_0$  η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο με τιμή  $f(x_0)$ .

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}, & x \neq 3 \\ k^2 - 2k + 8, & x = 3 \end{cases}$

και η συνάρτηση  $h(x) = x^{2017} + x^{2019}$  με  $A_h = [0, 1]$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $k = 1$  και  $f(x) = x + 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 7

**B2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση  $h \circ f$  και ο τύπος της είναι

$$g(x) = (h \circ f)(x) = (x + 4)^{2017} + (x + 4)^{2019} \text{ με πεδίο ορισμού } A = [-4, -3].$$

Μονάδες 6

**B3. (α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$ .

Μονάδες 4

**(β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in [-4, -3]$  τέτοιο ώστε:

$$2018 \cdot g(x_0) - 2035 = 0$$

Μονάδες 4

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\eta\mu f(x)}{g(x)}$ .

Μονάδες 4

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

(i)  $f(0) > 1$

(ii)  $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι  $f(x) = e^x + 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

Γ2. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^x + 4x = \lambda$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$  για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x + 2$  και  $g(x) = -x^2 + 2$  έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 6**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2) - f(-x + 2) > 4(g(x) - x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 4**

Γ4. Δυο σημεία με ίδια τετμημένη  $A(x(t), y_1(t))$  και  $B(x(t), y_2(t))$  κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους  $x$  αυξάνεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/sec}$  να βρείτε τη θέση των σημείων για την οποία ισχύει:  $y_1'(t) = 2y_2'(t) + 1$  με  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η πολυωνμική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 1$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι:

(α)  $f(1) = 1$

(β)  $f'(1) = 2$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού και ο τύπος της είναι

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία έχει το ίδιο ελάχιστο με την  $f$  στην μοναδική θέση  $x = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο  $M(x_0, y_0)$  με  $x_0 \in (0, \alpha)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Αν επιπλέον ισχύει:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0) - h)}{2h} = g'(g(x_0))$

με  $x_0 \in (0, \alpha)$  τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g'$  δεν είναι αντιστρέψιμη.

**Μονάδες 8**