

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ
- ΑΚΡΟΤΑΤΑ
- ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ
ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΚΩΣΤΑΣ ΤΣΑΒΕΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΑΒΕΣ

9. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + 3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
10. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο A , να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .
11. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
12. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A και ισχύει: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .
13. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x + 3)$.
14. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ είναι γνησίως αύξουσα.

☞ **μονοτονία και ανισώσεις**

15. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.
i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση: $x^3\sqrt{x^3-1} > 8\sqrt{7}$.
16. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{4}{x^3} - 5x$, $x > 0$.
i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{4}{x} - 5\sqrt[3]{x} + 1 < 0$.
17. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^7 + 5x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση: $x^{21} + 5x^9 + 2x^3 < 8$.

18. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία $A(2, 7)$ και $B(3, 5)$.
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(4x - 1) < 5$.
γ) Να αποδείξετε ότι: $f(x^2 + 2) \leq 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
19. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(3, -2)$.
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(|x|) + 2 < 0$.
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.
- i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii) Να δείξετε ότι: $f\left(2016 + \frac{1}{2016}\right) > 1$.
iii) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 2$.
21. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 και τον αρνητικό ημιάξονα Oy' , να λύσετε την ανίσωση: $f(2 - x^2) < 0$.
22. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{4}\right)$ και η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$, να λύσετε την ανίσωση: $f(|2x-1|) < 3$.
23. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε οι αριθμοί $f(1)$, $f(3)$ και $f(2)$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.
24. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε: $f(f(x)) + 3f(x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
25. α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα Δ .
β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^5 + x^3 + x - 3 = 0$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8|x| + 21$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 4$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 3$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$ όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$, τότε:
α) να βρείτε την τιμή του a .
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2$.

29. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2 - 2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$.

β) η συνάρτηση $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 5$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι 1.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + (x - 1)^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) ο αριθμός 3 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - |x + 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4|x - 3| + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$

β) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

34. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$

β) $f(x) = 1 - (x + 2)^4$

$$\gamma) f(x) = 3|x-1| - 2$$

$$\delta) f(x) = 2 - 3\sqrt{x-1}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{2}{x^2+5}$$

$$\sigma\tau) f(x) = -\frac{3}{|x|+2}.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

β) Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{2013}\right) + \frac{3}{7}f\left(\frac{1}{2014}\right) > 10$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\lambda + 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

37. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f(x) \leq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = f(2)$

β) η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

38. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\alpha) f(x) = 5x^6 - 3x^2 + 2$$

$$\beta) f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$$

$$\gamma) f(x) = x^3 - 3x|x| + 2x$$

$$\delta) f(x) = |3x-2| + |3x+2|$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$\sigma\tau) f(x) = x^5 + \frac{1}{x}$$

$$\zeta) f(x) = \sqrt{4-|x|}$$

$$\eta) f(x) = \frac{x^3}{|x|-1}.$$

39. Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\beta) f(x) = x^2 - x$$

$$\gamma) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3|x| - 2}{\frac{1}{x} - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 1}{|x| - 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

42. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή, γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε: $f(2) = 5$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(3x - 8) + 5 < 0$.

43. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το A και είναι περιττές, να δείξετε ότι η συνάρτηση:

- α) $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι περιττή.
β) $t(x) = f(x)g(x)$ είναι άρτια.

44. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

- α) $g(x) = f(2 + x) - f(2 - x)$ είναι περιττή.
β) $h(x) = f(3 - x) + f(3 + x)$ είναι άρτια.

45. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - xf(x) + 2$.

- i) Να βρείτε το $g(0)$.
ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια.

46. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x) + f(-x) = x^3|x| - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

47. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε το $f(0)$.
ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

48. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = |x| \quad g(x) = |x| + 1 \quad h(x) = |x| - 2$$

$$\beta) f(x) = |x| \quad g(x) = |x - 2| \quad h(x) = |x + 1| + 3.$$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

α) κατά 2 μονάδες προς τα κάτω

β) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά

γ) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 7, x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

α) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω

β) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω

γ) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω

δ) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 30x + 47, x \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, x \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 5x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 22, x \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, x \in \mathbb{R}.$$

β) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .