

1. Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της **αντικατάστασης**:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases} & \beta) \begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} 2(x - 2y) + y = 8 \\ x - 2y = 3 \end{cases} & \delta) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \\ \epsilon) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = x + 2 \end{cases} & \sigma\tau) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} & \zeta) \begin{cases} x + 3y = 1 \\ (x + 3y) + \frac{y}{2} = 2 \end{cases} & \eta) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \end{array}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των **αντίθετων συντελεστών**:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} & \beta) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \\ \delta) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} & \epsilon) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases} & \sigma\tau) \begin{cases} \frac{x+1}{4} = \frac{y+7}{3} \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \\ \zeta) \begin{cases} \frac{x+3}{2} + \frac{y}{7} = 2 \\ \frac{x-1}{5} + \frac{y+2}{2} = 1 \end{cases} & \eta) \begin{cases} \frac{x+11}{5} = 5 - \frac{y+4}{3} \\ \frac{1-x}{7} = y - 7 \end{cases} & \end{array}$$

3. Να λυθούν τα συστήματα (αδύνατο – άπειρες λύσεις):

$$\alpha) \begin{cases} x - 4y = 2 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} y = 3x + 9 \\ x + 3 = \frac{y}{3} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x + 5y = 10 \\ \frac{x}{5} + y = 3 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x - 4 = \frac{y}{2} \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των **οριζουσών**:

$$\alpha) \begin{cases} x - (\sqrt{2} + 1)y = -1 \\ \sqrt{2}x - y = 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 3 - \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{3} + 5 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = 3 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 1 \end{cases}$$

5. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές του λ (**διερεύνηση**):

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases} & \beta) \begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases} \\ \delta) \begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ 4x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases} & \epsilon) \begin{cases} (\lambda + 1)x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 1)y = 2 \end{cases} & \sigma\tau) \begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x + (\lambda + 1)y = -\lambda \end{cases} \end{array}$$

6. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + (2 - \mu)y = 0 \\ \mu x + (\lambda^2 + 1)y = 1 \end{cases}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος: $(\Sigma) \begin{cases} (D-1) \cdot x + y = 1 \\ D \cdot x + 3y = 2 \end{cases}$, να

λύσετε το σύστημα (Σ) .

Όμοια για το (Σ) : $\begin{cases} (D-2) \cdot x - D \cdot y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

8. Δίνονται τα συστήματα: $\begin{cases} \lambda x + 3y = \mu \\ \mu x + y = \lambda \end{cases}$ και $\begin{cases} 3x - y = \lambda \\ \lambda x + (\mu - 2)y = 4 \end{cases}$ με

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ για τις οποίες τα παραπάνω συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα.

9. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το

σύστημα $\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - 4y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

10. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, να δείξετε ότι το σύστημα

$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 2x - 2\lambda y = \lambda \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

11. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: x - \lambda y + 1 = 0$ τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των ευθειών: $\varepsilon_1: 2ax + (2a - 1)y = 1$ και $\varepsilon_2: 2x + ay = a$.

13. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 - 2\lambda \\ x + \lambda y = 2\lambda^2 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

14. Έστω ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + y = \lambda \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) .

α) Να βρείτε τις τιμές του λ .

β) Αν $|x_0| + |y_0| = 2$, να βρείτε το λ .

15. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 2 - \lambda \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$. Να βρείτε το λ ώστε το σύστημα

α) να έχει άπειρες λύσεις

β) να έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) και να ισχύει: $x_0 = 2y_0$.

16. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = \lambda - 1 \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = 4 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Να βρείτε την τιμή του

λ για την οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) τέτοια ώστε να ισχύει: $x + y > 1$.

17. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = \kappa + 1 \\ 3x + \lambda y = 9 - 3\kappa \end{cases}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε το σύστημα να έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση και $\kappa = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

iii) Αν το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις (x, y) , να αποδείξετε ότι: $x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$.

18. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και δύο λύσεις του (x_1, y_1)

και (x_2, y_2) διαφορετικές μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda = 1$ β) $y_1 y_2 + x_1 + x_2 = 1 + x_1 x_2$.

19. Αν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y έχει μοναδική λύση και

ισχύει: $\begin{cases} 2D_x - D_y = D \\ D_x + D_y = 2D \end{cases}$, να βρείτε τα x και y .

20. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $D \neq 0$ και $D_x^2 + 4D_y^2 = 4D_x D_y$.

i) Να δείξετε ότι: $x = 2y$.

ii) Αν ισχύει επίσης $D_x + D_y = 12D$, να βρείτε τις τιμές των x και y .

21. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $D_x \neq D_y$ και $2D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D(D_x - D_y)$.

i) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii) Να βρείτε τις τιμές των x και y .

22. Αν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y έχει μοναδική λύση και ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2DD_x$, να βρείτε τα x και y .
23. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y για το οποίο ισχύει η σχέση: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$. Να δείξετε ότι:
 i) $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$.
 ii) Να βρείτε τα x και y .
24. Αν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y έχει μοναδική λύση και ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 - 2DD_x + 4DD_y = 0$, να βρείτε τα x και y .
25. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y για το οποίο ισχύει η σχέση: $D_x^2 + D_y^2 + 13D^2 \leq 2D(2D_x - 3D_y)$. Αν οι ορίζουσες D_x, D_y δεν είναι και οι δύο μηδέν, να δείξετε ότι:
 i) το σύστημα έχει μοναδική λύση
 ii) $x = 2$ και $y = -3$.

**συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους
από 2 αγνώστους**

26. Να λύσετε τα συστήματα (μοναδική λύση):

$$\alpha) \begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = -7 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

27. Να λύσετε τα συστήματα (αδύνατα):

$$\alpha) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 3x - 3y - 2z = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ 5x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 11x + 13y + 17z = 23 \\ 19x + 17y + 13z = 29 \\ 30x + 30y + 30z = 51 \end{cases}$$

28. Να λύσετε τα συστήματα (άπειρες λύσεις):

$$\alpha) \begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x + 3y - 7z = 0 \\ 3x - y - 5z = 0 \\ 5x + 2y - 12z = 0 \end{cases}$$

29. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ z + x = 5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = -1 \\ z + x = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \\ 2x + y - z = 30 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους που λύνονται με τη βοήθεια βοηθητικών αγνώντων

30. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \\ 8x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 4|x| - 2|y| = 11 \\ 6|x| - 5|y| = 15,5 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{3}{x-2} + \frac{5}{y+3} = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{1}{y+3} = 5 \end{cases}$$

μη γραμμικά συστήματα

31. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} -2x + y = 4 \\ 2x^2 = y \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x - y = 4 \\ xy + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

32. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + y = 4 \\ xy + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

33. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 2xy - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ xy + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

34. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} xy - y^2 + 2y = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 2xy + 4 \end{cases}$$

35. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{3}{x} + y = 0 \\ x + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} xy = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

36. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β έτσι ώστε:
 $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 16$.

37. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και η παραβολή $\varsigma: y = x^2$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία ε τέμνει την παραβολή ς σε δύο σημεία.
- ii) Για $\kappa = 3$, να βρείτε τα κοινά σημεία των ε και ς .

38. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος $\varsigma: x^2 + y^2 = 10$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία ε εφάπτεται στον κύκλο ς .
- ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του κ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.

39. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\lambda^2 + \lambda)x - 2$ και $\varepsilon_2: y = -x - 1$.

- α) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία ε_1 να διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- γ) Αν (x_0, y_0) το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 ,
 - i) να δείξετε ότι: $x_0 + y_0 = -1$.
 - ii) να βρείτε το λ ώστε: $1 < \frac{1}{x_0} < 3$.