

1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :
 α) $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{2} - 2$ β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2} - 5$ γ) $f(x) = -2\eta\mu 4x + 2$
2. Να λυθούν οι εξισώσεις :
 i) $2\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x - 3 = 0$ ii) $2 - \eta\mu^2 x = 5\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x$
 iii) $2\sigma\upsilon\nu(2x - \frac{\pi}{5}) = 1$ iv) $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu \frac{5x}{7}$
 v) $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2 = 2 \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$
3. α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$.
 β) Ποιες από τις λύσεις ανήκουν στο διάστημα $(0, 3\pi)$;
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(\frac{\pi}{2}, 1)$.
 α) Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x - \frac{\pi}{7})$ με τον άξονα $x'x$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x) - \eta\mu(\pi + x)$.
 α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 β) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f .
 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου .
6. Οι ετήσιες πωλήσεις ενός προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $f(t) = 15 + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε έτη και $0 < t \leq 6$.
 α) Να βρεθεί το έτος που θα έχουμε το μέγιστο αριθμό πωλήσεων και πόσες θα είναι αυτές .
 β) Σε ποιο έτος οι πωλήσεις θα φτάνουν τις 16.000 κομμάτια ;
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + 4x) - 2\eta\mu(\pi + 4x)$ με $\alpha > 0$.
 α) Να γράψετε την συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$.
 β) Να βρείτε τον α , αν η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3 .
 γ) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση όταν $x \in [0, \pi]$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + 3\eta\mu \frac{x}{2}$.

α) Αν $x \in [0, 4\pi]$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f και τις τιμές του x που τις παρουσιάζει.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x - \frac{\pi}{3}) = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu \frac{2x}{3} + \beta$, $\alpha > 0$.

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\frac{3\pi}{2}, 3)$ και η μέγιστη τιμή της είναι 5. Να βρείτε :

α) Τα α , β .

β) Την περίοδο της f .

γ) Τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 4$.

10. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το βαθμό του πολωνύμου $P(x) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^4 + (\lambda - 1)x^3 - (\lambda - 2)x^2 + x - \lambda^2$.

11. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση : $(2x + 1)P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$.

12. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $x + 1$ να είναι παράγοντας του πολωνύμου $P(x) = (\lambda - 1)x^3 - 2(\lambda + 1)x^2 - (6\lambda + 2)x - 7$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

13. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το $P(x) = x^3 - 2\alpha x^2 - 5\alpha x + 3\beta$ έχει παράγοντα το $(x + 2)(x - 3)$.

14. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το $P(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x - 1$ έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.

15. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 7$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(4x + 3)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

16. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με τα πολυώνυμα $x + 1$ και $x - 2$ δίνει αντίστοιχα υπόλοιπο 2 και 8, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x + 1)(x - 2)$.

17. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta$ διαιρούμενο με το

πολυνόμιο $x^2 - 5x + 6$ δίνει υπόλοιπο $2x + 3$, να βρεθούν οι α, β .

18. Δίνεται το πολυνόμιο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P(x) - P(x - 1) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και με $P(0) = 1$.

α) Να δείξετε ότι : $P\left(-\frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{3}{2}\right)$.

- β) Αν u_1 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2004$ και u_2 το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2003$, να δείξετε ότι:
 $u_1 - u_2 = 4009$.

19. Δίνεται το πολυνόμιο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20$.

- α) Αν το πολυνόμιο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x + 1$ είναι το -16 , να δείξετε ότι $\alpha = 12$ και $\beta = 6$.
β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$.

20. Δίνεται το πολυνόμιο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$.

- α) Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 - 1$ και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.
β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.
γ) Για $\alpha = 3$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

21. Δίνεται πολυνόμιο $P(x)$ τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει η σχέση :

$$(x - \pi) P(\sin x) - 2x P(\eta \mu x) = x - 2\pi \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να υπολογίσετε τα $P(0)$ και $P(1)$.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - x$.
γ) Αν το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ είναι το $3x - 1$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3x^2 - x$.

22. Δίνεται πολυνόμιο $P(x) = x^4 - 7x^3 + \alpha x^2 - \alpha x + 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

- α) Να βρείτε τον αριθμό α .
β) Για $\alpha = 17$:
i) Να λυθεί η εξίσωση : $P(x) = 0$

- ii) Να λυθεί η ανίσωση: $P(x) > 0$
23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $P(x+5)=x^2Q(x)+4x-1$.
Αν το $Q(x)$ διαιρούμενο με το $x + 2$, δίνει υπόλοιπο 5, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x - 3)$.
24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\beta - \alpha)x^2 - (1 + 5\beta)x + \alpha$.
- α) Να βρεθεί ο α ώστε να έχει παράγοντα το $x - 5$.
- β) Για την τιμή του α που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- γ) Να βρείτε το β , ώστε οι ρίζες $x_1, 5, x_2$ της εξίσωσης να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
- δ) Μία αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = \alpha$, και $\omega = \beta$. Να βρείτε το άθροισμα $A = \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \dots + \alpha_{2004}$.
25. Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha+1)x^3 + \beta x^2 - \beta x + \alpha$, $\alpha \neq 0$
το οποίο έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ και ρίζα το 2.
- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- β) Αν $\alpha = 6$, $\beta = 17$ και x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του $P(x)$ με $x_1 < x_2 < x_3$, να δείξετε ότι οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 αποτελούν δ.ο.α.π., ενώ οι αριθμοί $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$, αποτελούν δ.ο.γ.π.
26. α) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου
 $P(x) = x^4 - x^3 + \log \frac{1}{\alpha^5} + \log^2 \alpha - 2$ με το $x + 2$, αν γνωρίζουμε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και $\alpha > 999$.
- β) Να βρεθεί ο αριθμός $\ln \left(\frac{P(e) + 8}{e - 1} \right)$ με $0 < \alpha < 999$.
27. Οι διαστάσεις (σε εκατοντάδες μέτρα) ενός αγροτεμαχίου σχήματος ορθογωνίου αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$.
Ο ιδιοκτήτης του το χωρίζει σε άνισα μεταξύ τους κομμάτια των οποίων τα εμβαδά εκφρασμένα σε στρέμματα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 100^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \log 25$.
- Στο 3^0 κατά σειρά μεγέθους κομμάτι σπέρνει αγροτικό προϊόν με κόστος $0,2 \text{ €} / \text{m}^2$. Αν η σπορά στο 3^0 κομμάτι κόστισε 1000 € , να

βρεθεί σε πόσα κομμάτια χώρισε το αγροτεμάχιο ο γεωργός .

28. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = (4 - \lambda^2)^x$ με $4 - \lambda^2 \neq 1$.

α) Για ποιες τιμές του λ ορίζεται η συνάρτηση ;

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα .

γ) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $A(1, \frac{1}{4})$.

29. Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $e^{2x} - e^x - 2 > 0$

β) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 > 0$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log_3(x + 3) - 2$. Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της .

β) Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες .

γ) Τον αριθμό α , ώστε το σημείο $(\alpha, -\frac{1}{2})$ να ανήκει στην C_f .

31. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$ και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

32. Μία αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $a_1 = \ln 2$ και διαφορά $\omega = \ln 4$.

α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι ίσο με $n^2 \ln 2$.

β) Αν ισχύει ότι $S_n \geq 50a_n$ να βρείτε την μικρότερη τιμή του φυσικού n .

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

34. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(0)=f(1)=0$ και τύπο $f(x) = \log(1+e^x) - \alpha - \beta x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να βρείτε τις τιμές των α, β .

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log\left[\frac{1+e^x}{(1+e)^x} \cdot 2^{x-1}\right]$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\log[(1+e^x) \cdot 2^{x-1}] - f(x) \leq x$.

35. α) Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $g(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, δηλαδή οι αριθμοί $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_k)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Αν $g(x) = 10^x$, να λυθεί η εξίσωση :

$$g(x) + g(2x) + \dots + g(100x) = 2[10^{100x} - 1], \quad x \neq 0.$$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι : $f(\ln 4) < f(\ln 5)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$.

37. Σε μία γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $a_1 = 8^{3x}$ και ο δεύτερος όρος $a_2 = 8^{x^3+2}$. Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου να βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5^{\log x}$, $g(x) = x^{\log 5}$ $x \in (0, +\infty)$.

A. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(x) = g(x)$

β) $f(xy) = f(x)g(x)$

γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$

δ) $f(x^y) = [f(x)]^y$

B. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 5 + 4g(x)$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x) > f(x^2 - 4)$.

39. Αν $a_1 = \ln e$ και $a_4 = \ln 8 + 1$ ο πρώτος και τέταρτος όρος μίας αριθμητικής προόδου, να βρεθούν :

α) Η διαφορά ω της προόδου.

β) Αν S_v το άθροισμα των v πρώτων όρων, ν.δ.ο. $S_v = v + \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}}$

γ) Να βρεθεί το πλήθος των όρων ώστε : $S_v = v + \frac{1}{2} \ln 2^{v^3-21}$.

40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

41. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ 2^{ου} βαθμού με $P(0) = -2$ για το οποίο ισχύει $P(x) + 2 = P(x-2) + 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(4^{P(x)-x^2} + 9) = \log 5 + \log(2^{P(x)-x^2} + 1)$.

42. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(e^x - 3 + \frac{2}{e^x})$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f .

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f μπορεί να πάρει τη μορφή

$$f(x) = \ln[(e^x - 1)(e^x - 2)] - x.$$

γ) Να βρείτε τα σημεία για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x$.

δ) Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $f(x)$, $\ln 2\sqrt{3}$, $g(x)$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

43. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin \omega) = 0$ στο $[0, 2\pi)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $P(\log \theta) > 0$.

γ) Αν $A = 12 - 11x$, $B = x^2$, $\Gamma = x^3$ με $A > B > \Gamma$, να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί A , B , Γ να αποτελούν διαδοχικούς όρους α.π.

44. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 2x^2 \ln a^2 + 5x \ln a - 2$, $a > 0$.

A. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $f(x)$, τότε να βρείτε το a .

B. Για $a = e$

α. να δείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

β. να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a + \ln(e^x - 2)$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, 1)$

α. να δείξετε ότι $a = 1$.

β. να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

46. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = (1 - e^{2\sin\theta + 1})x^4 + x^3 \ln^2 \kappa + x^2 \ln \kappa + x - 1$.
με $\theta \in (0, \pi)$ το οποίο είναι 3^{ov} βαθμού και διαιρείται με το $x - 1$.

α. να αποδείξετε ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$ και $\kappa = \frac{1}{e}$.

β. να αποδείξετε ότι το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης
 $f(x) : x^2$ είναι το ίδιο.

γ. να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $\varepsilon : y = 5x - 5$.

47. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = 2x^3 - x + 1 + \ln \lambda^2$
με το $x - \ln \lambda$ είναι $2 \ln(\lambda e)$ να βρείτε το λ .

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α. να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της συνάρτησης
 f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 2)$ και $f(1)$.

δ. να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = f(1)$.