

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$i) f(x) = \frac{7x + 5}{x^2 - x}$$

$$ii) f(x) = \frac{8x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$iii) f(x) = \frac{5x^2 + 4}{x - x^3}$$

$$iv) f(x) = \frac{3x - 4}{x^3 - 8x^2 + 7x}$$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$i) f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

$$ii) f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$iii) f(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{1 - 2x}}$$

$$iv) f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}}$$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$i) f(x) = \ln x^2$$

$$ii) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$iii) f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$iv) f(x) = \ln\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)$$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$i) f(x) = \frac{1 + x}{2 - |x|}$$

$$ii) f(x) = \frac{\eta\mu x}{|x| - 1}$$

$$iii) f(x) = \sqrt{x + 5} - \sqrt[3]{1 - x}$$

$$iv) f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{e^x - 1}$$

$$v) f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x - 2}$$

$$vi) f(x) = \frac{\ln x - 1}{e^{2x} - e}$$

$$vii) f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{2 - x}}$$

$$viii) f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}{x^2 - |x|}$$

$$ix) f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{e^x - 1}$$

$$x) f(x) = \sqrt{2 \ln x - \ln^2 x}$$

5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{\kappa x^2 + \kappa x}, \text{ αν } \kappa < 0.$$

6. Να βρεθούν οι τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + \kappa x + 9}} \text{ να έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x-\lambda}$  η οποία έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:  $\lambda < -4$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{5x+7}{x^2+2x+\lambda}$  η οποία έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $\lambda > 1$ .

ii) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1, \lambda - 1)$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση:  $g(x) = x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $g(x) + g(-x) = 2x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{g(x) + g(-x)}.$$

10. Αν  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + e^x}, x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι:  $f(x) - f(-x) = \eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

11. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι:  $f(x) - f(-x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

12. Αν  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , να δείξετε ότι:  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$  και  $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) + f(-x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

14. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = ax^3 + x^2 + \beta x - 5$ . Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(-2, 9)$

15. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες, όταν:

i)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$       ii)  $f(x) = 2\ln(1+x) - 4$       iii)  $f(x) = e^x - 2$

$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad \text{v) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \quad \text{vi) } f(x) = \ln^2 x - \ln x$$

16. Για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ , όταν:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = x^3 - x^2 + 2x & \text{ii) } f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) \\ \text{iii) } f(x) = 1 - |\ln x| & \text{iv) } f(x) = \frac{x}{x-2} \end{array}$$

17. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $O(0, 0)$  και  $A(2, 12)$ .

- α) Να δείξετε ότι:  $\alpha = -1$  και  $\beta = 0$ .
- β) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = 12$ .
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

18. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , όπου:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = 2x - x^2 \text{ και } g(x) = x^2 + 3x \\ \text{ii) } f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 \text{ και } g(x) = x^2 - 2 \\ \text{iii) } f(x) = 1 + \ln(x+1) \text{ και } g(x) = 2 \\ \text{iv) } f(x) = x^2 - 6x + 11 \text{ και } g(x) = \frac{6}{x} \end{array}$$

19. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(x^2 + 2kx + 9)$ .

- i) Να βρεθούν οι τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- ii) Αν  $k=2$ , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- iii) Να βρείτε το σημείο τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $y'y$ .

**ΟΡΙΑ**

**απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  με πολυώνυμα**

20. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$ .

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$	ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x + 1}$	iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$
v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - 2x^2}{-x^2 + 5x + 6}$	vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$
vii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{4 - x^2}$	viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$
ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 4x^2}{4x^4 - 3x^2}$	x) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  με ρίζες

22. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$ .

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.  
 β) Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

23. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$	ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$
iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$	iv) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{x^2 - 1}$	vi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}}{x^2 - 5x + 6}$

24. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$	ii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$
iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$	iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$
v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+3}}$	vi) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2-2x}}{\sqrt{3x+7} - 2\sqrt{x+2}}$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{\sqrt{x+1} - x + 1}$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 3x + 1}{x - 1}$$

25. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x}{\eta\mu^2 x - \eta\mu x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^3 x + 2 \ln x}{\ln^2 x + \ln x}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\eta\mu x - 2x - \eta\mu x + 2}{x^2 - 1}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - e^x - x + 1}{e^x - 1}$$

26. Να βρεθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^{10} + (2 - \lambda)x^5 - 2}{x - 1} = 20$ .

27. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)f(x)$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$$

28. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2 - \sqrt{x+4}}$$

$$\text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h}$$

29. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{f(x) - f(3)}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

### ΣΥΝΕΧΕΙΑ

30. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ -2, & x = 3 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -5, & x = -2 \end{cases}$$

31. Να βρεθεί ο  $a \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση  $f$ , όταν:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha & , x = 1 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ \alpha - 2 & , x = -1 \end{cases}$$

32. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}, & x \neq \alpha \\ 8 & , x = \alpha \end{cases}$ ,  $\alpha$  σταθερός.

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = \alpha$ , τότε το  $\alpha$  είναι ίσο με:

- A. 8      B. 2      Γ. -8      Δ. 4      E. -4

33. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha & , x = 2 \end{cases}$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι

συνεχής στο  $x_0 = 2$ , τότε να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ .

34. Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και τέτοια ώστε  $xf(x) = x^2 + 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής, να βρείτε:

α) την τιμή  $f(0)$

β) το όριο  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 f(x)}{x + 2}$

35. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = -1$  και η  $C_f$  περνά από το σημείο  $A(-1, 2)$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot (x^2 + x)}{2 - \sqrt{x + 5}}$ .

36. Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

Αν ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \cdot f(x) \right] = 6$ , να βρείτε την τιμή  $f(1)$ .

37. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και τέτοια ώστε να ισχύει:  $(x-1)f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2}$  για κάθε  $x \neq 1$ .

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ .

**☞ προβλήματα**

38. Μια παρέα αποφάσισε να κατασκευάσει δίπλα στο ποτάμι και για την αποφυγή ερπετών χρησιμοποιήσει ένα



ειδικό σύρμα 18m, ώστε να περιφράξει τη σκηνή, σε σχήμα ορθογωνίου. Λόγω της φυσικής προστασίας από το ποτάμι, το σύρμα προστατεύει τις τρεις πλευρές της σκηνής, όπως στο σχήμα.

A. Να βρείτε το εμβαδόν συναρτήσει του μήκους  $x$ .

B. Αν αποφασίσουν το πλάτος να είναι 4m, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που θα περιφράξουν.

Γ. Αν η σκηνή έχει διαστάσεις, ώστε να απαιτείται να περιφράξουν περιοχή με εμβαδόν  $38m^2$ , έχει το σύρμα το απαιτούμενο μήκος;

39. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις δύο κορυφές του στο διάστημα  $[0, 2]$  του άξονα  $x'$  και τις άλλες δύο στην παραβολή  $y = 2x - x^2$ .

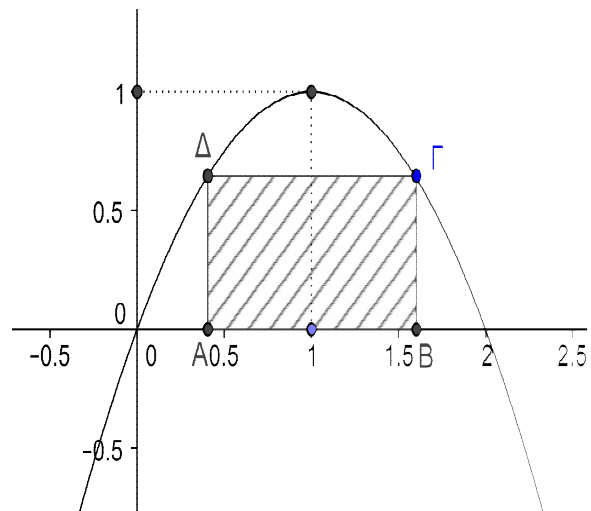
i) Να δείξετε ότι:  $x_A + x_B = 2$ .

ii) Αν  $B(\alpha, 0)$ , να βρείτε το εμβαδόν  $E(\alpha)$  του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  ως συνάρτηση του  $\alpha$  και το πεδίο ορισμού της.

iii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{E(\alpha)}{\alpha - 2}.$$

iv) Αν  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου καθώς και το εμβαδόν του.



40. Το ποσοστό της ανεργίας μιας χώρας είναι 12% και εκτιμάται ότι σε  $x$

έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο  $f(x) = \frac{16x + 36}{2x + 3}$ .

i) Να δείξετε ότι:  $f(x) = 8 + \frac{12}{2x + 3}$ .

ii) Να εξηγήσετε ότι το ποσοστό της ανεργίας δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

iii) Να βρείτε μετά από πόσα έτη το ποσοστό της ανεργίας θα είναι 9%.

### Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

☞ **ορισμός**

41. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

i)  $f(x) = 2x+1$  στο  $x_0 = -2$

ii)  $f(x) = x^2 - x$  στο  $x_0 = 2$

iii)  $f(x) = x^2 + x + 2$  στο  $x_0 = 1$

iv)  $f(x) = 2x^2 + x + 1$  στο  $x_0 = -1$

v)  $f(x) = \frac{5}{x}$  στο  $x_0 = 1$

vi)  $f(x) = \frac{2}{x+3}$  στο  $x_0 = 0$

vii)  $f(x) = x \sin x$  στο  $x_0 = 0$

viii)  $f(x) = x \ln x$  στο  $x_0 = 1$

☞ **εφαπτομένη**

42. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ , όταν:

i)  $f(x) = x^2 + x + 2$  στο  $x_0 = 1$

ii)  $f(x) = 2x^3$ ,  $x_0 = -1$

iii)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $x_0 = 2$

iv)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $x_0 = 3$

43. Έστω μια συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε:  $f(2+h) - f(2) = h^2 + 5h$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0 = 2$ .

ii) Αν επιπλέον η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  έχει εξίσωση:  $y = ax - 3$ , να δείξετε ότι:  $a = 5$  και  $f(2) = 7$ .

44. Έστω μια συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε:  $f(1+h) - f(1) = h^2 + 4h$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  στο  $x_0 = 1$ .

ii) Αν επιπλέον ισχύει:  $f(2) = 8$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

45. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(1, 0)$  σχηματίζει με τον άξονα  $x$ ' $x$  γωνία  $45^\circ$ .

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, 0)$ .

ii) Να βρείτε το όριο:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$ .

46. Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  και η ευθεία με εξίσωση:  $y = 4x + 3$  η οποία εφάπτεται στην καμπύλη της  $f$  σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$ . Να βρείτε:

α) την τιμή  $f(1)$       β) το όριο:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 7}{h}$ .

☞ **ρυθμός μεταβολής**



47. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές με μήκη  $x$  και  $2x+1$ .  
 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :  
 α) της περιμέτρου β) του εμβαδού του ως προς  $x$ , όταν  $x=10$ .
48. Ένας κύβος έχει μήκος ακμής  $a>0$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς  $a$  της επιφάνειας και του όγκου του κύβου όταν  $a=4$ .
49. Η θερμοκρασία ενός ασθενούς δίνεται (σε  $^{\circ}\text{C}$ ) από τη συνάρτηση:  

$$\Theta(t) = -\frac{2}{25}t(t-10) + 37$$
, όπου  $t \in [0, 10]$  είναι ο χρόνος (σε ώρες). Να εξετάσετε αν τη χρονική στιγμή  $t=7$  ο πυρετός του ασθενούς ανεβαίνει ή πέφτει.
50. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε ευθεία και η θέση του κάθε χρονική στιγμή  $t \in [0, 4]$  δίνεται από τη συνάρτηση  $x(t) = t(4-t)$ .  
 i) Να βρείτε την ταχύτητά του όταν  $t=1$ .  
 ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $x$  στο σημείο  $t=1$ .  
 iii) Να βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου όταν  $t=2$ . Τι παρατηρείτε;
51. Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + 6$ , όπου το  $t$  μετριέται σε sec.  
 i) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα  $[0, 2]$ .  
 ii) Να βρεθεί η ταχύτητα, όταν  $t=1$ .  
 iii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $x(t)$  στο σημείο της  $(1, x(1))$ .

### ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

#### ☞ κανόνες παραγώγισης

52. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^5 - 3x^2 + 5x - 1$

ii)  $f(x) = x^3 + 3 + \frac{7}{x^3}$

iii)  $f(x) = e^x + 2x - 1$

iv)  $f(x) = 4x^3 + \eta\mu x$

v)  $f(x) = x^4 - \ln x + 2e^x$

vi)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + e$

53. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^4 \ln x$

ii)  $f(x) = 3xe^x + 2x \ln x + \sigma\upsilon\nu x$

iii)  $f(x) = x \eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$

iv)  $f(x) = \sqrt{x} e^x + \ln 2$

v)  $f(x)=2x\sigma\upsilon\nu x-(x^2-3)\eta\mu x$

vi)  $f(x)=e^x\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$

54. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=(x - \alpha) e^x + \beta, x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:  
 $f(1) = 2$  και  $f'(0) = 0$ .

55. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

ii)  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$

iii)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

iv)  $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

v)  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

vi)  $f(x) = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}$

**☞ παραγωγή σύνθετης συνάρτησης**

56. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = (x^2 + x)^4$

ii)  $f(x) = (x - 1)^4(3x + 2)^3$

iii)  $f(x) = \eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

iv)  $f(x) = \ln^4 x - 3\eta\mu^2 x$

v)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

vi)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

vii)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

viii)  $f(x) = x^2 \sqrt{\eta\mu x + 2}$

57. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \eta\mu(x^2)$

ii)  $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$

iii)  $f(x) = \eta\mu(\ln x)$

iv)  $f(x) = \ln(2x-3)$

v)  $f(x) = x \ln(1 + x^2)$

vi)  $f(x) = \sqrt{x} e^{\sqrt{x+1}}$

58. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = \ln(e^x - 1) + 2\ln(x^2 + 2)^3$

ii)  $f(x) = x\eta\mu(e^x) + e^{3x+1}$

iii)  $f(x) = \frac{(1 - 2x^2)^3}{x}$

iv)  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$

**☞ δεύτερη παράγωγος**

59. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^5 - 2x^2 + 5x - 1$

ii)  $f(x) = xe^x$

iii)  $f(x) = x^2 \ln x$

iv)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

v)  $f(x) = \sqrt{x+7}$

vi)  $f(x) = \epsilon\phi x$

**☞ απόδειξη σχέσεων με  $f(x), f'(x), f''(x)$**

60. Αν  $f(x) = e^x \eta\mu x$ , να δείξετε ότι:  $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ .

61. Αν  $f(x)=(1+2\ln x)x$ , να δείξετε ότι:  $xf''(x) - f'(x) = \ln \frac{1}{ex^2}$ .

62. Αν  $f(x)=x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$ , να δείξετε ότι:  $xf''(x) - f'(x) - 2x = 0$ .

63. Αν  $f(x)=\eta\mu(ax+\beta)$ , να δείξετε ότι:  $f''(x) + \alpha^2 f(x) = 0$ .

64. Αν  $f(x)=xe^{-x}$ , να δείξετε ότι:  $xf'(x) = (1-x)f(x)$ .

65. Αν  $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ , να δείξετε ότι:  $x^3f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$ .

66. Αν  $f(x)=e^x \sin x$ , να δείξετε ότι:  $f^{(4)}(x) + 4f(x) = 0$ .

67. Αν  $f(x)=x + \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $x > 1$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} f'(x)$

β)  $(x^2 - 1)f''(x) + xf'(x) = f(x)$ .

68. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{\lambda x}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε να ισχύει:  $2f''(x) - f'(x) = 3f(x)$ .

**☞ παραγωγή της  $f(g(x))$**

69. Αν  $f(x)=\eta\mu x$  και  $g(x)=f(2x^2-3)$ , να βρείτε το  $g'(1)$ .

70. Αν  $f'(1) = 2013$  και  $g(x)=f(x^2 + x + 1)$ , να βρείτε το  $g'(0)$ .

71. Αν  $f(x^2)=x^5$  για κάθε  $x > 0$ , να βρείτε το  $f'(9)$ .

72. Αν  $f(x)=2(x-3)^2g(3x-1)$  και  $g(8)=\frac{1}{2}$ , να βρείτε το  $f''(3)$ .

**ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ**

**☞ δίνεται η τετμημένη  $x_0$  του σημείου επαφής**

73. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με:

i)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$ .

ii)  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  στο σημείο  $A(0,1)$

iii)  $f(x) = x \ln x$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$

iv)  $f(x) = e^{-x}$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = -1$ .

74. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $y = f(x)$  στο σημείο  $x = x_0$ , όπου  $f''(x_0) = 0$ .

☞ **δίνεται η τεταγμένη  $y_0$  του σημείου επαφής**

75. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με:

i)  $f(x) = e^x - 1$  στο σημείο της με τεταγμένη  $y_0 = 0$

ii)  $f(x) = \sqrt{x}$  στο σημείο με τεταγμένη  $y_0 = 2$

iii)  $f(x) = \ln x - 2$  στο σημείο της με τετμημένη  $-3$

iv)  $f(x) = e^{-x}$  στο σημείο με τεταγμένη  $1$ .

☞ **εύρεση σημείου επαφής**

76. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 6x + 2$  στα οποία η εφαπτομένη είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία  $y = 6x + 1$

β) κάθετη στην ευθεία  $x + 3y + 2 = 0$ .

77. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ , όταν:

i)  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 21$

ii)  $f(x) = x^2 e^{4x}$

iii)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

iv)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

78. Σε ποια σημεία της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$  η

εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = \frac{4}{9}x + 1$ ;

79. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = 4x - 5 \ln(x^2 + 1)$  στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στη διχοτόμο της πρώτης – τρίτης γωνίας των αξόνων.

80. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \frac{2x}{x-2}$  στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γω-

νία  $135^{\circ}$ .

81. Έστω η συνάρτηση  $f(x)=e^x$  και το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A$ .

β) Να βρεθεί το σημείο  $A$ , ώστε η εφαπτομένη του ερωτήματος α) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

82. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ . Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία

της καμπύλης της  $f$  ώστε οι εφαπτόμενες σ' αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x$ .

83. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=e^{-x} \cdot (x^2 + 2)$ .

α) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της καμπύλης της  $f$  στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

☞ **σημείο επαφής → εφαπτομένη**

84. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

85. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  που είναι:

α) παράλληλη στην ευθεία  $y = 6x + 5$

β) κάθετη στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x - 3$ .

86. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=\ln(x^2+4)$  που είναι παράλληλη προς την ευθεία

$y = \frac{1}{2}x + 3$ .

87. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=x^2$  που διέρχεται από το σημείο  $A(2, 3)$ .

88. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=x^2 - 2$  η οποία δεν είναι οριζόντια και διέρχεται από το σημείο  $(1, -2)$ .

89. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=x^3$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(2, 4)$ , αν είναι γνωστό ότι το σημείο επαφής είναι ακέραιος αριθμός.

90. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=\ln x$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Όμοια για τη συνάρτηση  $f(x)=e^{-x}$ .

91. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{1}{x-1}$ . Να δείξετε ότι από το σημείο  $A(a, 0)$  με  $a \neq 1$ , διέρχεται μία μόνο εφαπτομένη της  $C_f$ .

☞ **ευθεία εφάπτεται στη  $C_f$**

92. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^2 - x + 2$ . Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

93. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο τυχαίο σημείο της  $A(x_0, \frac{1}{x_0})$ .

β) Να δειχτεί ότι η ευθεία  $y = -x + 2$  εφάπτεται της  $C_f$ .

94. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^2 + x + 2$ . Να βρεθεί ο  $\alpha$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 1$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

95. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=x^2 - 4x$  και  $g(x) = \frac{\alpha}{x}$  με  $\alpha \neq 0$ . Να βρεθεί ο  $\alpha$  ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $x_0 = -1$  να εφάπτεται στη  $C_g$ .

96. Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία  $y = x$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=x^2 + \alpha x + \beta$  στο σημείο  $M(1,1)$ .

97. Έστω  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις με  $f(x)=g\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ . Αν η ευθεία  $y = 2x$  να εφάπτεται της  $C_g$  στο  $x_1 = -1$ , να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $x_2 = 1$ .

98. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + \beta x + 1$ . Να βρεθούν οι  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(1,2)$  να σχηματίζει γωνία  $\frac{3\pi}{4}$  με τον άξονα  $x'x$ .

99. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + \beta \ln x + 7, x > 0$ .

α) Να βρεθεί η  $f'(x)$ .

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1,6)$  και η εφαπτομένη της στο σημείο  $A$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $135^\circ$ , να βρεθούν:

i) οι  $a, \beta$

ii) κάθε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

100. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + ax + \beta$ .

α) Να βρεθούν οι  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y = 4x + 2$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ .

β) Για  $a = 2$  και  $\beta = 3$ , να βρείτε:

i) την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο τομής της με τον άξονα  $y'y$

ii) το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{xf'(x)}$ .

101. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με  $f(1) = 2$  και  $f'(1) = 1$ .

Θεωρούμε και τη συνάρτηση  $g(x) = f^3(x) - 13f(x) + 5, x \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\delta$  της  $C_g$  στο σημείο της  $B(1, g(1))$ .

iii) Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\delta$  είναι κάθετες.

#### ☞ κοινές εφαπτόμενες

102. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = ax^2 - 2\beta x + a$  και  $g(x) = x^3 - x + \beta$ .

Να βρεθούν οι  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε οι  $C_f, C_g$  να έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $x_0 = 1$ .

103. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  και  $g(x) = ax^2 + \beta x + 1$ .

Να βρεθούν οι  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε οι  $C_f, C_g$  να έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $x_0 = -1$ .

104. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των  $C_f, C_g$  όταν:

α)  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x^2 - 2x$

β)  $f(x) = x^2 - 2x$  και  $g(x) = -x^2 - 5$ .

**☞ ρυθμός μεταβολής**

105. Η θερμοκρασία σε μια περιοχή δίνεται κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου από τη συνάρτηση  $\Theta(t)=t-5\sqrt{t}$  (σε  $^{\circ}\text{C}$ ) όπου  $t \in [0,24]$  είναι ο χρόνος (σε ώρες). Να βρείτε αν τις χρονικές στιγμές  $t=4$  και  $t=16$ , η θερμοκρασία ανεβαίνει ή πέφτει.
106. Η θεαματικότητα σε ποσοστό επί τοις εκατό ενός τηλεοπτικού καναλιού από τις 12:00 το μεσημέρι έως και τις 12:00 τα μεσάνυχτα δίνεται από τη σχέση:  $f(t) = -4\eta\mu\frac{\pi t}{6} + 10(\%)$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες με  $t=1$  να αντιστοιχεί στις 13:00 μ.μ. Να εξετάσετε αν στις 17:00 η θεαματικότητα αυξάνεται ή ελαττώνεται.
107. Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(x^2, 0)$  και  $B(0, 4x)$  με  $x > 0$ .  
α) Να βρεθεί η απόσταση  $(AB)$  συναρτήσει του  $x$ .  
β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης  $AB$  ως προς  $x$ , όταν  $x=3$ .
108. Ενός ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  η περίμετρος είναι 80 m. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού  $E$  του ορθογωνίου ως προς την πλευρά  $AB=x$ , όταν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.
109. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι  $100 \text{ m}^2$ . Αν το μήκος της μιας πλευράς του είναι  $x$  m, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου όταν  $x = 20\text{m}$ .
110. Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κάθετες πλευρές  $AB = 3$  και  $A\Gamma = x$ , όπου  $x > 0$ . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της υποτείνουσας  $B\Gamma$  ως προς την πλευρά  $A\Gamma = x$ , όταν  $x = 4$ .
111. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι  $\alpha = x$ ,  $\beta = x + 1$ ,  $\gamma = x + 2$ ,  $x > 0$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ως προς  $x$ , όταν  $x = 2$ .
112. Σε ένα σύστημα αξόνων  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(0, x + 1)$  και  $B(x^2 + 2x, 0)$ ,  $x > 0$ . Να βρείτε:  
α) το εμβαδόν  $E(x)$  του τριγώνου  $OAB$   
β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(x)$  του τριγώνου  $OAB$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 2$ .



113. Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$  δίνεται από τη συνάρτηση  $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ . Έστω  $v(t)$  και  $a(t)$  η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου αντίστοιχα.
- Να βρείτε τη θέση και την επιτάχυνση του σωματιδίου όταν το σωματίδιο είναι ακίνητο.
  - Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου όταν  $a(t) = 0$ .
  - Πότε αλλάζει η φορά της κίνησης;
  - Πότε το σωματίδιο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική;
114. Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$  δίνεται από τη συνάρτηση  $S(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ .
- Πότε αυξάνεται και πότε μειώνεται η ταχύτητα του σωματιδίου;
  - Πότε αλλάζει η φορά της κίνησής του;
  - Να βρείτε το διάστημα που διανύει το σώμα στα 3 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του.
115. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στον άξονα  $x'x$  και η θέση του κάθε χρονική στιγμή  $t \geq 0$  δίνεται από τη συνάρτηση  $x(t) = -2t^3 + 18t^2 - 30t$ .
- Ποια είναι τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σωματίδιο κινείται προς τ' αριστερά;
  - Ποιο διάστημα θα έχει διανύσει το σωματίδιο όταν  $t = 5$ ;
116. Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή  $t \in [0, 4]$  (σε sec) δίνεται από τη συνάρτηση  $h(t) = 20t - 5t^2$  (σε μέτρα). Να δείξετε ότι όταν το σώμα θα έχει διανύσει 15 μέτρα θα έχει χάσει τη μισή ταχύτητά του, σε σχέση μ' αυτή που είχε αρχικά.
117. Μια ρουκέτα εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω, ώστε σε χρόνο  $t$  (sec) να διανύει διάστημα  $h(t) = t^3$  (μέτρα), όπου  $t \in [0, 10]$ . Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση της ρουκέτας όταν αυτή έχει διανύσει διάστημα 64 (μέτρα).
118. Ένας αθλητής των extreme sports πηδά με αλεξίπτωτο πλαγιάς από ένα λόφο και το ύψος του από το έδαφος (σε m) τη χρονική στιγμή  $t$  (σε sec) είναι  $h(t) = 144 + 48t - t^2 - \frac{t^3}{3}$ .
- Να βρείτε το ύψος του λόφου.
  - Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αθλητή όταν  $t = 3$  s.
  - Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
  - Πόσα δευτερόλεπτα θα διαρκέσει η πτώση;

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ**

119. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = x^2 + 2x - 3 & \text{ii) } f(x) = -x^2 + 2x - 1 \\ \text{iii) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 & \text{iv) } f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \\ \text{v) } f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 & \text{vi) } f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3 \\ \text{vii) } f(x) = (x-1)^2(x+2)^3 & \text{viii) } f(x) = (x-1)^3(3x+2)^4 \end{array}$$

120. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \frac{x+3}{2x-1} \quad \text{ii) } f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{iii) } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

121. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = x - \ln x & \text{ii) } f(x) = x \ln x \\ \text{iii) } f(x) = x^2 \ln x & \text{iv) } f(x) = x \ln^2 x \\ \text{v) } f(x) = \ln(x^2+9) & \text{vi) } f(x) = x(\ln^2 x - 5 \ln x + 7) \\ \text{vii) } f(x) = e^x - x + 1 & \text{viii) } f(x) = x^2 e^x \\ \text{ix) } f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{x) } f(x) = x e^{x^2} \end{array}$$

122. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα:

$$\text{i) } f(x) = \sin x - 2x \quad \text{ii) } f(x) = \frac{3x}{x-5} \quad \text{iii) } f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}, x > 0.$$

123. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$ ,  $x > 0$ .

Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι  $-\frac{1}{4}$ .

124. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$ . Να δείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f'$  είναι  $-1$ .

125. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

- α) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία.  
β) να συγκριθούν οι αριθμοί  $f(2003)$  και  $f(2004)$ .

126. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ . Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα

β)  $f\left(\frac{9}{10}\right) < f\left(\frac{99}{100}\right)$ .

127. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \alpha^2 - 4\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Αν το τοπικό μέγιστο της  $f$  είναι μικρότερο του τριπλάσιου του τοπικού ελαχίστου κατά 6, να βρείτε τον  $\alpha$ .

γ) Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  γίνεται ελάχιστος.

128. Να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = -2x^2 + 16x + \alpha$  είναι 39.

129. Να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - (\alpha+1)x + 2$  να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = -1$ .

130. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 12x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να παρουσιάζει για  $x = 1$  μέγιστο (τοπικό) το 0.

131. Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 - 3x + 2$  να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία  $x_1=1$  και  $x_2=2$ . Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές αυτών των ακροτάτων.

132. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $(1,0)$  και η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0=2$ :

α) Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta$ .

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του.

#### ☞ απόδειξη ανισοτήτων

133. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \cdot e^{-x}$ .

i) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

ii) Να αποδείξετε ότι:  $e^x \geq ex$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

134. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$ .

- i) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .  
 ii) Να αποδείξετε ότι:  $e^x \geq x^e$  για κάθε  $x > 0$ .

135. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ .

- i) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .  
 ii) Να αποδείξετε ότι:  $1 + xe^{x-1} \geq 2e^{x-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

136. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = e^x - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $g$ .  
 ii) Αν  $f(x) = x \cdot e^{-x} + x$ , να δείξετε ότι  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$  και ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

### ☞ προβλήματα μεγιστοποίησης - ελαχιστοποίησης

137. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι 20. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς, αν:

- α) το γινόμενο τους είναι μέγιστο  
 β) το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ελάχιστο  
 γ) το γινόμενο του τετραγώνου του ενός επί τον κύβο του άλλου είναι μέγιστο.

138. Αν το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 8, να δείχτεί ότι το άθροισμα του τετραγώνου του ενός με το διπλάσιο του άλλου δεν είναι μικρότερο του 12.

139. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι  $c$ , όπου  $c$  σταθερά. να δείχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο αριθμών δεν υπερβαίνει το  $\frac{1}{2}c^2$ .

140. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια περίμετρο, ίση με 320 μέτρα, να βρεθούν οι διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

141. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις του ώστε η διαγώνιός του να έχει το ελάχιστο μήκος.

142. Πρόκειται να κατασκευαστεί περίφραξη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές  $x$ ,  $y$ . Οι πλευρές  $x$  κοστίζουν 10 ευρώ το μέτρο, ενώ οι πλευρές  $y$  κοστίζουν 5 ευρώ το μέτρο. Αν η

περίφραξη πρέπει να περικλείει  $4000\text{m}^2$ , ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της ώστε το κόστος κατασκευής της να είναι ελάχιστο;

143. Μια καθημερινή τηλεοπτική εκπομπή προβλήθηκε για πρώτη φορά όταν  $t=0$ . Η θεαματικότητά της ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση  $\Theta(t) = \frac{1}{10} t(20-t) + 2$  (%) όπου  $t \in [0, 15]$  είναι ο χρόνος (σε μήνες). Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η θεαματικότητα της εκπομπής ήταν μέγιστη. Ποια ήταν αυτή η μέγιστη θεαματικότητα;

144. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι:  $K(x) = \frac{1}{3} x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$  σε χιλιάδες ευρώ με  $0 \leq x \leq 60$ . Η είσπραξη από την πώληση των  $x$  μονάδων είναι:  $E(x) = 420x - 2x^2$  χιλιάδες ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

145. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός προϊόντος είναι  $\frac{1}{3} x^3 - 20x^2 + 500x + 1000$  σε εκατοντάδες €. Η βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης της κάθε μονάδας προϊόντος ανάλογα με τον αριθμό των παραγόμενων προϊόντων σύμφωνα με τον τύπο  $420 - 2x$  σε εκατοντάδες €.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση είσπραξης για  $x$  μονάδες προϊόντος.  
 β) Αν επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 100 εκατοντάδες € για κάθε προϊόν, να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους για  $x$  μονάδες.  
 γ) Να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

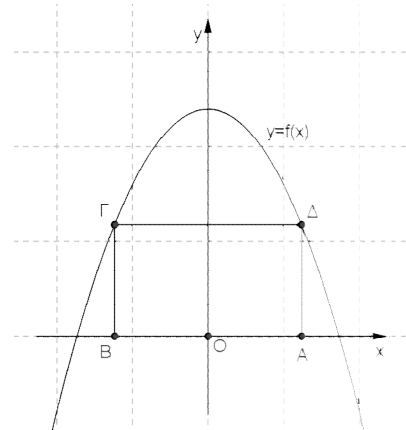
146. Ποιο σημείο της καμπύλης  $y = \frac{1}{2} x^2 + 1$  απέχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ;

147. Δίνονται τα σημεία  $A(0, 2)$ ,  $B(4, 5)$  και  $M(x, 0)$  με  $x > 0$ .

i) Να εκφράσετε την παράσταση  $S = MA^2 + MB^2$  ως συνάρτηση του  $x$ .  
 ii) Για ποια τιμή του  $x$  η παράσταση γίνεται ελάχιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της;

148. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = -x^2 + 12$ .

- i) Αν  $A(x, 0)$  και  $B(-x, 0)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$ .
- ii) Να βρείτε το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  ως συνάρτηση του  $x$ .
- iii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $x > 0$  το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο καθώς και τη μέγιστη τιμή του.

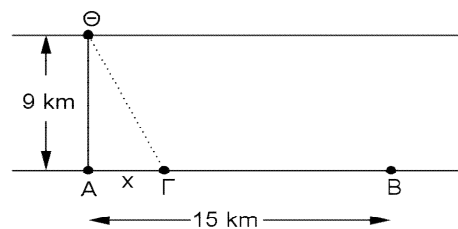


149. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha \cdot e^{2\alpha-x}$  όπου  $x > 0$  και  $\alpha > 0$ .

- α) Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο  $x_0 = \alpha$ , το οποίο και να βρεθεί.
- β) Αν  $f(\alpha)$  είναι το ακρότατο της  $f$ , να βρεθεί ο  $\alpha$  ώστε το  $f(\alpha)$  να γίνεται ελάχιστο.

150. Θεωρούμε τα σημεία  $A(8,0)$  και  $B(0,2)$  πάνω στους άξονες. Με αφετηρία τα  $A$  και  $B$  αναχωρούν συγχρόνως δύο κινητά που κινούνται πάνω στους άξονες με ταχύτητες  $v_1 = 2\text{cm/sec}$  και  $v_2 = 1\text{cm/sec}$  αντίστοιχα και με κατευθύνσεις προς την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση των δύο κινητών είναι ελάχιστη.

151. Μια βάρκα βρίσκεται στο σημείο  $\Theta$  που απέχει από το πλησιέστερο σημείο  $A$  της απέναντι όχθης 9 χιλιόμετρα. Ένας επιβάτης της βάρκας θέλει να φτάσει στο χωριό  $B$  που βρίσκεται στην απέναντι όχθη και απέχει από το  $A$  15 χιλιόμετρα. Η βάρκα κινείται με 4 χιλιόμετρα την ώρα και ο επιβάτης βαδίζει με 5 χιλιόμετρα την ώρα. Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει ο επιβάτης για να φτάσει στο χωριό  $B$  στο συντομότερο χρόνο;



152. Στις 10 το πρωί το πλοίο  $B$  ήταν 104 km ανατολικά του πλοίου  $A$ . Το πλοίο  $B$  ταξίδευε προς τα δυτικά με ταχύτητα 16km/h ενώ το πλοίο  $A$  ταξίδευε νότια με ταχύτητα 24km/h. Ποια ώρα θα είναι ελάχιστη η απόσταση των δύο πλοίων; Ποια θα είναι η ελάχιστη αυτή απόσταση;

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

153. Έστω  $f(x)=\sin^2(\lambda x)$ .
- Ναδειχτεί ότι η παράσταση  $A=f''(x)+4\lambda^2 f(x)$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .
  - Να βρεθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε:  $f''(x)+4\lambda^2 f(x)=8$ .
154. Ένα κινητό κινείται κατακόρυφα και το ύψος του από το έδαφος δίνεται συναρτήσει του χρόνου  $t$  από τη συνάρτηση:  $h(t)=30t-3t^2$  με  $t$  σε sec και  $h$  σε m.
- Να βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα για  $t=3$ sec και για  $t=7$ sec. Τι ερμηνεία δίνετε στο πρόσημο;
  - Να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία το κινητό βρίσκεται στο μέγιστο ύψος. Ποιο είναι το ύψος αυτό;
  - Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού για το χρονικό διάστημα  $[3,7]$ .
155. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[0,+\infty)$  για την οποία ισχύει:  $4f(x)+4=\sqrt{x+12}+f(x)2\sqrt{x}$ . Να βρεθεί η  $f(x)$ .
156. Έστω  $f(x)=\frac{2}{x}$  και  $g(x)=(x-1)^2$ . Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των  $C_f$ ,  $C_g$  στο σημείο τομής τους είναι κάθετες.
157. Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi, f, g$  με  $f(1)=f'(1)=1$  και  $\varphi(x)=f(g(x))$ ,  $g(x)=\ln x+x, x>0$ .
- Να δείξετε ότι:  $g(1)=\varphi(1)=1$  και  $g'(1)=\varphi'(1)=2$ .
  - Να εξετάσετε αν η  $g$  έχει ακρότητα στο  $(0,+\infty)$ .
  - Να βρεθεί το όριο:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)+(1+h)-g(1)}{h}$ .
  - Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  των  $C_\varphi, C_f$  στα σημεία τους  $A(1,\varphi(1))$  και  $B(1,f(1))$  αντίστοιχα.
    - Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η  $\varepsilon_2$  με τον άξονα  $x'x$ .
158. Έστω  $f(x)=x(x+\sqrt{x^2+1})$ .
- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
  - Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότητα.
  - Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) όπου  $AB=x$  και  $A\Gamma=1$ . Κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις  $x, y$  όπου  $y=B\Gamma+AB$ . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ως προς  $x$ , όταν  $x=\sqrt{3}$ .

159. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + k^2 - 4k$  όπου  $k \in \mathbb{R}$ .
- Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.
  - Αν  $f(x_1) = 3f(x_2) + 50$  όπου  $x_1$  η θέση του τοπικού μεγίστου και  $x_2$  η θέση του τοπικού ελαχίστου, να βρείτε τον  $k$ .
  - Για την τιμή του  $k$  από το ερώτημα β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που είναι κάθετη στον άξονα  $y'y$ .
  - Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  γίνεται ελάχιστος και ποιος είναι αυτός.
160. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής  $x$  μονάδων ενός προϊόντος είναι  $\frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 500x + 1000$  σε εκατοντάδες €. Η βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης της κάθε μονάδας προϊόντος ανάλογα με τον αριθμό των παραγόμενων προϊόντων σύμφωνα με τον τύπο  $420 - 2x$  σε εκατοντάδες €.
- Να βρεθεί η συνάρτηση εισπραξής για  $x$  μονάδες προϊόντος.
  - Αν επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 100 εκατοντάδες € για κάθε προϊόν, να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους για  $x$  μονάδες.
  - Να βρεθεί ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.
161. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με  $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$  και  $g(x) = x^2 - ax + \beta$  με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε:
- την εφαπτομένη  $\epsilon$  της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $x_1 = 1$ .
  - την εφαπτομένη  $\delta$  της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο  $x_2 = 2$ .
  - τις τιμές των  $a, \beta$  ώστε οι ευθείες  $\epsilon$  και  $\delta$  να συμπίπτουν.
162. Για τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2x^2 - ax + \beta$  με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ .
- Να βρεθεί η τιμή του  $a$ .
  - Αν επιπλέον η παραπάνω εφαπτομένη έχει εξίσωση  $y = 3x - 1$ , να βρεθεί η τιμή του  $\beta$ .
  - Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση:  $y = 3x - 1$ .
163. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^a \cdot e^{2a-x}$  όπου  $x > 0$  και  $a > 0$ .
- Να δείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο  $x_0 = a$ , το οποίο και να βρεθεί.
  - Αν  $f(a)$  είναι το ακρότατο της  $f$ , να βρεθεί ο  $a$  ώστε το  $f(a)$  να γίνεται ελάχιστο.



164. Δίνεται η συνάρτηση  $F(x) = xe^{2κ-x}$ .

α) Να βρεθεί η  $F'(x)$ .

β) Να μελετηθεί η  $F$  ως προς τη μονοτονία .

γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $F$  έχει μέγιστο το οποίο και να βρεθεί.

δ) Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το  $e$ , να βρεθεί το  $κ$ .