Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Να βρεθούν οι x, y∈R για τους οποίους ισχύει:
   i) $(2-3i)x+(3+2i)y=3+15i$ ii) $(x+i)^2+(y-i)^2=1$
   iii) $x^2-1+i\sqrt{x^2+3x-3}=i$ iv) $(1-2i)(x-yi)=(1-i)^2-xi$
   v) $(x+yi)^2=\frac{1+7i}{1-i}$ vi) $\frac{x-3}{3+i}+\frac{y-3}{3-i}=i$.

2. Αν z= α + βi, να βρείτε τους α, β∈R, ώστε: $z^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=4+2i$.

3. Έστω ο μιγαδικός $z=\lambda^2-4+(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2)i$, όπου λ∈R. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ∈R:
   α) ο z είναι πραγματικός β) ο z είναι φανταστικός
   γ) ο z ισούται με 0 δ) $z=-3-2i$

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ∈R, ώστε ο μιγαδικός $z=(3-2\lambda i)(\lambda+6i)$ να είναι: α) πραγματικός β) φανταστικός

5. Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $z=2\mathrm{Im}(z)+(\mathrm{Re}(z)-2)i$.

6. Να βρεθεί ο λ∈R, ώστε οι εικόνες των μιγαδικών $z_1=3+4i$, $z_2=4+5i$ και $z_3=2\lambda+(\lambda+7)i$ στο μιγαδικό επίπεδο να είναι σημεία συνευθειακά.

7. Έστω ο μιγαδικός $z=\frac{7-i}{3-4i}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα των x.

8. Να βρεθεί ο x∈R, ώστε ο μιγαδικός $z=\frac{1+xi}{x+i}$ να είναι φανταστικός αριθμός.

9. Να βρεθεί ο x∈R, ώστε ο μιγαδικός $z=\frac{x+i}{4+xi}$ να είναι πραγματικός.

10. Έστω λ∈R και οι μιγαδικοί $z_1=\lambda+i$ και $z_2=-1+(\lambda-1)i$. Να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.

11. Έστω οι μιγαδικοί $z_1=1-\alpha+i$, $z_2=1+\alpha-2\alpha i$. να βρείτε τις τιμές του α∈R ώστε:
    α) $\mathrm{Im}(z_1 z_2)=\mathrm{Re}(z_1 z_2)$ β) $\mathrm{Im}(z_1 z_2)=1$

12. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=(\alpha^2-2\alpha-3)+(\alpha^2+\alpha-12)i$ να βρίσκεται:
α) στον πραγματικό άξονα
β) στον φανταστικό άξονα
γ) στην ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

13. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=(\alpha+1)+(2\alpha-3)i$ να ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

14. Αν για το μιγαδικό $z\neq 0$ ισχύει: $z+\frac{1}{z}=1$, να δειχτεί ότι:

α) $z^3= -1$ β) $z^{20}+\frac{1}{z^{20}}= -1$.

15. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $z^2 + z + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
$A = z^{300}+\frac{1}{z^{300}}$ $B = (z + 1)^{200} + (z^2 + 1)^{199}$.

16. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1^5=2+3i$ και $z_2^5=3+2i$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

17. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:
i) $Re(z)=2$ ii) $Im(z)= -3$
iii) $Re(z) + Im(z)=0$ iv) $Im(z)=1$ και $-2\leq Re(z) \leq 2$.

18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού:
i) $z=(2\alpha+1)+(3-\alpha)i$, όταν $\alpha\in R$.
ii) $z=4$συνφ$+4i$ημφ, όταν $\varphi\in R$.
iii) $z=3$συνφ$-4i$συνφ, όταν $\varphi\in R$.
iv) $z=3$συνφ$+4i$ημφ, όταν $\varphi\in R$.
v) $z=2+$συνφ$+i(1-$ημφ$)$, όταν $\varphi\in R$.

19. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του $z\in C$, αν ο αριθμός $w=\frac{z-i}{z+i}$ είναι: α) πραγματικός β) φανταστικός.

20. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει:

i) $z^2 \in R$ ii) $z+\frac{1}{z} \in R$ iii) $\frac{1+zi}{z+i} \in R$

iv) $Re\left(z-\frac{1}{z}\right)=-3Re(z)$ v) $Re(z^2-1) = -2Im^2(z)$ vi) $Re\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$

vii) $Re\left(\frac{z-1}{z+2}\right)=Im\left(\frac{z-1}{z+2}\right)$ viii) $Im\left(z-\frac{1}{z}\right)=Re(zi)$.

21. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z έτσι ώστε οι εικόνες των z, z-1 και z^2 να είναι σημεία συνευθειακά.

22. Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z, 1+z, 1-z αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Α.

23. Έστω οι μιγαδικοί z=x +yi και $w=z^2 + z +1$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z, όταν:
i) $w \in R$.
ii) τα σημεία Α(1), Μ(z) και P(w) είναι συνευθειακά και $y \neq 0$.

24. Να γραφεί ο w=5+2i σαν άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 οι εικόνες Μ, Ν των οποίων είναι σημεία των ευθειών ε_1: y=2x-1 και ε_2: y=-x+2 αντίστοιχα.

25. Να γραφεί ο w=2-9i σαν άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 οι διανυσματικές ακτίνες των οποίων είναι παράλληλες στις ευθείες ε_1: y=3x-1 και
ε_2: y=-2x+1 αντίστοιχα.

26. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=2+4i$ και $z_2=1+2i$. Αν w τυχαίος μιγαδικός για τον οποίο ισχύει: $Im(w)z_1+Re(w)z_2=0$, να δειχτεί ότι η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ της εικόνας Μ του w, είναι κάθετη στην ευθεία y=2x.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ i

27. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $i^{10} +i^{24} +i^{2005} +i^{4003}$ ii) $\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{56}}$

28. Αν $\nu \in N^*$ και η ευκλείδεια διαίρεση του ν με το 4 είναι τέλεια, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=(1+i)^\nu - (1-i)^\nu$.

29.Να βρεθεί κάθε $\nu \in Z$ ώστε να ισχύει:
i) $i^{3\nu+1}=i$ ii) $i^{5\nu+2}=1$ iii) $(-i)^{3\nu+2}= -1$.

30.Για τις διάφορες θετικές ακέραιες τιμές του ν, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:
$A=(1+i^\nu)(1+i^{2\nu})$ $B=i+i^2+i^3+\ldots+i^\nu$ $\Gamma=i.\ i^2.\ i^3\ldots i^\nu$.

31.Έστω το άθροισμα $S_\nu=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$. Να δειχτεί ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύουν: i) $S_{\nu+4}=S_\nu$ και ii) Το σύνολο $A=\{ S_\nu / \nu \in N^*\}$ έχει τέσσερα στοιχεία , τα οποία και να βρεθούν.

32.Αν z μιγαδικός και $f(\nu)= i^\nu z$, $\nu \in N^*$, τότε:
α) Να δείξετε ότι: $f(4\lambda) + f(4\lambda+1) + f(4\lambda+2) + f(4\lambda+3)=0$.
β) Να δείξετε ότι: $f(8\lambda) + f(8\lambda+1) + f(8\lambda-1) + f(8\lambda+4)= 2z$.
β) Αν $z=1+i\sqrt{3}$, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών 0, z, $f(4\lambda+1)$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ C

33.Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:
i) $z(3+2i)=2+i$ ii) $2(z+i) +3(iz-1)=0$
iii) $(5-i)z+(1-2i)^2(z-2i)=z+7i$ iv) $\frac{z-1}{2-i}+\frac{2}{1+2i}=\frac{z-2i}{3+i}$.

34.Να λυθούν στο C οι εξισώσεις:
i) $z^2 + 4=0$ ii) $z^2-4z+5=0$ iii) $z^2+5z+8=0$
iv) $z+\frac{1}{z}=1$ v) $z^3 -1=0$ vi) $z^3 - z^2 + 2=0$.

35.Να βρείτε εξίσωση της μορφής $z^2+\alpha z+\beta=0$, $\alpha, \beta \in R$ που να έχει ρίζα τον αριθμό -1-2i.

36.Να βρείτε τους α, β ώστε ο μιγαδικός 2+i να είναι ρίζα της εξίσωσης: $z^2 + \alpha z - \beta =0$.

37.Έστω η εξίσωση: $z^2-(\alpha+6)z+3\alpha+13=0$, $\alpha \in R$ με $-4<\alpha<4$.
α) Να λυθεί η εξίσωση.
β) Να δειχτεί ότι, όταν το α μεταβάλλεται στο διάστημα (-4,4), τότε οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης κινούνται σε κύκλο.

38.Δίνεται η εξίσωση: $z^2-2(\lambda+1)z+2(\lambda^2+1)=0$, $\lambda \in R$. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε δύο ευθείες.

39. Δίνεται η εξίσωση: $z^2-4συνθz+3συν^2θ+1=0$, $θ\in R$. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε μία έλλειψη.

40. Αν για τους μιγαδικούς ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{a+b}{c}\in R$, $\frac{b+c}{a}\in R$ και $\frac{a}{c}\notin R$, να δείξετε ότι: $a+b+c=0$.

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

εξισώσεις στο C με z, $\bar{z}$

41. Να σχεδιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $z=\bar{z}$ ii) $\bar{z}=-z$ iii) $z+\bar{z}=2$

iv) $z-\bar{z}=4i$ v) $z+\bar{z}=i(z-\bar{z})$ vi) $iz=\bar{z}$.

42. Αν $z\in C$, να λυθεί η εξίσωση:

α) $(1+i)^2z+5=\bar{z}+4i$ β) $z^2-\bar{z}+2=0$

γ) $z^2+2\bar{z}+1=0$ δ) $z\bar{z}+2iz-2i=0$

ε) $2z\bar{z}+z-\bar{z}+1=5-6i$ στ) $z^2+2\bar{z}^2+9=\bar{z}-z$.

43. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z, ώστε:

i) $\frac{z-i}{z+i}\in R$ ii) $\bar{z}=z^2$ iii) $2z-(\bar{z})^2=0$

iv) $(1+i)z+i\bar{z}=2+5i$ v) $(z-1)(\bar{z}-i)\in R$.

44. α) Να λυθεί η εξίσωση: $z^2-2i\bar{z}=0$.

β) Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μη μηδενικών λύσεων της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο, να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

οι μιγαδικοί α+βi και β ± αi

45. Για κάθε $α, β\in R$ να δειχτεί ότι: $(α+βi)^{2002}+(β-αi)^{2002}=0$.

46. Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+yi$ ώστε $z^{11}\in R$. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $(y+xi)^{11}$ είναι φανταστικός.

47.Αν ο μιγαδικός $z_1=(\alpha+i)^\nu$ με $\alpha\in R$ και $\nu\in N$ περιττό, είναι πραγματικός, να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $z_2=(1+\alpha i)^\nu$ είναι φανταστικός.

48.Για ποιες τιμές του $\nu\in N^*$ ο αριθμός $z=(\alpha+\beta i)^\nu(\beta+\alpha i)^\nu$ είναι:
α) πραγματικός β) φανταστικός.

49.Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ν για τον οποίο ισχύει:
$(2+3i)^\nu + (3-2i)^\nu=0$.

50.Δίνεται ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i\neq 0$. Αν υπάρχει $\nu\in N$ ώστε:
$(\alpha+\beta i)^\nu+(\beta-\alpha i)^\nu=0$, να δειχτεί ότι ο αριθμός $(1+i)^\nu$ είναι φανταστικός.

Re(z), Im(z) σε συνάρτηση των z, $\bar{z}$

51.Να δείξετε ότι για κάθε $z, w\in C$ με $z\neq w$ ισχύει:
α) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z-w}\right)-\mathrm{Re}\left(\dfrac{w}{z-w}\right)=1$
β) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{z-w}\right)-\mathrm{Im}\left(\dfrac{w}{z-w}\right)=0$.

52.Να δείξετε ότι για κάθε $z, w\in C^*$ ισχύει: $\dfrac{i\,\mathrm{Re}(\bar{z}w)+\mathrm{Im}(\overline{zw})}{2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w)-\overline{zw}}=i$.

53.Να δείξετε ότι για κάθε $z\in C$ με $\mathrm{Re}(z^2)\neq 0$ ισχύει:
$\dfrac{\mathrm{Im}(z^4)}{\mathrm{Re}(z^2)}=4\,\mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Re}(z)$

z∈ R z∈ I

54.Για κάθε μιγαδικό $z\neq 0$, να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι φανταστικός και ισχύει: $|\mathrm{Im}(w)|\leq 2$.

55. i) Αν $z\in C$ και $w=\dfrac{z^3-\bar{z}^3}{1+z\bar{z}}$, να δείξετε ότι: $w\in I$.
ii) Αν $z\in C$ και $w=\dfrac{\bar{z}-iz}{z-i\bar{z}}$, να δείξετε ότι: $w\in R$.
iii) Αν $z_1, z_2\in C$ με $z_1\bar{z_1}=z_2\bar{z_2}=2$, να δείξετε ότι ο μιγαδικός

$w=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\in I$.

56.Έστω $w=\dfrac{z_1\overline{z_2}-z_2}{z_1-1}$ με $z_1, z_2\in C$ και $z_1\neq 1$. Να δειχτεί ότι:
$w\in R \Leftrightarrow z_2\in R$ ή $z_1\overline{z_1}=1$.

57.Αν για το μιγαδικό z ισχύει $z-i\overline{z}=0$, να δειχτεί ότι ο z^2 είναι φανταστικός. (Όμοια, αν για το μιγαδικό z ισχύει Re(z)=Im(z))

58.Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=x-2+yi$ και $z_2=x+yi$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(x,y) αν και μόνο αν ο μιγαδικός $w=\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

59.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M των μιγαδικών z, αν η εικόνα του $w=\dfrac{z+\overline{z}}{z^2}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα y′y.

60.Έστω οι μιγαδικοί z και $f(z)=iz^2-\overline{z}$.
i) Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=-\,\mathrm{Re}(z)\big(2\,\mathrm{Im}(z)+1\big)$.
ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει: $f(z)\in I$.

61.Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$, $z\in C$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.
α) Να δείξετε ότι: $f\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right)=f(z)$.
β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία M(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha x+\beta yi$ με $\alpha, \beta, x, y\in R$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση: $\mathrm{Re}[f(z)]=0$. (ΘΕΜΑ ’93)

62.Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε: $w=z-zi$ και $w_1=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha i$, $\alpha\in R^*$. Να δειχτεί ότι, αν το α μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $w=\overline{w_1}$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε μία υπερβολή. (ΘΕΜΑ ’94)

63. Δίνονται οι μιγαδικοί z και w με w= $z^2+z\bar{z}$. Έστω A και B οι εικόνες των z και w αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.
α) Να δειχτεί ότι η ευθεία AB διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Αν το A κινείται πάνω στην ευθεία y=1, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του B.

64. Έστω οι μιγαδικοί z και w με $w=\frac{z+i}{1+iz}$, με $z\neq i$.
α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, αν και μόνο αν ο w είναι πραγματικός.
β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο, αν και μόνο αν ο z διαγράφει τον φανταστικό άξονα (χωρίς το i).

65. Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στην ευθεία ε: y=2x-1, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού $w=iz-(1-i)\bar{z}-i^5$.

66. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 3, να δειχτεί ότι η εικόνα του μιγαδικού $w=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$ διαγράφει έλλειψη, της οποίας να προσδιοριστούν οι εστίες.

67. Έστω M και N οι εικόνες των μιγαδικών z και w αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει: $w=iz-\frac{i}{z}$. Αν το M κινείται στο μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι το N κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα.

68. Έστω οι μιγαδικοί z, $z_1=(\lambda-i)\bar{z}+3\lambda\mathrm{Re}(z)$ και $z_2=\frac{2(1+\lambda^2)}{1-\lambda i}$, $\lambda\in R^*$. Να δείξετε ότι αν το λ μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $z_1=\overline{z_2}$, τότε η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια έλλειψη.

69. Έστω ο μιγαδικός $z\neq 1$ για τον οποίο ισχύει: $3z^{2007}+7\bar{z}^{2007}=10$.
Να δείξετε ότι:
α) $(\bar{z})^{2007}=z^{2007}=1$.
β) $z\bar{z}=1$.
γ) Ο αριθμός $w=\frac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ

70.Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

i) z=(1-2i)(1-i)+13-2i ii) z=$(1-i)^2$+3-2i

iii) z=$(3-4i)\cdot\left(\frac{1-xi}{x-i}\right)^5$ iv) z=$\frac{(3+4i)^7}{(4+3i)^5}$.

71.Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

i) z=$|-\bar{z}|$-1+$|1-2i|$i ii) z=$|\bar{z}|$-2-$(|-z|-1)$i.

72.Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z+16|=4|z+1|$, να δειχτεί ότι: $|z|$=4.

73.Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z όταν ισχύει:

i) $|z-4|=2|z-1|$ ii) $|3z+1|=|z+3|$

iii) $|2z-i|=|2+iz|$ iv) $\left|\frac{z-9i}{z-i}\right|$=3.

74.Έστω $z\in C$.

α) Αν $|z-10|$=3$|z-2|$, να βρεθεί το μέτρο του z-1.

β) Αν $|2z+7|=|3z+13|$, να βρεθεί το μέτρο του z+5.

75.Αν για το μιγαδικό z ισχύει: 8+z^2 =($\sqrt{3}$ z^2-6)i, να βρείτε το $|z|$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με z, $\bar{z}$, $|z|$

76.Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί z, ώστε:

i) $|z|^2=z^2$ ii) $|z|$+z=2+i iii) $z^2+|z|$=0

iv) $|z+i|$=iz v) $|z-i|=2\bar{z}$ vi) z+$|z+1|$+i=0.

77.Να βρεθεί ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$|z+i|=|z+5-4i|$ και $|z-6i|=|z|$.

78.i) Να βρεθεί ο $z\in C$ αν: $|z-i|=|z-1|=|z-2|$.

ii) Να βρεθεί το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ με Α(0,1), Β(1,0) και Γ(2,0).

79.Να βρεθεί ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει:

$|z|=\left|\dfrac{3+i\sqrt{7}}{iz}\right|=|1-\bar{z}|$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΤΡΑ

80.Αν $|z+2i|=|z-2i|$, να δειχτεί ότι: $z\in R$.

81.Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να δειχτεί ότι:
i) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.
ii) $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2| \Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3}\,|z_2|$.

82.Να δείξετε ότι αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει: $|z_1+z_2|=|1+\overline{z_1}z_2|$, τότε το μέτρο ενός τουλάχιστον από τους z_1, z_2 είναι ίσο με 1.

83.Έστω $z\in C$ με $z\neq i$. Να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ έχει μέτρο 1, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός.

84.Έστω z_1, $z_2\in C$ και $z_2\neq -1$. Να δειχτεί ότι:
$\dfrac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_2}+1}\in R \Leftrightarrow z_1\in R$ ή $|z_2|=1$.

85.Έστω ο μιγαδικός αριθμός z. Να δειχτεί ότι:
i) $|Re(z)|+|Im(z)|\leq\sqrt{2}\,|z|$.
ii) Αν στην προηγούμενη σχέση ισχύει η ισότητα, τότε ο αριθμός z^2 είναι φανταστικός.

86.Έστω ο μιγαδικός $z\neq 1$. Να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $|z|=1$.

87.Αν $z=\dfrac{z_1z_2w-\overline{w}}{z_1+z_2}$ με $z_1\neq -z_2$, $|z_1|=|z_2|=1$ και z_1, z_2, $w\in C^*$, να δειχτεί ότι: $z^2\leq 0$.

88.Έστω z_1, $z_2 \in C$ και $z_2 \neq 0$. Αν $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}$ είναι πραγματικός και θετικός.

89.Αν $\omega=\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha \in R^*_+$ και $z \neq \alpha i$, να δειχτεί ότι:

α) ο αριθμός ω είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

β) ισχύει $|\omega|=1$, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός. (ΘΕΜΑ '91)

90.Έστω $z \in C$ με $|z|=4$. Θεωρούμε και τον μιγαδικό $w=\frac{z-8}{z-2}$.

i) Να βρεθεί το μέτρο του w.

ii) Αν ο w δεν είναι πραγματικός, να δειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\lambda \in R$, ο οποίος και να βρεθεί, ώστε $w+\frac{\lambda}{w} \in R$.

91.Έστω z_1, $z_2 \in C$ με $|z_1|=|z_2|=5$ και $|z_1+z_2|=6$.

i) Να δειχτεί ότι: $|z_1-z_2|=8$.

ii) Αν $z_1 z_2 \notin R$, να βρεθεί $\kappa \in R$, ώστε ο μιγαδικός $w=\frac{z_1+z_2}{\kappa+z_1 z_2}$ να είναι πραγματικός.

92.Έστω z_1, $z_2 \in C^*$ με $|3z_1+2z_2|=|3z_1-2z_2|$, να δειχτεί ότι:

i) ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

ii) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο, όπου Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

93.Να βρείτε το $\nu \in N^*$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $(1+i)^\nu=16$ ii) $\left(\sqrt{3}-i\right)^\nu=-8i$ iii) $-8i(1+i)^\nu=\left(\sqrt{3}-i\right)^\nu$.

94.Αν για το μιγαδικό z και για το θετικό ακέραιο $\nu>1$ ισχύει: $(1+z)^\nu=z^\nu$, να δείξετε ότι: $Re(z)=-\frac{1}{2}$.

95. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $z^5 \cdot \bar{z}^2=1$, να δείξετε ότι:

α) $|z|=1$ β) $z^3=1$.

96. Αν $z\in C$, να δείξετε ότι:

α) Αν $(z-1)^4+z^4=0$, τότε: $Re(z)=\frac{1}{2}$.

β) Αν $\left(\frac{z-3i}{iz+1}\right)^{\nu}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, τότε: $Im(z)=2$.

γ) Αν $5(z+i)^8+(3-4i)(z-i)^8=0$, τότε: $z\in R$.

97. Να δειχτεί ότι όλοι οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $5(z+i)^{\nu}=(4+3i)(1+iz)^{\nu}$ είναι πραγματικοί.

98. Να δειχτεί ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης: $\left(\frac{2z+1}{z+2}\right)^{\nu}=\frac{5+12i}{13}$, $\nu\in N^*$, είναι σημεία ομοκυκλικά.

99. Έστω $z\in C$ και $\nu\in N^*$, ώστε: $z^{\nu}+z^{\nu-1}+z^{\nu-2}+\ldots+z+1=0$. Να δείξετε ότι:

α) $z^{\nu+1}=1$ β) ο μιγαδικός $z+\frac{1}{z}$ είναι πραγματικός.

100. Αν $z\in C$ και $1+2z+2^2z^2+\ldots+2^{\nu}z^{\nu}=0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $(1+2z)(1-2\bar{z})$ είναι φανταστικός.

101. Να δειχτεί ότι, αν $\nu\in N^*$, τότε η εξίσωση ως προς $z\in C$: $(1+iz)^{\nu}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ δεν έχει πραγματική λύση.

102. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $(z+1)^6-(z-1)^5=0$ δεν έχει φανταστική ρίζα.

103. Έστω ο ακέραιος ν>3 και οι πραγματικοί α, β με $\alpha^2+\beta^2=1$.

Θεωρούμε την εξίσωση $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^{\nu}=\alpha+\beta i$. Ν.δ.ο:

α) Όλες οι ρίζες της εξίσωσης έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο σημεία ομοκυκλικά.

β) Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης, τότε θα ισχύει η σχέση $|z_1-z_2|\le 2$.

γ) Αν ο z_o είναι ρίζα της εξίσωσης με $|z_o|=2$, ν.δ.ο: $z_o=-2$ και να βρεθούν τα α, $\beta\in R$.

104. Να δειχτεί ότι οι εξισώσεις: $z^{\nu}=1+5i$ και $z^{\mu}=3+2i$ με μ, $\nu\in N^*$, δεν έχουν κοινή λύση στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών.

$(M_1M_2)=|z_1-z_2|$

105. Έστω $z_1, z_2\in C$ και $z_2\neq 0$. Να δειχτεί ότι οι εικόνες των αριθμών z_1+z_2, z_1-z_2 και $z_1+i\sqrt{3}z_2$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

106. Έστω $z_1, z_2\in C$ με $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2$, με $z_2\neq 0$.

i) Αν η εικόνα του z_2 διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο C: $x^2+y^2=1$, να δειχτεί ότι και η εικόνα του z_1 διαγράφει τον ίδιο κύκλο.

ii) Αν Α, Β, Ο είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και 0 αντίστοιχα, να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

107. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, όπου οι κορυφές του Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει: $z_3-z_2=i(z_2-z_1)$. Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

☞ **μεσοκάθετος**

α) $|z-1-3i| = |z-3+i|$ **β)** $|z-1| = |z-3|$

☞ **κύκλος**

α) $|z-1| = 2$ **β)** $|z+3i| = 1$ **γ)** $|z+1+i| \leq 2$

δ) $|z-2+3i| > 1$ **ε)** $1 \leq |z+1| \leq 2$

☞ **έλλειψη**

α) $|z+1| + |z-1| = 4$ **β)** $|z+2i| + |z-2i| = 6$

ειδική περίπτωση: $|z+1| + |z-1| = 2$ **(ευθύγραμμο τμήμα)**

☞ **υπερβολή**

α) $\big||z+2|-|z-2|\big|=2$ **β)** $|z+3i|$ - $|z-3i| = 2$

108. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, αν και μόνο αν ισχύει:
i) $|z-1|=4$ ii) $|z-3+4i|=5$ iii) $|z-1-2i|<1$
iv) $|z-3+4i|\geq 2$ v) $2<|z-1+5i|<4$ vi) $|z-1|=2|z+i|$
vii) $|z+2|=|z-2i|$ viii) $|z-1|\leq|z+2i|$ ix) $|z+4i|^2-|z+3|^2=17$
x) $|z-2|+|z+2|=8$ xi) $|z-i|+|z+i|=4$ xii) $|z+5|=6+|z-5|$

109. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z+8|+|z-8|=20$, να δειχτεί ότι: $\left|4z-\bar{z}\right|=30$.

110. Αν ισχύει: $\dfrac{1}{|z-4i|}+\dfrac{1}{|z+4i|}=\dfrac{10}{|z-4i||z+4i|}$, να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού: $w=4z+\bar{z}$.

☞ **σχέση δύο μιγαδικών με τον ένα να κινείται σε κύκλο**

111. Έστω οι μιγαδικοί z και w με $|z|=2$. Αν $w=2z+4$, να δείξετε ότι οι εικόνες του w κινούνται σε κύκλο.

112. Έστω οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύει: $zw=1$. Αν η εικόνα του z διαγράφει τον κύκλο κέντρου Κ(0,1) και ακτίνας ρ=1, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w.

113. Έστω $z_1, z_2\in C$ με $z_1z_2=2z_2+1$. Να δειχτεί ότι, όταν η εικόνα του z_1 κινείται σε κύκλο κέντρου Κ(1,0) και ακτίνας ρ=1, τότε η εικόνα του z_2 κινείται πάνω σε μια ευθεία.

114. Έστω οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύει: $zw=2z+w$. Αν η εικόνα του z διαγράφει τον κύκλο κέντρου Κ(1,0) και ακτίνας ρ=2, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w.

115. Δύο κινητά Α και Β κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο και οι εικόνες τους είναι αντίστοιχα οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους, για κάθε χρονική στιγμή, ισχύει η σχέση: $z_1=\left(\sqrt{3}+i\right)z_2$. Αν το κινητό Α κινείται πάνω στον κύκλο C: $x^2+y^2=16$, τότε:
α) να δείξετε ότι και το κινητό Β κινείται κυκλικά,
β) να δείξετε ότι η απόσταση των δύο κινητών Α και Β είναι συνεχώς η ίδια,
γ) αν για ένα τρίτο κινητό Γ, με εικόνα το z_3 στο μιγαδικό επίπεδο όπου κινείται, ισχύει: $z_3(z_1-4)=2i$, να δείξετε ότι το κινητό Γ

κινείται πάνω σε μια ορισμένη γραμμή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΜΕ ΓΝΩΣΤΟ ΜΕΤΡΟ

116. Αν οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο,

α) Να δείξετε ότι: $z_1+z_2-z_1z_2+1=0 \Leftrightarrow z_1+z_2+z_1z_2-1=0$.

β) να βρείτε τους z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει: $z_1+z_2-z_1z_2+1=0$.

γ) να δείξετε ότι: $|z_1+z_2-z_1z_2+1|=|z_1+z_2+z_1z_2-1|$.

117. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1|=2$, $|z_2|=\sqrt{2}$ και $\frac{1}{2}z_1-3z_2+z_1z_2-4=0$.

Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού: $3z_1-z_2+2z_1z_2$.

118. Αν $z, w \in C$ και $\lambda \in R$ με $|z|=|w|=1$, να δείξετε ότι:

$|z+w+\lambda zw-1|=|z+w-zw+\lambda|$.

119. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1+z_2\neq 0$ και $|z_1|=|z_2|$. Αν $\nu \in N^*$, να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z_1^\nu+z_2^\nu}{(z_1+z_2)^\nu}$ είναι πραγματικός.

120. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1|=|z_2|$ και $z_1\neq \pm z_2$. Να δειχτεί ότι:

i) $\dfrac{(z_1+z_2)^{2\nu}}{(z_1-z_2)^{2\nu}} \in R$, $\nu \in N^*$.

ii) οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $(z_1+z_2)^{2\nu}$, $(z_1-z_2)^{2\nu}$ και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά.

121. Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$ ώστε: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho$, να δειχτεί ότι:

i) $|z_1+z_2+z_3|=\rho^2\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$.

ii) $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=\rho$.

122. Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$ ώστε: $|z_1|=1$, $|z_2|=3$ και $|z_3|=5$. Να δειχτεί ότι:

i) $z_1+z_2+z_3\neq 0$

ii) $\left|\dfrac{25z_1z_2+z_2z_3+9z_1z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=15$.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

123. Αν $|z+i| < |z-i|$, να δείξετε ότι: Im(z) < 0.

124. Αν $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι: Re(z) > 1.

125. Αν $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) < \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι: $|z| > 1$.

126. Αν $z \in C^*$, να δειχτεί ότι ο μιγαδικός $w=\frac{|z|}{z}+\frac{z}{|z|}$ είναι πραγματικός αριθμός του διαστήματος [-2,2].

127. Αν $z \in C-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, να δειχτεί ότι: $\left|\frac{1-2z}{1+2z}\right|<1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)>0$.

128. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου C: $x^2+y^2=1$, να δειχτεί ότι: $|z_1-z_2| < |1-\overline{z_1}z_2|$.

129. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1|>1$ και $|z_2|<2$. Να δειχτεί ότι: $|2z_1+\overline{z_2}| > |2+z_1z_2|$.

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

130. Αν $|z| = 2$ και w = 3 - 4i, να δείξετε ότι: $3 \le |z-w| \le 7$.

131. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο C: $x^2+y^2=9$ και ω=5-12i, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z+\omega|$.

132. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 1$. Να δείξετε ότι:

i) $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right| \le 2$ ii) $(z_1+z_2)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) \le 4$.

133. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z-i| = 1$, να δειχτεί ότι: $4 \le |z+4+2i| \le 6$.

134. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z+i| = 2$, να δειχτεί ότι:
$3 \le |z+3+5i| \le 7$.

135. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z-1-i| = 5$, να δειχτεί ότι:
$10 \le |z-10-13i| \le 20$.

136. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z-1+2i| < 3$, να δειχτεί ότι:
$2 < |z+2-2i| < 8$.

137. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $|z-2-i| \le 5$, να δειχτεί ότι:
$8 \le |z-14-6i| \le 18$.

138. Αν $|z-3| \le 2$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

139. Αν $|z-i| = 1$ και $|w+2i| = 1$, να δείξετε ότι: $|z+w+3+5i| \le 7$.

140. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν οι σχέσεις: $|z+3i|=1$ και $|w-4|=2$. Να δειχτεί ότι: $|z-w| \le 8$.

141. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν οι σχέσεις: $|z+5i|=3$ και $|w-6|=2$. Να δειχτεί ότι: $|z-2w| \le 20$.

142. Να δείξετε ότι:
α) $|z| + |z+3| \ge |z+1| + |z+2|$
β) $|z+3| + |z+2| \le |z| + |z+1| + 4$
γ) $|z+1| + |z+w| + |w+u| + |u| \ge 1$.

143. Αν z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης: $z^{2014} + 3z + 5 = 0$, να δείξετε ότι:
$|z_0| > 1$.

144. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $u^2z_1 + uz_2 + z_3 = 0$, να δείξετε ότι:
$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le |u| \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

145. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $|z|+1\leq\dfrac{2}{|z|}$ και $w^3 + zw^2 + \bar{z}w + i = 0$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) Να αποδείξετε ότι: $|w|\leq 2$.

ΜΕΓΙΣΤΟ-ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕΤΡΟ

Ευθεία και ελάχιστο μέτρο

146. Έστω $z\in C$ με $z=\lambda+3-(2\lambda-4)i$, με $\lambda\in R$. Να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

147. Έστω $z\in C$ με $|2iz-2-6i| = 2|z-5-3i|$ (1).

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

148. Έστω $z\in C$ με $|z-3i| = |z-5|$.

i) Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z.

ii) Να προσδιοριστεί ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς έχει το ελάχιστο μέτρο.

149. Έστω $|\bar{z}-3-5i| = |iz-2-i|$. Να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

β) την ελάχιστη τιμή του $|z-4+2i|$.

150. Έστω $w = 2z + i\bar{z} - 5$. Αν ο w είναι φανταστικός, να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z

β) την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ) το μιγαδικό z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z+4-3i|$.

151. Έστω $z=(2\alpha-1)+(3\beta-2)i$. Αν τα σημεία Α(α, β) ανήκουν στην ευθεία δ: $y=2x+3$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου του z. Ποιος μιγαδικός z_0 παίρνει την ελάχιστη αυτή τιμή;

ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ όταν M(z), N(w) ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες

152. Αν $(1+i)z+(1-i)\bar{z}=0$ και $|w+2-2i|=|w|$, να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και του w

β) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Κύκλος και μέγιστο - ελάχιστο μέτρο

153. Αν $|z-2|=1$, να βρεθούν:

α) η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z|$

β) οι μιγαδικοί z_1, z_2 με το ελάχιστο, μέγιστο μέτρο αντίστοιχα.

154. Αν $|z-2-2i|=\sqrt{2}$, να βρεθούν:

α) η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z|$

β) οι μιγαδικοί z_1, z_2 με το ελάχιστο, μέγιστο μέτρο αντίστοιχα.

155. Από τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση: $|z+4i|\le 2$, να βρεθεί αυτός που έχει το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο.

156. Να βρείτε το μιγαδικό z έτσι ώστε να ισχύει $2|z|^2=(1-i)z+(1+i)\bar{z}$ και το $|z|$ να είναι μέγιστο.

157. Έστω z=(2ημθ-1)+(2συνθ+1)i. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1, z_2 με το ελάχιστο, μέγιστο μέτρο αντίστοιχα.

158. Αν για το μιγαδικό w=2x+(2y-1)i, x, y$\in$R ισχύει: $|w-1-i|=2\sqrt{5}$, να βρείτε:

α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z=x+yi στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

159. Έστω z= 2w + 9i. Αν η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο K(2, -3) και ακτίνα ρ=1, να βρείτε:

α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

160. Έστω $|(1-i)z-14+2i|=5\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$, καθώς και τους μιγαδικούς των οποίων το μέτρο παίρνει τις τιμές αυτές.

γ) Αν z_1, z_2 ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος α), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

161. Έστω z, w∈C με $\left|\dfrac{w-2}{z-3}\right|=1$. Αν ο γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κύκλος με κέντρο O(0,0) και ρ=2, να δείξετε ότι:
α) $1 \le |z| \le 3$
β) Υπάρχει μιγαδικός z ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο, ενώ δεν υπάρχει μιγαδικός z με μέγιστο μέτρο.

Κύκλος και σημείο /μέγιστο -ελάχιστο μέτρο

162. Έστω z∈C με $|z-9| = |3z+5|$. Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-5+6i|$.

163. Έστω $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$. Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-6+3i|$.

164. Έστω z = w – 3 + 2i. Αν η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο K(2, -3) και ακτίνα ρ=4, να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-5+4i|$.
γ) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+2+i|$.

165. Έστω z∈C με $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{z-i}\right)=\dfrac{1}{2}$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-4i|$.
γ) Να αποδείξετε ότι: $|z-4i| > 3$.

Κύκλος και ευθεία -ελάχιστο μέτρο $|z-w|$

166. Έστω $|z-6i| = 2|z-3i|$ και $|\overline{w}+4-i| = |w-2+9i|$. Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.
γ) Την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

167. Έστω $|(2+i)z-7-11i|=5\sqrt{5}$ και $|w+2-4i|=|w+10+2i|$.
Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.
γ) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.
δ) Την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

168. α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει: $|(1-i)z-2|=2$.
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_2 των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει: $\left|\frac{w+2i}{w-2+4i}\right|=1$.
γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Δύο κύκλοι / μέγιστη – ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

169. Αν για τους μιγαδικούς z, w είναι: $|z+2|=1$ και $|w-4i|=2$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

170. Έστω $|iz-3|=1$ και $|w+6|^2+|w+2|^2=16$. Να βρείτε:
α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και του w.
β) Την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

171. Αν για τους μιγαδικούς z, w είναι: $w=\frac{3z-9i}{z+5i}$ με $z \neq -5i$. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει τον κύκλο c_1: $x^2+(y-4)^2=9$, να αποδείξετε ότι:
α) $|z|^2+4(z-\bar{z})i+7=0$
β) η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο c_2: $x^2+y^2=1$.
γ) $0<|z-w|<8$.

έλλειψη

172. Έστω $z \in C$ με $\frac{(z+\bar{z})^2}{100}-\frac{(z-\bar{z})^2}{64}=1$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.
β) Να αποδείξετε ότι: $|z+3|+|z-3|=10$.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

173. Δίνεται η εξίσωση: $|z+4i|^2+|z-4i|^2+2|z^2+16|=100$. Να αποδείξετε ότι:
α) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση είναι η έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε'(0, -4), Ε(0, 4) και σταθερό άθροισμα 2α = 10.
β) αν δύο αντίθετοι μιγαδικοί z_1, z_2 επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση, τότε: $6 \leq |z_1-z_2| \leq 10$.

174. Έστω $z \in C$ με $\dfrac{Re^2(z)}{25}+\dfrac{Im^2(z)}{16}=1$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων $|z-\bar{z}|$ και $|z+\bar{z}|$.

υπερβολή

175. Αν για το μιγαδικό z ισχύει η σχέση:
$|z+5i|^2+|z-5i|^2=2|z^2+25|+64$, να αποδείξετε ότι:
α) η εικόνα του z ανήκει σε υπερβολή
β) $\dfrac{Im^2(z)}{4^2}-\dfrac{Re^2(z)}{3^2}=1$
γ) $|z-\bar{z}|=8 \Leftrightarrow z=\pm 4i$.

176. Αν για τους μιγαδικούς z, w είναι:
$|z-2|+|w-2|=|z+2|+|w+2|=|z+2|+|w-2|+2$, να βρείτε:
α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z και w
β) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

μερικές "ιδιαίτερες " περιπτώσεις

177. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, όταν:
α) $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$
β) $(z-i)(\bar{z}+i)+3|z-i|=4$

178. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, όταν:
$z=\dfrac{3\lambda+i}{1+\lambda i}$, $\lambda \in R$. Όμοια αν: $z=\dfrac{\lambda+2i}{1+\lambda i}$, $\lambda \in R$.

179. Αν $|z+2i|=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων

α) του z β) του $\bar{z}$ γ) του $\frac{1}{z}$.

180. Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι: $|z^2+iz+1|\le\sqrt{5}$.

181. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1+1|=2$ και $|z_2+1|=2$.
α) να δείξετε ότι: $|z_1-z_2| \le 4$. Πότε ισχύει η ισότητα;
β) Αν $|z_1-z_2| = 4$, να δείξετε ότι: $|z_1+z_2| = 2$.

182. Έστω $z_1, z_2\in C$ με $z_1 z_2 \neq 0$. Αν A, B οι εικόνες των μιγαδικών z_1+z_2 και z_1-z_2 αντίστοιχα και $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, να δειχτεί ότι: $|z_1|=|z_2|$.

183. Έστω $z_1, z_2\in C$ με $z_1^7=3+4i$ και $z_2^7=4+3i$. Να δειχτεί ότι:
α) ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.
β) ο αριθμός $w=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ είναι φανταστικός.

184. Έστω O η αρχή των αξόνων, A η εικόνα του 1 και M η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.
α) Να βρεθεί η συνθήκη ώστε η MO να είναι κάθετη στην MA.
β) Αν $z=(1+ki)^{-1}$, $k\in R$, να δειχτεί ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με διάμετρο τη μονάδα.

185. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha, \beta\in R$ και $w=3z-i\bar{z}+4$.
α) Να δείξετε ότι: $Re(w)=3\alpha-\beta+4$ και $Im(w)= 3\beta-\alpha$.
β) Να δείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.
γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. (ΘΕΜΑ 2003)

186. Αν $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $w=1+z$, να δείξετε ότι:

α) $1+z+z^2=0$
β) $z^3=1$
γ) $w^{2\nu}=z^{\nu}$ για κάθε φυσικό ν
δ) Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς w^{300} και w^{333}.

187. Έστω το τριώνυμο $P(z)=\alpha z^2+\beta z+\gamma$ με $\alpha\neq 0$, με διακρίνουσα $\Delta<0$ και $\alpha, \beta, \gamma\in R$, ενώ $z\in C$. Αν z_1, z_2 οι λύσεις της $P(z)=0$
α) να δείξετε ότι: $z_1+z_2\in R$ και $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}\in R$ $(\nu\in N^*)$
β) Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
$d(A,B)=\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{|\alpha|}$.
γ) Αν $\Gamma(z_1+z_2)$ η εικόνα του z_1+z_2, τότε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E_{(AB\Gamma)}=\dfrac{|\beta|\sqrt{|\Delta|}}{4\alpha^2}$.

188. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z=\dfrac{\lambda+2i}{1+\lambda i}$, με $\lambda\in R$, ανήκουν σε έναν ορισμένο κύκλο.

189. Αν ισχύει: $z^{100}+z^{99}+z^{98}+\ldots+z+1=0$, να δείξετε ότι:
α) $z^{101}=1$ β) $z+\dfrac{1}{z}\in R$.

190. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(1+z)^{\nu}}{1+z^{\nu}}$, $\nu\in N^*$.
α) Να δείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f(z)$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του ν ορίζεται το f(i).
γ) Να δείξετε ότι: $f(i)\in R$, για κάθε επιτρεπτή τιμή του ν.

α) Αν $\left|z^2\right|=\left|z^2+1\right|$, να δείξετε ότι: $Re(z^2)=-\dfrac{1}{2}$.
β) Αν $|z|^3=\left|iz^3+2\right|$, να δείξετε ότι: $Im(z^3)=1$.

191. Έστω $z_1, z_2\in C^*$ με $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Να δείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο με κορυφές O(0), $A(z_1)$ και $B(z_2)$ είναι ισόπλευρο.

β) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2005} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2005} = 1.$

192. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

Α) Να δείξετε ότι:

i) $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

ii) $|z_1-z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \ge -1$.

Β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. **(ΙΟΥΝΙΟΣ 2006)**

193. Αν για το μιγαδικό z ισχύει: $\left|1-\frac{1}{z^2}\right| = \frac{|z^2-i|}{z\overline{z}}$, τότε:

α) Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z^2)=\mathrm{Im}(z^2)$.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z^2-1|$.

194. Έστω $|4z-1| = 2|z|$. Να βρείτε:

α) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

β) Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $\frac{1}{z}$.

γ) Την ελάχιστη τιμή του $\left|\frac{z^2-1}{z}\right|$.

195. Αν υπάρχει ακριβώς ένας μιγαδικός z ώστε να ισχύουν: $|z-z_1|=\alpha$ και $|z-\overline{z_1}|=\beta$ όπου α, β>0 και $z_1\in C^*$, να δείξετε ότι: $|2\,\mathrm{Im}(z_1)|=|\alpha\pm\beta|$.

(υπόδειξη: Ο μοναδικός z ανήκει σε δύο κύκλους… οπότε εφάπτονται…)

196. Να βρείτε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού $\nu \neq 0$ ισχύει: $(2\alpha+2\beta i)^\nu + 2(\alpha i-\beta)^\nu + 2(\beta-\alpha i)^\nu = 0$ αν $\alpha+\beta i \neq 0$.