1. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

Α. ΠΡΑΞΕΙΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις:
   α) $3(2α – 3β) – 4[-3α +2 (α + 2β – 1)]$
   β) $4[3(2-5x) + 4(3x+1)] + 5[2(1-2x)-3]$
   γ) $5+5[3-4[-2-3[1-2(x+1)]]]$
   δ) $-3[2(1-3x)-3[-3(2x-1)-4(3x-5)-2x+1]]$

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
   α) $\dfrac{1-\dfrac{1-\frac{1}{2}}{2}}{3-\dfrac{3}{2-\frac{1}{3}}}$ β) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{-3+\dfrac{2+\frac{1}{4}}{3}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3-\frac{5}{3}}}$.

3. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:
   α) $Α=2[x(y-1)-y(x-2)]+3(x-y)$ όταν $x=7,5$ και $y=2,5$
   β) $Β=3(5x+y+4xy)-4[2x-y-3(2-xy)]$ όταν $x=9,4$ και $y= 0,6$
   γ) $Γ=α(2α-3)+β(2β+3)-4αβ$ όταν $α-β=3$.

4. Αν $(x-1)(x+2)=0$ και $(x-3)(x+2)\neq 0$, να βρεθεί ο x.

5. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίθετοι, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
   $A = 2(-y-3xy+2x)-3[-2(xy+1)+x-y]$.

6. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι με $α = x-2(x+xy)$ και $β = x(y+1) + 1$, τότε:
   α) να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι.
   β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
   $$A=\frac{x-5(x+α)+4x(y+1)-5(β+1)}{x(1+y)-x(1+2y)}.$$

7. Αν οι αριθμοί $α-\dfrac{1}{2}$, $β-2$ είναι αντίστροφοι, να δείξετε ότι:
   α) $4α+β=2αβ$
   β) οι αριθμοί $x=\dfrac{α}{2}-\dfrac{β}{4}$ και $y=α\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{β}{2}\right)+\dfrac{β}{2}$ είναι αντίθετοι.

8. Αν $(2x^3-2x^2)(9x^2-1)=0$, να βρεθεί ο x.

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:
   $$A=\frac{4}{(2x-1)(3x+2)}+\frac{2x-1}{x(1-2x)(x+7)}$$
   $$B=\frac{3x}{4x-16}+\frac{x+1}{4x-x^2}+\frac{1}{x}$$

$\Gamma=\dfrac{x+1}{1+\dfrac{1}{x}}$ $\qquad$ $\Delta=\dfrac{\dfrac{3}{x-2}}{1+\dfrac{1}{x}}$ $\qquad$ $E=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}+\dfrac{5x}{x^2+10}-\dfrac{6}{1-\dfrac{1}{2x}}$.

Β. ΑΡΤΙΟΙ- ΠΕΡΙΤΤΟΙ

10. Να δείξετε ότι:
    α) το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός αριθμός.
    β) η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος.
    γ) το τετράγωνο ενός άρτιου αριθμού είναι άρτιος.
    δ) το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός.

11. Να δειχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών είναι άρτιος αριθμός.

12. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:
    α) ο αριθμός 5β + γ είναι περιττός
    β) ο αριθμός 3α + β + γ + 2 είναι πολλαπλάσιο του 5
    γ) ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ δεν είναι ακέραιος.

13. Αν ο α είναι περιττός, να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{\alpha+1}{5\alpha+1}$ μπορεί να απλοποιηθεί.

14. Αν x, y, z, ω είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί, να δείξετε ότι:
    α) οι αριθμοί xz + yω και xz - yω είναι περιττοί.
    β) Το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 2 αλλά όχι του 4.

15. Να δείξετε ότι:
    α) το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.
    β) το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων είναι πολλαπλάσιο του 8.

16. Αν ο ακέραιος α είναι περιττός, να δείξετε ότι ο αριθμός $(\alpha^2+3)(\alpha^2+7)$ είναι πολλαπλάσιο του 16.

17. Αν α, β, γ, δ, ε είναι διαδοχικοί φυσικοί με α < β < γ < δ < ε, να δείξετε ότι:
    α) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α + β + γ + δ + ε είναι 0 ή 5
    β) ο αριθμός δε - αβ είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3
    γ) ο αριθμός γε - βδ είναι περιττός.

18. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{15\nu+4}{3\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ δεν είναι ακέραιος.

19. Αν α περιττός, β άρτιος και α+βξ=0, τότε ο ξ δεν είναι ακέραιος.

20. Αν χ,ψ ρητοί και ισχύει: $\chi+\psi\sqrt{2}=0$, να δείξετε ότι: χ=ψ=0.
    (Γενίκευση: Αν ρ_1,ρ_2 ρητοί, α άρρητος και ισχύει: $\rho_1+\rho_2\alpha=0$, τότε $\rho_1=\rho_2=0$).

Γ. ΔΥΝΑΜΕΙΣ

21. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:
α) $(2x^4y^3)(-3x^2y^{-3})$ β) $(-2x^{-6}y)(x^4y^{-2})$
γ) $(-5α^2β^3γδ^2)(4αβ^2γ^2δ^3)(-βγ^3δ)^4$ δ) $5χψ^2ω(-2ψ^3ω)^{-1}(3χ^2ψω^3)^{-2}$

22. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $2^{κ+1}2^{-2κ+3}2^{4κ}$ β) $\dfrac{3^κ3^{-2κ-1}3^{4κ}}{3^{κ-2}3^{-5κ+3}}(3^{κ-3}3^0)$

23. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα:
α) $\left(\dfrac{2x^{-3}}{y^2}\right)^4\cdot\left(\dfrac{y^{-2}}{x^2}\right)^{-3}$ β) $\left(\dfrac{-2x^2}{y^3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{4x^{-3}}{y^{-2}}\right)^{-2}$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $\dfrac{(15χ^2ψ)(3χψ^2)^3}{20χ^3(ψ^2)^3}$ β) $\dfrac{(3χ^2)^{-2}3χ^2(ψ^{-2})^{-1}}{(3χ^{-1})ψ^{-2}(χψ)^2}$
γ) $\left(\dfrac{χ^{-1}ψ}{χ^2ψ^2}\right)^{-2}:\left(\dfrac{χ^{-2}ψ^2}{χ^3ψ^{-3}}\right)^{-1}$ δ) $\left(\dfrac{3α^2β^{-1}}{2αβ^3}\right)^2:\left(\dfrac{2αβ^{-2}}{3α^3β}\right)^{-1}$.

25. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:
$Α=[χ^3ψ(χ^{-2})^{-2}]:(ψ^2)^{-3}$ όταν $χ=0{,}5$ και $ψ=2$
$Β=α^8β^4γ^{-12}$ όταν $α=\dfrac{3}{2}$, $β=4$ και $γ=3$
$Γ=\left[\dfrac{α^2βγ^3}{α^{-1}β^2γ^4}\dfrac{(α^{-1}βγ^{-2})^2}{(βγ^{-2})^{-3}}\right]^{-1}:(α^3β^{-1}γ^2)^{-2}$ όταν $α=5^{-2}$, $β=\dfrac{1}{10}$ και $γ=0{,}2$.

26. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
$Α=\left(\dfrac{χ^2}{2ψ}\right)^5\left(\dfrac{4ψ}{χ}\right)^6\left(\dfrac{ψ^{-1}}{2^{-2}}\right)^{-3}$ αν οι αριθμοί χ ,ψ είναι αντίστροφοι.

27. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $Α=\dfrac{\left(\dfrac{25}{27}\right)^5\left(\dfrac{18}{35}\right)^5 7^5}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^5}$ β) $Β=12^{80}4^{-41}6^{-78}$.

28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $Α = 2^{505} - 4^{252} - 2^{503}$ και $Β = 3^{2013} - 2\cdot 3^{2012}$.

29. Τα τελευταία ψηφία του αριθμού $Α = 1{,}25^8\cdot 64^4$ είναι μηδενικά. Να βρείτε πόσα είναι.

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x = \frac{1}{8}$ ii) $5^{-x} = \frac{1}{25}$ iii) $4^{5x-15}=1$ iv) $9^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4x+1} = \frac{1}{27}$.

Δ. ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

31. Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, να δείξετε ότι:

α) $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{3\gamma-2\alpha}{3\delta-2\beta}$ β) $\frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{3\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$ γ) $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

32. Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, να δείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\delta}=(\frac{\beta}{\gamma})^3$.

33. Αν $\frac{\lambda}{\alpha-\beta}=\frac{\mu}{\beta-\gamma}=\frac{\nu}{\alpha-\gamma}$, να δείξετε ότι: λ + μ = ν.

34. Αν $\frac{\chi}{\psi}=\frac{3}{4}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A=\frac{\chi+\psi}{\psi}$, $B=\frac{\chi}{\chi-\psi}$, $\Gamma=\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}$, $\Delta=\frac{\chi-2\psi}{\chi+2\psi}$, $E=\frac{7\chi-4\psi}{3\chi+\psi}$.

35. Αν χ + ψ + ω = 80 και $\frac{\chi}{3}=\frac{\psi}{8}=\frac{\omega}{9}$, να βρεθούν οι χ, ψ, ω.

36. Αν χ + ψ=54 και $\frac{\chi}{4}=\frac{\psi}{5}=\frac{\omega}{6}$, να υπολογιστούν οι χ, ψ, ω.

37. Αν 3χ + 4ψ -5ω=2 και οι αριθμοί χ, ψ, ω είναι ανάλογοι των αριθμών 2, 3, 6 αντίστοιχα, να βρεθούν οι χ, ψ, ω.

38. Αν οι α, β, γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 1, 2, 4 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 7.

39. Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου, αν είναι γνωστό ότι είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1,3,5.

40. Αν $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\beta}{\psi}=\frac{\gamma}{\omega}$, να δείξετε ότι: $(\chi^2+\psi^2+\omega^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega)^2$.

41. Αν $\frac{3\chi+2\psi}{\chi+6\psi}=\frac{3\chi-2\psi}{\chi+2\psi}$ με $\psi\neq 0$, να βρεθεί ο λόγος $\frac{\chi}{\psi}$.

42. Αν $\frac{\alpha-3\beta}{2\beta}=\frac{6\alpha-5\beta}{5\alpha}$ με $\alpha\beta\neq 0$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι.

43. Αν $ν=5λ+1$ με $λ\in Z$, να δείξετε ότι ο αριθμός $χ=3ν^2+3ν-1$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

44. Αν ο αριθμός $\dfrac{α+β\sqrt{2}}{χ+ψ\sqrt{2}}$ είναι ρητός και $χψ\neq 0$, να δείξετε ότι: $\dfrac{α}{χ}=\dfrac{β}{ψ}$ και αντίστροφα.

Ε. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

45. Να αποδείξετε ότι:
α) $(α - β)^2 -2(α - β)(α + β) + (α + β)^2 = 4β^2$
β) $(α - β)^3 -α(α + β)^2 + 5α^2β = β^2(2α - β)$
γ) $(α + β)^2 + (α - β)(α + β) - (α - β)^2 = α(2β + α) + β(2α - β)$
δ) $\left(\dfrac{α+β}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{α-β}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{25}αβ$

46. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:
α) $(α + β + γ)^2 - (α - β + γ)^2 + (α + β -γ)^2 - (α - β -γ)^2 = 8αβ$
β) $(α^2 + β^2)^2 + 4αβ(α^2 - β^2) = (α^2 - β^2 + 2αβ)^2$
γ) $(α + β)^3 + 2(α^3 + β^3)= 3(α + β)(α^2 + β^2)$
δ) $(α + β + γ)^3 = α^3 + β^3 + γ^3 + 3(α + β)(β + γ)(γ + α)$
ε) $α(β^2 - γ^2) + β(γ^2 - α^2) + γ(α^2 - β^2) = (α - β)(β - γ)(γ - α)$.

47. α) Να κάνετε τις πράξεις: $α(α - 2) - (α - 1)^2$.
β) Να υπολογίσετε την παράσταση: $2012\cdot 2010 - 2011^2$.

48. α) Να αποδείξετε ότι: $\left(α+\dfrac{1}{α}\right)^2 - \left(α-\dfrac{1}{α}\right)^2 = 4$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2.$$

49. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x
$Α = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)^3 + 3x(x + 1)$
$Β = (x^2 - 1)^3 + 3x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

50. Να αποδειχθούν οι παρακάτω συνεπαγωγές:
α) $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 \Rightarrow x = y$
β) $\dfrac{α+β}{α}+\dfrac{α+β}{β} = 4 \Rightarrow α = β$
γ) $(α^2 + β^2)(γ^2 + δ^2) = (αγ + βδ)^2 \Rightarrow αδ = βγ$
δ) $α + β = 1 \Rightarrow α^3 + β^3 + 3αβ = 1$
ε) $α - β = 2 \Rightarrow α^2 + β^2 - 2αβ - 4α + 4β + 3 = -1$.

51. Αν $α + β + γ = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\beta$ β) $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha\beta} = -2$.

52. Αν $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma} = 0$, να δείξετε ότι:
α) $\beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\beta = 0$ β) $(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

53. Αν $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $\alpha^2 + \beta^2$ β) $\alpha^3 + \beta^3$ γ) $\alpha^4 + \beta^4$ δ) $\alpha^6 + \beta^6$.

54. Αν $\alpha + \beta = 4$ και $\alpha\beta = 1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$ β) $\alpha^2 + \beta^2$ γ) $\alpha^3 + \beta^3$ δ) $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$ ε) $\alpha^4 + \beta^4$ στ) $\alpha^6 + \beta^6$.

55. Αν $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha\beta = -2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ β) $\dfrac{1}{\alpha^3} + \dfrac{1}{\beta^3}$.

56. Αν $\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = -3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ β) $\alpha^3 - \dfrac{1}{\alpha^3}$.

57. Αν $\alpha + \dfrac{2}{\alpha} = 3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\alpha^2 + \dfrac{4}{\alpha^2}$ και $\alpha^3 + \dfrac{8}{\alpha^3}$.

58. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να δείξετε ότι:
α) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)^2$
β) $\dfrac{1}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} + \dfrac{1}{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2} + \dfrac{1}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2} = 0$.
γ) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \dfrac{\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \dfrac{\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \gamma} = 0$.

59. Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 0$.

60. Να βρείτε τους α και β, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha + \beta)$ β) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 4\beta + 5 = 0$.

61. Αν $\chi^2+\psi^2+\omega^2+3 = 2(\chi + \psi + \omega)$, να βρείτε τους χ, ψ, ω.

62. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να δείξετε ότι:
α) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και στη συνέχεια με τη βοήθεια του α)
β) $\dfrac{\alpha^4}{3\alpha\beta\gamma - \beta^3 - \gamma^3} + \dfrac{\beta^4}{3\alpha\beta\gamma - \alpha^3 - \gamma^3} + \dfrac{\gamma^4}{3\alpha\beta\gamma - \alpha^3 - \beta^3} = 0$

γ) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=0.$

63. Αν x, y, z $\in$Z και x + y + z = 0, $\alpha - x^3 = 3xyz$, $\beta - y^3 = 3xyz$, $\gamma - z^3 = 3xyz$, να δείξετε ότι ο αριθμός α + β + γ είναι πολλαπλάσιο του 12.

64. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν > 1:
α) το 24 είναι διαιρέτης του $5^{2\nu} - 1$
β) το 8 είναι διαιρέτης του $7^{2\nu+1} + 1$
γ) το 9 είναι διαιρέτης του $10^{\nu} + 8^{2\nu} - 2$.

65. Αν $x = 4(3\kappa + 1)$, $y = 9\kappa^2 + 6\kappa - 3$, $\omega = 9\kappa^2 + 6\kappa + 5$, να δείξετε ότι: $x^2 + y^2=\omega^2$.

66. Αν α + β + γ= 2τ, να δείξετε ότι: $\dfrac{\gamma^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}=\dfrac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma}$.

67. Να δείξετε ότι: $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$ (ταυτότητα De Moivre).

ΣΤ. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

68. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $12xy^2 + 9x^2y + 3x^3$ β) $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2x^3y$
γ) $3x(x-1) - x +1$ δ) $(5\alpha - 3\beta)(4x-3y) + (3y-4x)(\beta-3\alpha)$
ε) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$ στ) $6x^2 - 4\alpha x -9\beta x + 6\alpha\beta$
ζ) $25\alpha^2 - 16\beta^2$ η) $(\alpha+3)^2 - (\alpha-3)^2$
θ) $x^4 - 4x^2y^2$ ι) $x^2 - 2x - y^2 +1$
ια) $x^2 + 5x + 6$ ιβ) $x^2 -12x + 20$
ιγ) $x^2 + 2x - 15$ ιδ) $x^3 - 7x^2 + 6$
ιε) $8x^3 - 1 - (2x-1)^2$ ιστ) $4x^3 - 4 + 16x^2 - x$

69. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
i) $81x^4-y^2$ ii) $4(2x-3y)^2-9(6x+7y)^2$ iii) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$
iv) x^3-3x+2 v) $3x^2+2\alpha x-\alpha^2$ vi) $x^2-2xy+y^2-x+y$
vii) x^4+x^2-2 viii) $8x^6-7x^3-1$ ix) $8\alpha^3+64$
x) $x^3y^6+z^3$ xi) $4x^2+4x+1-4y^2$ xii) x^2-3y^2+2xy

70. Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα:
α) $\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+4x}$ β) $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$ γ) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+1}$
δ) $\dfrac{4x-x^3}{x^2-4x+4}$ ε) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma}$ στ) $\dfrac{x^4+x^3+x-1}{x^4+1}$

71. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
i) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1} - \dfrac{\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$ ii) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+4} - \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{2x-x^2}$

iii) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{3}{x^2+x-2}$

iv) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x^2}{x^2-9}:\dfrac{2x-x^2}{x^2+5x+6}$.

72. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
και στη συνέχεια:
α) να τραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση:
i) $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3-(\alpha-\gamma)^3$ ii) $(\alpha+\beta-\gamma)^3+(\alpha-\beta+\gamma)^3+(-\alpha+\beta+\gamma)^3$
β) Αν $x=\beta+\gamma-2\alpha$, $y=\alpha+\gamma-2\beta$, $\omega=\alpha+\beta-2\gamma$, να γίνει γινόμενο η παράσταση: $x^3+y^3+\omega^3$.
γ) Αν $\alpha+\beta+\gamma=x+y+\omega$, να γίνει γινόμενο η παράσταση: $(\alpha-x)^3+(\beta-y)^3-(\omega-\gamma)^3$.
δ) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma+2)}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}=3$.

73. α) Να δειχτεί ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.
β) Αν: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$, να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}=\alpha^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}+\gamma^{2\nu+1}$.

74. Αν $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, να δείξετε ότι:
$\dfrac{1}{\alpha^{2\nu+1}}+\dfrac{1}{\beta^{2\nu+1}}+\dfrac{1}{\gamma^{2\nu+1}}=\dfrac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}}$.

75. Αν $x+y+z=xyz\neq 0$, να δείξετε ότι: $\dfrac{\chi+y}{z}+\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{x+z}{y}=xy+yz+zx-3$.

76. Αν $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ με $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$, να δείξετε ότι:
α) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$
β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
γ) $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$
δ) $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$.

77. Αν $\dfrac{\alpha^2-\delta^2}{\beta^2\gamma^2-\delta^4}=\dfrac{\alpha}{\beta\gamma\delta}$, να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ ή $\alpha\beta\gamma+\delta^3=0$.

78. Να τραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση:
$A=\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$.

2. ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι:
   α) $\alpha^2+4\geq 4\alpha$ β) $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ γ) $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\geq -3\beta^2$ δ) $3\alpha^2+2\alpha+1>0$.

2. Αν $\alpha>\beta>0$, να δείξετε ότι: $\alpha^3-\beta^3>(\alpha-\beta)^3$.

3. Αν $\alpha\beta>0$, να δείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$.

4. Αν $\alpha\beta<0$, να δείξετε ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$.

5. Αν $\alpha-\beta=4$, να δείξετε ότι: α) $\alpha\beta\geq -4$ β) $\alpha^2+\beta^2\geq 8$.

6. Αν $1,1<\alpha<1,2$ και $1,4<\beta<1,5$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
   α) $\alpha+\beta$ β) $\alpha-\beta$ γ) $\frac{\alpha}{\beta}$ δ) $\alpha^2-\beta^2$ ε) $\frac{-3\alpha+5\beta}{\alpha+2\beta}$.

7. Αν $2<\alpha<3$ και $1<\beta<\frac{5}{2}$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
   α) $\alpha+\beta$ β) $\alpha-\beta$ γ) $\alpha\beta$ δ) $\frac{\alpha}{\beta}$ ε) $2\alpha-4\beta+5$
   στ) $\alpha^2+\beta^2$ ζ) $\alpha^3-4\beta^2$ η) $3\alpha^2-2\beta+4\alpha\beta$ θ) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{3\alpha-2\beta}$.

8. Να δείξετε ότι:
   i) $\alpha^2+16\geq 8\alpha$ ii) $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha-\beta)^2$ iii) $(\alpha-\beta)^2+8\beta^2\geq 4\alpha\beta$
   iv) $\alpha^2+4\alpha+5>0$ v) $2\alpha^2-2\alpha+1>0$ vi) $\alpha^2+\beta^2+8\geq 4(\alpha-\beta)$.

9. Αν $x>3$, να δείξετε ότι: $x^3>3x^2-2x+6$.

10. Αν $0<\alpha<1$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}>2$.

11. Να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta)(4\alpha+9\beta)\geq 25\alpha\beta$.

12. Αν α, β ομόσημοι και $\alpha\neq\beta$, να δείξετε ότι: $\left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^2<\alpha\beta<\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

13. Αν $x>1$ και $y<2$, να δείξετε ότι: $2x+y-xy>2$.

14. Να δείξετε ότι: $x^2+y^2+z^2+3\geq 2(x+y+z)$.

15. Αν $x<1$ και $y<1$, να δείξετε ότι: $x+y<1+xy$.

16. Αν $α>1$, να δείξετε ότι: $2α^4+1\geq 2α^3+α^2$.

17. Να δείξετε ότι: $(α^2+β^2)(x^2+y^2)\geq(αx+βy)^2$.

18. Αν $x>y>0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $α=\dfrac{x-y}{x+y}$ και $β=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

19. Αν $α>0$, $β>0$ και $αβ=1$, να δείξετε ότι: $\left(1+\dfrac{1}{α}\right)\left(1+\dfrac{1}{β}\right)\geq 9$.

20. Να δείξετε ότι: $\dfrac{ν^2+ν+1}{ν}\geq 3$, όπου ν φυσικός αριθμός.

21. Να δείξετε ότι: $α^2+β^2+γ^2+δ^2\geq(α+β)(γ+δ)$.

22. Αν οι α, β είναι θετικοί, να δείξετε ότι: $(α+β)\left(\dfrac{1}{α}+\dfrac{1}{β}\right)\geq 4$.

23. Να δείξετε ότι: $α^2+β^2+γ^2+αβ+βγ+αγ\geq 0$.

24. Αν α, β, $γ>0$, να δείξετε ότι:
 α) $\dfrac{α^2+β^2}{α+β}\geq\dfrac{α+β}{2}$ β) $\dfrac{α^2+β^2}{α+β}+\dfrac{β^2+γ^2}{β+γ}+\dfrac{α^2+γ^2}{α+γ}\geq α+β+γ$.

25. Πότε ισχύει η ανισότητα: $x^3+1>x^2+x$;

26. Αν α, $β>0$, να δείξετε ότι: $\dfrac{α^3+β^3}{2}\geq\left(\dfrac{α+β}{2}\right)^3$.

27. Να δείξετε ότι:
 α) $α^2+β^2+γ^2-αβ-βγ-αγ\geq 0$
 β) αν $α+β+γ>0$, τότε: $α^3+β^3+γ^3\geq 3αβγ$.

28. Να δείξετε ότι: $α^2+4β^2+3γ^2+15>2α+12β+6γ$.

29. Αν $αβ+γδ=1$, να δείξετε ότι: $α^2+β^2+γ^2+δ^2\geq 2$.

30. Αν $α+β+γ=5$, να δείξετε ότι: $α^2+β^2+γ^2\geq\dfrac{25}{3}$.

31. Αν $α>0$, να δείξετε ότι: $α^7+1\geq α^6+α$.

32. Αν α, $β\geq 0$, να δείξετε ότι: $α^3+β^3\geq α^2β+αβ^2$. Πότε ισχύει το «=»;

33. Αν -1<α<0 και -1<β<0, να δείξετε ότι: $-1<\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}<0$.

34. Αν α, β∈R με αβ=1, να δείξετε ότι: (1+α)(1+β) ≥4.

35. Αν α, β>0, να δείξετε ότι: $\frac{\alpha+\beta}{4}\geq\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Πότε ισχύει το «=»;

3. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Α. Απλοποίηση παραστάσεων με απόλυτα

1. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών:
   i) $-(-3)^{-2}$ ii) $2-\sqrt{5}$ iii) 3-π iv) $-2\alpha^2-1$ v) α^2+3 vi) $|\alpha|+1$.

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:
   Α= $2|x^2+1|+|-5|-2|3|$ Β= $-2|-x^2-2|+3|-4|-2|-3|$.

3. Αν -1< x < 2, να απλοποιήσετε την παράσταση: Α= $3|x-2|+4|x+1|-2|x-3|$.

4. Αν -2< x < 1, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   Α= $3|x+2|-4|x-1|$ Β= $|x+3|-|x-2|$.

5. Αν α > β > 0, να απλοποιήσετε την παράσταση:
   Α= $3|\alpha-\beta|-2|\beta-\alpha|+|\alpha+\beta|-5|2\alpha-\beta|$.

6. Αν 2 < x < y < 3, να απλοποιήσετε την παράσταση:
   Α= $3|x-y|+|x-1|+4|x+y-4|+|2x-1|+|2x+2y|$.

7. Αν -1< α <1, να δείξετε ότι: $\big|2-|\alpha-1|\big|$ = α+1.

8. Αν ο πραγματικός αριθμός x δεν ανήκει στο διάστημα [1, 2], να απλοποιήσετε την παράσταση: Α= $\big||2-x|-|1-x|\big|$.

9. Πότε ισχύει καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες;
   α) $|x-1|$ = x-1 β) $|2-x|$ = x-2 γ) $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$ δ) $\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}$.

10. Να γραφούν χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής οι παραστάσεις:
    Α= $1-|x-1|$ Β= $2x+|x+1|$ Γ= $x-|3-x|$ Δ= $5x-3|2-x|$.

11. Να γραφούν χωρίς το σύμβολο τις απόλυτης τιμής οι παραστάσεις:
    Α= $|x|+|x-1|$ Β= $|x-4|+2|3-x|+5$ Γ= $2|x-1|+3|2-x|$.

12. Αν $\alpha \neq \pm 1$, να δείξετε ότι η παράσταση: Α= $\frac{|\alpha+1|}{\alpha+1}+\frac{\alpha-1}{|\alpha-1|}$ παίρνει μία από τις τιμές -2, 0, 2 για κάθε τιμή του α.

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
Α=$\left|x+|x|\right|-\left|x-|x|\right|$ Β=$(|x|-|y|)(|x|+|y|)\cdot\left(x^2+y^2\right)$.

14. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του α, την παράσταση: Α= $\frac{|\alpha+1|-|\alpha-1|}{|\alpha+1|+|\alpha-1|}$.

15. Αν $x \notin [\alpha,\beta]$ και α<β, να δείξετε ότι: $\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|$=β-α.

<u>Β. Απόλυτη τιμή αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου</u>

16. Να εξεταστεί πότε ισχύει καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες:
α) $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|$ β) $|\alpha+\beta|=\left||\alpha|-|\beta|\right|$ γ) $|\alpha-\beta|=|\alpha|-|\beta|$.

17. Πότε το άθροισμα και η διαφορά δύο αριθμών έχουν την ίδια απόλυτη τιμή;

18. Αν $y|x|-x|y|=y|y|-x|x|$, να δείξετε ότι: x=y ή x= -y.

19. Αν αβ+$|\alpha\beta|=\alpha|\beta|+\beta|\alpha|$, να δείξετε ότι: $\alpha \geq 0$ ή $\beta \geq 0$.

20. Αν α=$\frac{\beta}{1+|\beta|}$, να δείξετε ότι: $|\alpha|<1$ και β=$\frac{\alpha}{1-|\alpha|}$.

21. Αν β=$\frac{\alpha-2|\alpha|-2}{|\alpha|+1}$, να δείξετε ότι: $|\beta+2|<1$.

22. Αν $\left|\frac{2\alpha+3\beta}{3\alpha+2\beta}\right| \leq 1$, να δείξετε ότι: $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leq 1$.

23. Αν $|x|<1$ και $|y|<1$, να δείξετε ότι: $|3x-2y|<5$.

24. Αν $|\alpha| \leq 2$, να δείξετε ότι: $\left|3\alpha-2\alpha^2\right| \leq 14$.

25. Αν $|\alpha| \leq 2$ και $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι: $|\alpha-4\beta+3| \leq 7$.

26. Αν $|\alpha-\beta| \leq 1$ και $|\beta-\gamma| \leq 2$, να δείξετε ότι: $|\alpha-\gamma| \leq 3$.

27. Αν $xy \neq 0$, να δείξετε ότι: $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$.

28. Αν $|2\alpha + 3\beta| < |\alpha + 6\beta|$ και $\alpha\beta \neq 0$, να δείξετε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{8}{3}$.

29. Για ποιες τιμές του x ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες;
    α) $|x+2|<1$ β) $|x+1|>2$ γ) $|3x-2| \leq 1$ δ) $|2-5x| \geq 7$.

30. Να γραφούν με το σύμβολο της απόλυτης τιμής οι ανισότητες:
    α) $-2 < x < 6$ β) $x < -1$ ή $x > 3$.

31. Αν $d(\alpha, 2\beta) > d(2\alpha, \beta)$, να δείξετε ότι: $|\alpha| < |\beta|$.

32. Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, -1) \geq d(x, 2)$.

33. Να βρείτε το x από την σχέση $\left|d(x^2,-1) + d(x,2) - x^2\right| \leq 3$.

34. Να βρείτε το x από τις σχέσεις:
    α) $d(x, 3) + d(2x, 6) \leq 9$ β) $d(x, 2) \geq d(x,1)$.

35. Αν ισχύει $d(4\alpha-\beta, \alpha-2\beta) = d(2\alpha, 0) + d(2\beta, \beta)$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$,να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

36. Να βρεθούν οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει:
    $|2x - y - 3| + |x + 2y - 4| = 0$.

37. Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει:
    $|x-3| + |y-2| = 2 - y$.

4. ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $x^2 - 4xy + y^2$, όταν:
   α) $x = 2 + \sqrt{3}$ και $y = 2 - \sqrt{3}$ β) $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

2. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις, να τις απλοποιήσετε:
   α) $\sqrt{4\alpha} - \sqrt{36\alpha} + 10\sqrt{\alpha}$
   β) $\sqrt{4\alpha^2\beta} + 6\sqrt{\alpha^2\beta} - 7\alpha\sqrt{\beta}$
   γ) $\sqrt{\alpha^2\beta} + \alpha\sqrt{4\beta} + \sqrt{81\alpha^2\beta}$.

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$, αν $-2 < x < 0$

β) $B = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} + \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}$, αν $|x| < 1$

γ) $\Gamma = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, αν $|x| < 2$.

4. α) Υπολογίστε τις παραστάσεις $(2 + 3\sqrt{5})^2$ και $(2 - 3\sqrt{5})^2$.
   β) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{49-12\sqrt{5}} + \sqrt{49+12\sqrt{5}}$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση $(3 + \sqrt{5})^2$ και στη συνέχεια να απλοποιήσετε την παράσταση: $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

6. α) Υπολογίστε τις παραστάσεις $(2-\sqrt{2})^3$ και $(2+\sqrt{2})^3$.
   β) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$.

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
   α) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ β) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ γ) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ δ) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

8. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης
   $A = \left(\sqrt{\chi-6} - \sqrt{\chi+2}\right)\cdot\left(\sqrt{\chi-6} + \sqrt{\chi+2}\right)$
   $B = \left(\sqrt{\chi-5} - \sqrt{2\chi+3}\right)\cdot\left(\sqrt{\chi-5} + \sqrt{2\chi+3}\right)$,
   αφού βρείτε πρώτα για ποιες τιμές του x ορίζεται.

9. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης
   $A = \left(\sqrt{12} - \sqrt{27}\right)\cdot\left(\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{108}\right)$
   $B = \left(\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{50} - \sqrt{45} + \sqrt{125}\right)$
   $\Gamma = \left(\sqrt{32} + \sqrt{45} - \sqrt{98}\right)\cdot\left(\sqrt{72} + \sqrt{80} - \sqrt{8}\right)$
   $\Delta = \left(\sqrt{112} - \sqrt{7} + \sqrt{48}\right)\cdot\left(\sqrt{63} - \sqrt{48}\right)$.

10. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$.

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   α) $\sqrt{24}\sqrt{3-\sqrt{3}}\sqrt{3+\sqrt{3}}$ β) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}$
   γ) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$ δ) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

12. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας:
   α) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ β) $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$ γ) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ δ) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}$

ε) $\sqrt[5]{\alpha^4} : \sqrt[10]{\alpha^3}$ στ) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$ ζ) $\sqrt[8]{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}$ η) $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{25\sqrt{25\sqrt{5}}}}$.

13. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3}$ β) $\sqrt{7}+\sqrt{3} > \sqrt{10}+1$

γ) $\sqrt{10+2\sqrt{15}} > \sqrt{5}+\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{26}+2 < \sqrt{13}+\sqrt{17}$.

14. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) 3 και $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ και 1 + $\sqrt{2}$ γ) $\sqrt[5]{5}$ και $\sqrt[6]{6}$.

15. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$, $\dfrac{14}{\sqrt[3]{7}}$, $\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}}$ και $\dfrac{2}{\sqrt[5]{4^3}}$

β) $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$, $\dfrac{7}{2-3\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-1}$ και $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

γ) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, $\dfrac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}$ και $\dfrac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$

δ) $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ και $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

16. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}}$ είναι ρητός.

17. Αν $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $x + \dfrac{1}{x}$ και $x - \dfrac{1}{x}$.

18. Αν ο x είναι ρητός αριθμός, να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

α) $\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ β) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ γ) $\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2}$ δ) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

19. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = 6$ β) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 10$.

20. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{17}{3\sqrt{2}+1}$ β) $\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}$.

21. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = 1$

β) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ - $\dfrac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ - $\dfrac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ = 0.

22. Έστω x = $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ - $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.
    α) Να δείξετε ότι: x < 0.
    β) Να δείξετε ότι: $x^2 = 4$.
    γ) Να βρείτε τον αριθμό x.

23. Έστω η παράσταση: Α = $\sqrt{\alpha+1}-1$ με $8 \le \alpha \le 15$.
    α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση Α.
    β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α και τις τιμές του α που τις παρουσιάζει.

24. Να αποδείξετε ότι:
    α) $\sqrt{13+\sqrt{133}}$ - $\sqrt{13-\sqrt{133}}$ = $\sqrt{14}$
    β) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ + $\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ = 3.

25. Να δείξετε ότι ο αριθμός ρ = $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ - $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x^3 + 3x - 2 = 0$.

26. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ και $\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}}$ είναι άρρητοι.