

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ**

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-3,2)$ και:
 - i) είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - y + 2 = 0$
 - ii) είναι κάθετη στην ευθεία $4x + 3y + 2 = 0$
 - iii) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{2\pi}{3}$.
 - iv) σχηματίζει με τον άξονα $y'y$ γωνία $\frac{\pi}{3}$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που :
 - i) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-3,0)$ και $B(0,4)$.
 - ii) περνά από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο $\vec{a} = (-2,3)$.
3. Δείξτε ότι τα σημεία $A(2,1)$, $B(0,-5)$, $\Gamma(1,-2)$ είναι συνευθειακά και να βρείτε την ευθεία που ορίζουν.
4. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(-5,x)$. Να βρεθεί ο $x \in \mathbf{R}$, ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(0,0)$, $B(3,1)$ και $\Gamma(5,3)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών $\Gamma\Delta$, $A\Delta$, $B\Delta$.
6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$, $B(-3,4)$ και $\Gamma(3,-2)$. Να βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς $B\Gamma$, του ύψους $A\Delta$, της διαμέσου AM και της μεσοκάθετης της $B\Gamma$.
7. Αν τα σημεία $\Delta(-1,2)$, $E(0,5)$ και $Z(4,-3)$ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$, να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.
8. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x + y - 3 = 0$ και το σημείο $P(1,2)$. Να βρείτε :
 - i) την προβολή του P στην ε και
 - ii) τις συντεταγμένες του συμμετρικού του P ως προς την ε .
9. Να υπολογισθεί το μήκος του ύψους $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$ στο οποίο οι κορυφές του είναι οι : $A(4,13)$, $B(10,1)$ και $\Gamma(-2,5)$.
10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται: $A(2,1)$, $B(4,-1)$ και το ορθόκεντρο του $H(3,5)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

11. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $A(1,1)$ και οι διάμεσοι του $B\Delta, \Gamma E$ έχουν εξισώσεις : $x+y-2=0$ και $x-2y=0$. Να βρεθούν οι κορυφές B και Γ .
12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$. Αν οι ευθείες $x-y-2=0$ και $3x+y+5=0$ είναι μεσοκάθετες των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να βρεθούν οι κορυφές B και Γ .
13. Να βρεθούν οι ευθείες που περνούν από το $P(-1,4)$ και τέμνουν τους άξονες στα A, B έτσι ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές.
14. Να βρεθεί η ευθεία που περνά από το σημείο $P(1,2)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα A, B έτσι ώστε το P να είναι μέσο του AB .
15. Οι δύο πλευρές ορθογωνίου έχουν εξισώσεις $x-y+3=0$, $x+y-1=0$ και η μία διαγώνιός του $3x+4y-1=0$. Να βρεθούν οι κορυφές του.
16. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις πλευρές του $AB, A\Delta$ στις ευθείες $\epsilon_1: x-3y+11=0$ και $\epsilon_2: x+y-5=0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο $K(-1,1)$, να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
17. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(2-t, \frac{1-2t}{3})$, όταν η παράμετρος t διατρέχει το \mathbf{R} .
18. Δίνονται τα σημεία $A(0,-2)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(t-1, 2-3t)$. Να δείξετε ότι :
- τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $t \in \mathbf{R}$.
 - το Γ διαγράφει σταθερή ευθεία όταν $t \in \mathbf{R}$.
 - για ποια τιμή του t το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι :
 - ορθογώνιο στο A
 - ισοσκελές με $B\Gamma=A\Gamma$.
19. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: x+y-1=0$ και $\epsilon_2: x+3y-4=0$ και το σημείο $A(4,3)$. Να βρεθεί σημείο B της ϵ_1 ώστε η ϵ_2 να περνά από το μέσο του AB .
20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με $A(2,2)$ και $B(-1,-3)$. Αν η εξίσωση του ύψους $A\Delta$ είναι $2y+x-6=0$, να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του .
21. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3,-5)$ και η ευθεία $\epsilon: 7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο M της ϵ ώστε το τρίγωνο ABM να είναι ορθογώνιο στο M .
22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4,5)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,\kappa)$, $\kappa \in \mathbf{R}$. Να βρεθεί ο κ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο A .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

23. Αν το σημείο $A(\kappa, \lambda)$ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: 4x+5y-9=0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(2\kappa+1, 5\lambda-3)$.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

24. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2-1)x + (\lambda^2-3\lambda+2)y + 3\lambda + 5 = 0$. (1) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε η (1) :
- να παριστάνει ευθεία.
 - να είναι παράλληλη στον $x'x$.
 - να είναι παράλληλη στον $y'y$.
 - να περνά από την αρχή των αξόνων.
25. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-\lambda-2)y+\lambda^2+1=0$. (1)
Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία .
26. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$ η εξίσωση:
 $(\lambda^2-5\lambda+6)x+(\lambda^2-4)y-2\lambda+3=0$ παριστάνει ευθεία.
27. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $3x-y-5=0$ και $2x+y=0$.
28. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda-1)x + \lambda y + 3\lambda + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: \lambda x + 3y - 2\lambda + 1 = 0$ να είναι κάθετες.
29. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbf{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: (\kappa^2+\kappa-6)x + \kappa y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: (\kappa^2+3\kappa)x + (\kappa-2)y + 9 = 0$ να είναι παράλληλες.
30. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2+2xy+y^2 - 4x - 4y-12=0$ παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.
31. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2-y^2-2x-4y-3=0$ παριστάνει δύο ευθείες. Να εξεταστεί η σχετική θέση των δύο ευθειών.
32. Να βρεθεί η γωνία των ευθειών με εξισώσεις : $(t-1)x-(t+1)y=0$ και $y-tx=0$ με $t \in \mathbf{R}$.
33. Δίνονται οι εξισώσεις $\varepsilon_1: (k+1)(x+y)+(k-2)(3x-4y)+k=0$ και $\varepsilon_2: x-2y+3=0$.
- Να δείξετε ότι η ε_1 παριστάνει ευθεία για κάθε $k \in \mathbf{R}$.
 - Να βρεθεί ο k ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- 34.** Αν οι κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ είναι τα σημεία $A(2\kappa,4)$, $B(2-6\kappa,2\kappa)$ και $\Gamma(3+\lambda,-\lambda)$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του βαρύκεντρου G του τριγώνου αν $\kappa+\lambda=2$.
- 35.** Να βρεθεί η θέση των ευθειών $\varepsilon_1: \kappa x+(\kappa-8)y-2=0$ και ε_2 , όπου ε_2 η ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο $A(3\kappa-1,\kappa+2)$, $\kappa \in \mathbf{R}$.
- 36.** Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda: (\lambda^2+\lambda+1)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y-2\lambda^2+2\lambda-3=0$ με $\lambda \in \mathbf{R}$.
Να δείξετε ότι:
i) η ε_λ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.
ii) όλες οι ευθείες ε_λ περνούν από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.
- 37.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $(t-2)x+(2t+1)y+t-3=0$ παριστάνει ευθεία (ε) που διέρχεται από σταθερό σημείο A για κάθε $t \in \mathbf{R}$. Για ποια τιμή του t είναι : α) $\varepsilon // x'x$ β) $\varepsilon // y'y$ γ) $OA \perp \varepsilon$
- 38.** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+2y+2\kappa=0$ και $\varepsilon_2: 2x+3y+\kappa-4=0$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbf{R}$, οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται.
β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.
- 39.** Στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε τα μεταβλητά σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ τέτοια ώστε : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3}$. Να δείξετε ότι η ευθεία AB περνά από σταθερό σημείο.
- 40.** i) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών (ε): $(t+1)x+ty-2=0$ και (δ): $tx+(t+1)y+3=0$ για τις διάφορες τιμές του $t \in \mathbf{R}$.
ii) Αν οι ευθείες (ε) και (δ) τέμνονται, να δείξετε ότι:
α) το σημείο τομής τους A κινείται σε σταθερή ευθεία.
β) το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$ με $B(4,0)$ και $\Gamma(-3,1)$ κινείται σε σταθερή ευθεία .
- 41.** Δίνεται η εξίσωση : $2\kappa x-(\kappa+1)y-3\kappa+1=0$, $\kappa \in \mathbf{R}$ (1).
i) Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία.
ii) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) περνούν από σταθερό σημείο.
iii) Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbf{R}$ ώστε μία ευθεία να περνάει από το μέσο του AB με $A(1,5)$ και $B(5,-1)$.
- 42.** Ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχει τις πλευρές του OA και OB στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Τα σημεία A και B κινούνται στους ημιάξονες ώστε $OA+OB=\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

τόπος του μέσου M της υποτείνουσας AB .

- 43.** Από το σύνολο των ευθειών που παριστάνει η εξίσωση
 $\varepsilon: (x+y-1)+\lambda(2x-y-3)=0$ να βρείτε εκείνη που είναι κάθετη στην ευθεία
 $\delta: 3x-2y+8=0$.
- 44.** Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbf{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+(k+1)y=1$,
 $\varepsilon_2: kx-y+3=0$ και $\varepsilon_3: x+y-2=0$ να περνούν από το ίδιο σημείο.

ΕΜΒΑΛΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- 45.** Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x+4y-1=0$ και $\varepsilon_2: 6x+8y+5=0$.
 Να βρεθεί η απόστασή τους.
- 46.** Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(1,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(5,4)$.
- 47.** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x-2y=0$ και $\varepsilon_2: 3x+4y+1=0$. Να βρείτε τα σημεία της ε_1 που απέχουν από την ε_2 απόσταση ίση με 1.
- 48.** Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x+y+1=0$, $\varepsilon_2: x+3y+5=0$ και $\varepsilon_3: x+y=0$. Να βρείτε τα σημεία της ε_3 που ισαπέχουν από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- 49.** Βρείτε την ευθεία που περνά από το σημείο $A(3,1)$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3.
- 50.** Βρείτε την μεσοπαράλληλη των ευθειών:
 $\varepsilon_1: 2x+3y-1=0$ και $\varepsilon_2: 4x+6y+5=0$.
- 51.** Βρείτε τις ευθείες που απέχουν από την ευθεία $\varepsilon: 3x-4y-1=0$ απόσταση δύο μονάδες.
- 52.** Δίνεται η ευθεία $\lambda x+(\lambda-1)y+\lambda+1=0$. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε να απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1.
- 53.** Βρείτε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες:
 $\varepsilon_1: 3x+y-1=0$ και $\varepsilon_2: x+3y+5=0$.
- 54.** Να βρεθεί σημείο στον άξονα $x'x$ που να ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $\varepsilon: 3x+4y-12=0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

- 55.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το κοινό σημείο των ευθειών: $\varepsilon_1: x-3y+1=0$, $\varepsilon_2: 2x+5y-9=0$ και απέχει από τη αρχή των αξόνων απόσταση $d=2$.
- 56.** Δίνονται τα σημεία: $A(1+t,2t)$, $B(2-t,4)$ και $\Gamma(-1,2)$.
 i) Ναδειχτεί ότι τα σημεία A , B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $t \in \mathbf{R}$.
 ii) $\text{An } (AB\Gamma) = 5$, να βρεθεί ο t .
- 57.** i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $:(t-2)x-(2t+1)y+2-t=0$ παριστάνει ευθεία ε για κάθε $t \in \mathbf{R}$ που διέρχεται από σταθερό σημείο.
 ii) Για ποια τιμή του t η απόσταση του σημείου $A(2,2)$ από την ευθεία ε είναι $\frac{3}{\sqrt{5}}$.
- 58.** Να βρεθούν οι ευθείες που είναι κάθετες στην ευθεία: $\varepsilon: 2x-y+2=0$ και απέχουν από το σημείο $A(3,0)$ απόσταση $d=2\sqrt{5}$.
- 59.** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x+y-2=0$ και το σημείο $M(1,-1)$.
 α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας δ που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην ε .
 β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού P του M ως προς την ευθεία ε .
 γ) Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου OMP .
- 60.** Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(1,-3)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και απέχει από το B απόσταση $3\sqrt{2}$ μονάδες.
- 61.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(1,3)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό 2 τ.μ.
- 62.** Να βρεθεί η ευθεία που έχει $\lambda = \frac{3}{4}$ και ορίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.
- 63.** Τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία $A(3,0)$, $B(-2,1)$ και η κορυφή Γ κινείται πάνω στην ευθεία ε με εξίσωση: $2x-y+3=0$. $\text{An } (AB\Gamma)=12$ τ.μ., να βρεθεί το σημείο Γ .
- 64.** Να βρεθεί η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την ευθεία $x+y=3$ και τον άξονα $y'y$ τρίγωνο με εμβαδό 9 τ.μ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

65. Δίνονται τα σημεία $A(-3,4)$ και $B(4,-1)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει: $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.
66. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,1)$ και $\Gamma(0,0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , όταν: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}|$.
67. Δίνονται τα σημεία $A(-1,1)$, $B(2,-3)$ και $\Gamma(1,0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , όταν: $|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{M\Gamma}|$.
68. Δίνονται τα σημεία $A(-3,1)$, $B(2,-3)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , όταν: $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4$.
69. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x - 5y + 1 = 0$ και το σημείο $P(2,-1)$. Σημείο A κινείται στην ε . Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του τμήματος PA .
70. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$ και $B(-1,-2)$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , αν το εμβαδό του τριγώνου ABM είναι 8 τ.μ.
71. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + y + 1 = 0$. Ένα σημείο A κινείται στην ε_1 και ένα σημείο B στην ε_2 . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του τμήματος AB .