ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

☞ ύπαρξη ρίζας εξίσωσης

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ που αναφέρεται κάθε φορά:
   α) $(x+1)2^{x+1} = 1$ και $\Delta = (-1, 0)$
   β) $2\ln(x+2) + ημ(\pi x) = 1$ και $\Delta = (-1, 0)$
   γ) $e^x = 3x$ και $\Delta = (0, 1)$
   δ) $x^2 - 3x + 2 + συνx = 0$ και $\Delta = (1, 2)$

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^3 + \alpha^2 x + \alpha + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$ για κάθε $\alpha \in R$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - (\alpha\beta - 2)x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$ όταν $\alpha + \beta = 2$.

☞ ύπαρξη x_0 ή ξ ή ... ώστε ...

4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον :
   α) $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε: $\xi \ln\xi = 1 - \ln\xi$
   β) $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε: $2ημx_0 - 3συνx_0 = -2$
   γ) $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $2\xi - 2 = ημα\xi$.

☞ απαλοιφή παρονομαστών

5. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ, όταν:
   α) $\frac{x^6+1}{x+1} + \frac{x^4+1}{x-2} = 0$ και $\Delta = (-1, 2)$
   β) $ημx = \frac{x}{x^2-1}$ και $\Delta = (-1, 1)$
   γ) $\frac{συνx}{x-\pi} = \frac{ημx}{x+\pi}$ και $\Delta = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \to R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση
   $f(x) = \frac{2e^x - 3}{x^2 - x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

☞ **δύο τουλάχιστον ρίζες**

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + xημx = συνx$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα: (-π, 0) και (0, π).

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1, 1).

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 20x = x^2 - 3$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-2, 3).

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = xημx + συνx$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{α}{x-α} + \frac{β}{x-β} + \frac{γ}{x-γ} = 0$, $0 < α < β < γ$

 α) έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα: (α, β) και (β, γ)

 β) έχει δύο ακριβώς ρίζες.

12. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) = - 4 και f(β) = 4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 2f(x) + 3$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (α, β).

13. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) < 0 < f(β). Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{β-x} + \frac{f(x)}{α-x} = 1$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (α, β).

☞ **μοναδική ρίζα**

14. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα Δ, όταν:

 α) $x^3 + 2x - 1 = 0$ και Δ = (0, 1)

 β) $x^3 + x - 1 = 0$ και Δ = (0, 2)

 γ) $2ημx - συνx - 1 = 0$ και $Δ = \left(0, \frac{π}{2}\right)$

 δ) $x + ημx = 2$ και $Δ = \left(0, \frac{π}{2}\right)$

 ε) $2\ln x + ex = 0$ και $Δ = \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

στ) $e^x + x - 2 = 0$ και $\Delta = R$.

15.i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + x + 3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-2, -1)$.
ii) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει: $f^7(x) + f(x) + x + 2 = 0$. Να δείξετε ότι το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$ ανήκει στο διάστημα $(-2, -1)$.

16.Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε: $\beta f^3(x) - 2\alpha f^2(x) + \beta f(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in R$ με $0 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

☞ **γεωμετρικές**

17. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = x^5 + \alpha^2 x^4 + 11x^2 + 2$ και $g(x) = 3x^2 - \alpha x + 7$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των αριθμών -1 και 0.

18.Να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y = x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = συν2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

19.Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = xημx + x$ και $g(x) = 1 + συν2x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη θετική και μικρότερη του π.

20.Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: R \to R$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f^2(x) + 2g(x) + x = 0$ για κάθε $x \in R$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία Α και Β εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των Α και Β.

☞ **$f(\alpha)f(\beta) \le 0$**

21.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και έχει σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

22.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $0 \le f(x) \le 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε: $f(ημx_0) = ημx_0$.

23.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με α, β > 0 και έχει σύνολο τιμών το [α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε: $x_0 f(x_0) = αβ$.

24.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 2] με f(0) = f(2). Να δείξετε ότι η εξίσωση: f(x) = f(x+1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [0, 1].

25.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [α, β] $\to$R για την οποία ισχύει: $(1 + α^2)f(α) + (1 + β^2)f(β) = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α, β].

26.Να δείξετε ότι για κάθε λ$\in$ R η εξίσωση: ημx - ημλ = $\frac{π}{2}$ - x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{π}{2}\right]$.

27.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0, 3] $\to$R με $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε x$\in$[0, 3]. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$[0, 3) τέτοιο ώστε: $f^2(ξ) = 3f(ξ) - ξ$.

☞ **επιπλέον ασκήσεις**

28.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0, α] $\to$R με 0 < f(x) < β για κάθε x$\in$[0, α]. Αν $β^2 < 3α$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$(0, α) τέτοιο ώστε: $f^2(ξ) - βf(ξ) + ξ = 0$.

29.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R $\to$R για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = xe^x$ - συνx για κάθε x$\in$R. Να δείξετε ότι η εξίσωση: f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

30.Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση f: R $\to$R. Να δείξετε ότι η εξίσωση: 2xf(x) + 3f(x+1) = 3f(x) + 2xf(x+1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

31. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) $\neq$ 0, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - α} = \frac{f(α(+ f(β)}{β - α}.$$

32.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R $\to$R για την οποία ισχύει: $x^2 - 1 < f(x) < x^4$ για κάθε x$\in$R. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) + x_0 = x_0^2$.

33.Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g, h: R $\to$R για τις οποίες ισχύει: $f(x) < 2 < 2g(x)$ και $h(x) > 0$ για κάθε $x\in$R. Αν $f(2) = h(2)$ και $h(1) = 2g(1)$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)g(x) = h(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

34.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0, 1] $\to$R για την οποία ισχύει: $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x\in[0, 1]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $e^{f(x)} = (e - 1)x + 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

35.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R $\to$R για την οποία ισχύει: $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2+1}$ για κάθε $x\in$R. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε: $4f(x_0) = 7x_0$.

36.Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g: Δ $\to$R για τις οποίες ισχύει: $f(x) - g(x) = cx$, $c\neq 0$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1, \rho_2 \in\Delta$ με $\rho_1< \rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2).

37.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) =x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = - x^2 + \alpha x + \beta$ με $\beta\neq 0$. Αν $f(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$ με $\rho_1< \rho_2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε: $3f(x_0) + g(x_0) = 0$.

38.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0, 1] $\to$R. Αν $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 5$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο Α(0, 2), να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y = 2x + 1$ και η C_f έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

39.Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: R $\to$R, τέτοια ώστε να ισχύει: $\dfrac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2+1}{2}$ για κάθε $x\in$R.

α) Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = x$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in[0, 1]$.

β) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0} \left[x^2 \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \dfrac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3 \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \eta\mu 2x}{x^2 + \eta\mu x}$.

☞ **ύπαρξη ρίζας από όριο**

40.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + αx^2 + βx - 1$, $x \in R$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y.

β) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες πραγματικές ρίζες.

41.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 2$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 3$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = αx^2 + βx + γ$ όπου α, β, $γ \in R$ με $2 < α < 3$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

42.Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = α_ν x^ν + ... + α_1 x + α_0$, $ν \in N$ με $α_ν > 0$ και $α_0 < 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση P(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

43.Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + (x - α)^2 = 0$ με $α \neq 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

44.Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

45.Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xημ\dfrac{1}{x} = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

46.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \ln x = 1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

47.Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ με $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = γ \in R$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = δ \in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + e^{x+1} + \ln x = 1$ έχει μία ακριβώς λύση στο $(0, +\infty)$.

48.Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο σύνολο R για την οποία ισχύει: $x^2 f(x) - 5x^4 = x^2 - 2ημx^2$, για κάθε $x \in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

γ) Δείξτε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R.

☞ **γενικά θέματα**

49.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει:
$f(2) + f(6) < 10 < f(3) + f(5)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha + \beta = 8$ τέτοιοι ώστε να ισχύει: $f(\alpha) + f(\beta) = 10$.

50.Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $f^3(x) + 2x^2 f(x) = 4\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in R$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$.

α) Να δείξετε ότι: $\lambda^3 + 2\lambda - 4 = 0$.

β) $1 < \lambda < 2$.

51.Έστω Μ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in [1, 2]$ και Α, Β οι προβολές του στους ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα.

α) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του ορθογωνίου ΟΑΜΒ καθώς επίσης και το εμβαδόν E_2 του τετραγώνου με πλευρά το ΟΜ.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f τέτοιο ώστε: $E_1^2 = E_2$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

☞ **βασική εφαρμογή: εύρεση προσήμου συνάρτησης**

52.Να βρείτε το πρόσημο καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

β) $f(x) = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x + 1$, $x \in [0, \pi]$

γ) $f(x) = \sqrt{2}\,\eta\mu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

δ) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$

ε) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

☞ **αν f συνεχής και δεν μηδενίζεται, διατηρεί σταθερό πρόσημο**

53.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^3(x) - 3x^2 f(x) + x^6 + 1 = 0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

β) Να βρείτε το f(0).

γ) Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$.

54.Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες ώστε $f(x)\,g(x) \geq 1 + x\,f(x)$ για κάθε $x \in R$.

i) Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο R.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση: $g(2) = 1$, τότε:
α) να βρείτε το πρόσημο της f
β) να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 2).

55.Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $f(x)\, g(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$, $f(1) > 3$ και $g(2) > 2$. Να δείξετε ότι:
α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.
β) Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε: $g(x_0) = x_0$.

56.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(1) = -2$. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} [(f(2) - 1)x^3 + 5x - 1]$.

57.Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f(2013) + f(2014) + f(2015) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

58.Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και επιπλέον:
$f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2014) = -1$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

59.Έστω η συνάρτηση $f: [0, 3] \to R$ τέτοια ώστε $f(0) = f(3)$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in [0, 2]$. Να δείξετε ότι:
α) $g(0) + g(1) + g(2) = 0$
β) αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

60.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Αν $5\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [0, 2].

61.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [-2, 2] \to R$ τέτοια ώστε:
$3(x^2 - 1) + 2f^2(x) = 9$ για κάθε $x \in [-2, 2]$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2, 2).

62.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, \pi] \to R$ τέτοια ώστε:
$2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3f^4(x) = 2$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, \pi)$.

63.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to R$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [1, +\infty)$ να ισχύει: $|f(x) - 1| - \dfrac{2}{x+1} = x - 1$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$.

☞ συνεχής f διατηρεί πρόσημο μεταξύ των διαδοχικών ριζών της

64. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(2) = 1$ και 1, 4 διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να βρείτε το όριο:
$\lim\limits_{x\to-\infty} [(f(3)+1)x^3 - 2x + 1]$.

65. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(0) =1$. Αν η C_f έχει με τον άξονα x'x κοινά μόνο τα σημεία Α(2, 0) και Β(7, 0), να δείξετε ότι:
α) $f(1) > 0$
β) $f(3)\, f(4) > 0$.

66. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι 1-1 και ισχύει: $f(1) + f(2) = 0$. Να δείξετε ότι:
α) Υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = 0$
β) $f(3)\, f(4) > 0$
γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $f(1) = 1$, τότε: $f(5) < 0 < f(0)$.

☞ εύρεση του τύπου της f

67. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:
α) $f^2(x) = 1 + x^2$ για κάθε $x \in R$
β) $f^2(x) = 3 + 2ημ^2x$ για κάθε $x \in R$.

68. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:
α) $f^2(x) = 2f(x)ημx + 1$ για κάθε $x \in R$
β) $f^2(x) = 4f(x)e^x + 1$ για κάθε $x \in R$.

69. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει:
α) $f^2(x) = x^2$
β) $f^2(x) = (x - 1)^2$.

70. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \to R$ για την οποία ισχύει: $4x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1, 1).
γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
δ) Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f.

71. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $f^2(x) = x^2f(x) + x^2 + α$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:
α) $α = 1$.
β) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα
γ) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

δ) $f(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$.

72.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^2(x) - 2xf(x) = 4$ για κάθε $x \in R$.
α) i) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R
ii) Να βρείτε τον τύπο της f αν επιπλέον ισχύει: $f(0) = 2$.
β) Να βρείτε τα όρια:
i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(\alpha)x^2 + f(\beta)}{f(\beta)x + f(\alpha)}$
ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x)\,\eta\mu \frac{1}{f(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

73.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 3 - \eta\mu(\pi x) + \frac{x^3}{3}$ μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{7}{3}$ μέσα στο διάστημα [-2, 2].

74.Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ για την οποία ισχύει:$f(0)=0$, $f(1)=1$ και $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| > \left|x^2 - x\right|$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι:
α) η εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη
β) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

75.Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ για την οποία ισχύει:$f(0)=1$, $f(1)=3$ και $f^3(x) - 4f(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

76.Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και τέτοια ώστε: $f(1)= -1$, $f(2)=2$ και $f(3)= -3$, να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

77.Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R και τέτοια ώστε: $f(0) < f(2) < f(1)$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

78.Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R$ για τις οποίες ισχύει:
α) $[f(x) -1][f(x) +2] = 0$, $x \in R$ β) $f^2(x) = 4$, $x \in R$.

79. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει: $f(0)=2$ και $f(f(x)) = f(x) + 2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(2)=4$
β) υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=3$
γ) $f(3)=5$.

80. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(3) = 2$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f(x)\, f(f(x)) = 1$, να βρείτε τα $f(2)$ και $f(1)$.

81. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(-1) =1$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f(f(x)) + x^6 f(x) = 0$, να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(0)$.

82. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(10) =9$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f(x)\, f(f(x)) = 1$, να βρείτε το $f(5)$.

83. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει: $ημf(x) = f(ημx)$ και $xf(x) + 5x \leq 5f(x) + x^2$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
β) Να βρείτε την τιμή $f(5)$.
γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 5)$ τέτοιοι ώστε:
$f^2(x_1) + f^2(x_2) + 25 = 6f(x_1) + 8f(x_2)$.

84. Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$ για κάθε $x, y \in R$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.
Να δείξετε ότι:
α) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
β) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R
γ) Αν επιπλέον ισχύει: $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9}$, τότε τη εξίσωση: $f(x) =2$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

85. Η συνάρτηση f είναι 1-1 και συνεχής στο διάστημα Δ. Αν $α, β, γ \in Δ$ με $α < β < γ$, να δείξετε ότι: $f(α) < f(β) < f(γ)$ ή $f(γ) < f(β) < f(α)$.
(δηλαδή αν f 1-1 και συνεχής σε ένα διάστημα, τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

86. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 3] \to R$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6}$.

87. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι 1-1 και συνεχής. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \dfrac{f(1) + 2f(4) + f(5)}{4}$.

β) αν επιπλέον ισχύει: $f(1) + 2f(4) = 5$ και $f(5) = -5$, τότε: $f(7) < 0$.

88. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε:

α) $f(x_0) = \dfrac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$

β) $f(x_0) = \dfrac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda}$ όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι

γ) $f(x_0) = \dfrac{2f(x_1) + 3f(x_2) + 5f(x_3)}{10}$ όπου $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$

δ) $f(x_0) = \dfrac{2f(\alpha) + 4f(\beta) + 3f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{9}$.

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

☞ **εύρεση συνόλου τιμών**

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 10$. Να βρείτε τις εικόνες των διαστημάτων: $\Delta_1 = [-2, 1]$, $\Delta_2 = (0, 1)$, $\Delta_3 = (-\infty, 3]$, $\Delta_4 = [-1, +\infty)$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$. Να βρείτε τις εικόνες των διαστημάτων: $\Delta_1 = [3, 4]$, $\Delta_2 = (-1, 1)$, $\Delta_3 = (-\infty, 2)$, $\Delta_4 = [3, +\infty)$.

91. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \ln x + x^3 - 1$, $x \in [1, e]$

β) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - x + \dfrac{1}{3}$, $x \in [0, 1]$

γ) $f(x) = \ln x + x$, $x > 0$

δ) $f(x) = \ln x + 2e^x$, $x \in (0, 1]$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \text{συν}x$, $x \in (0, \pi)$

92. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
(*δεν θα χρειαστεί η μονοτονία*)

α) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - \ln x$, $x > 0$ β) $f(x) = \dfrac{\text{ημ}x}{x} + \ln x$, $x > 0$.

93.Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : [0, 4) → R με f (0) =1, f(1) =3, f(3)=-2 και $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0 ,1], γνησίως φθίνουσα στο [1, 3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 4), τότε να βρείτε:
α) Το σύνολο τιμών της f
β) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα [0, 4).

☞ **σύνολο τιμών και επίλυση εξισώσεων**

94.Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2x + ημx, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{3\pi}{2}$ είναι αδύνατη.

95.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x\in(0, +\infty)$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση: xlnx = 1 έχει μοναδική ρίζα.

96.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$, $x\in[1, 5]$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in[1, 5]$ ώστε: $f(x_0) = 1$.

97.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in R$ ώστε:
$\sqrt{4-x_0} = \sqrt{2+x_0} + \sqrt{2e}$.

98.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x$, $x\in(1, +\infty)$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x = e^{\frac{1}{x+2014}}$, x > 1 έχει ακριβώς μία ρίζα.

99.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - e^x - \ln x$, x > 0.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: f(x) = α έχει μοναδική ρίζα για κάθε

$\alpha \in R$.

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = συνx + 2 – x$, $x \in [0, \pi]$.
   α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
   β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $συνx(2συνx + 1) = x – 2ημ^2x$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[0, \pi]$.

101. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

☞**όριο αντίστροφης**

102. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
   α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
   β) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και είναι γνησίως φθίνουσα.
   γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$, αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

103. Έστω συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta = (-\infty, 1)$, να βρείτε τα όρια:
   α) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x) + x^2}{x + 2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x - 1}$

104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
   α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
   β) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και είναι γνησίως αύξουσα.
   γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$, αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - x^3 + 1$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.